2.1 POHYB

Celý svět a všechno v něm se pohybuje. Dokonce i věci, které se zdají být v klidu, jako například silnice, se pohybují spolu s otáčením Země, jejím obíháním kolem Slunce, s pohybem Slunce kolem středu naší Galaxie i pohybem celé Galaxie vzhledem ke galaxiím ostatním. Část fyziky, která se zabývá popisem pohybu těles i tříděním a porovnáváním pohybů, se nazývá **kinematika**. Které charakteristiky pohybu vlastně máme měřit a jak je budeme srovnávat?

Než se pokusíme na tyto otázky odpovědět, všimněme si některých obecných vlastností pohybů. Naše úvahy budou prozatím omezeny třemi požadavky:

1. Pohyb se děje vůči Zemi (kterou pokládáme za nehybnou) výhradně po přímce. Ta může být svislá (pád kamene), vodorovná (jízda automobilu po dálnici), nebo libovolně skloněná. Vždy to ale musí být přímka. Takový pohyb nazýváme **přímočarý**. (Zatímco svět kolem nás je trojrozměrný, představuje pohyb po přímce pouze jednorozměrnou úlohu.)

2. Až do kap. 5 se nebudeme zabývat příčinami pohybu, pouze se budeme snažit pohyb *popsat*. Budeme zjišťovat, zda těleso zvyšuje či snižuje svou rychlost, zda se zcela zastavilo, nebo se začalo pohybovat opačným směrem. Půjde prostě o sledování změn pohybu v průběhu času.

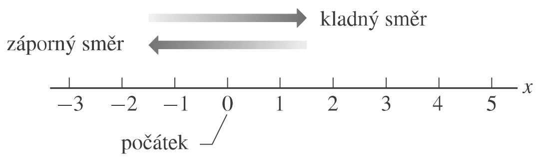
3. Pohybující se těleso nahradíme hmotným bodem. **Hmotný bod** je nejjednodušší myslitelný objekt, který zastupuje skutečné pohybující se těleso v případech, kdy pro popis jeho pohybu nejsou rozhodující jeho vlastní rozměry. Tento případ nastává zejména tehdy, pohybují-li se všechny části tělesa stejně rychle a ve stejném směru. Jako hmotný bod si můžeme představit i dítě, které sjíždí po přímé skluzavce na dětském hřišti. Představa hmotného bodu však již není vhodná pro otáčející se kolotoč, neboť jeho různé části se v daném okamžiku pohybují různě rychle a v různých směrech.

Hmotný bod je často užívaným a velmi funkčním fyzikálním modelem nejen při pouhém popisu pohybu těles, ale i v úvahách o příčinách jeho změn (kap. 5 a 6). Z tohoto obecnějšího pohledu nahrazuje hmotný bod skutečné těleso v případech, kdy je podstatná jeho celková hmotnost a nikoli jeho vlastní rozměry, tvar apod. Výstižnými výrazy zastupujícími pojem *hmotný bod* jsou **částice** nebo **bodový objekt**. Zadání příkladů a úloh v jednotlivých kapitolách jsou většinou formulována nikoli pro abstraktní hmotné body, částice, bodové objekty, ale pro konkrétní tělesa, s nimiž se setkáváme při fyzikálních experimentech i při každodenním dění (kostky, krabice, bedny, zvířata, lidé). V kapitolách 1 až 8, v nichž se jedná výhradně o posuvné pohyby těles, je všechna považujeme za hmotné body. S vědomím, že jsme právě přistoupili na tuto dohodu, se nebudeme úzkostlivě držet terminologické přesnosti a budeme používat jak názvy konkrétních objektů, tak termíny těleso či objekt.

2.2 POLOHA A POSUNUTÍ

Polohu objektu určujeme vždy vzhledem k nějakému vztažnému bodu, nejčastěji **počátku** souřadnicové osy (například osa x na obr. 2.1). Za **kladný směr** osy považujeme směr rostoucí souřadnice. Na obr. 2.1 je kladný směr orientován vpravo. Opačný směr nazýváme **záporný**.

Má-li například hmotný bod souřadnici $x = 5$ m, znamená to, že je ve vzdálenosti 5 m od počátku, měřené v kladném směru. Pokud by měl souřadnici $x = -5$ m, byl by od počátku stejně daleko, ale na opačné straně. Souřadnice -5 m je menší než souřadnice -1 m a ta je menší než souřadnice $+5$ m.



Obr. 2.1 Polohu bodu na ose zadáváme ve vyznačených délkových jednotkách. Stupnici lze libovolně rozšířit v obou směrech.

Změnu polohy objektu z bodu o souřadnici x_1 do bodu o souřadnici x_2 nazýváme posunutím a značíme Δx. Platí

$$\Delta x = x_2 - x_1. \tag{2.1}$$

(Podobně jako v př. 1.3 z kap. 1 označujeme symbolem Δ změnu veličiny, definovanou jako rozdíl její koncové a počáteční hodnoty.) Dosadíme-li za x_1 a x_2 konkrétní čísla, pak posunutí v kladném směru (na obr. 2.1 doprava) bude vždy kladné a posunutí v opačném směru (na obr. 2.1 doleva) vždy záporné. Přemístí-li se částice třeba z polohy $x_1 = 5$ m do polohy $x_2 = 12$ m, je $\Delta x = (12\text{ m}) - (5\text{ m}) = (+7\text{ m})$. Kladná hodnota posunutí nám říká, že se těleso pohnulo v kladném směru. Vrátí-li se těleso zpět do polohy $x = 5$ m, bude celkové posunutí nulové. Při výpočtu posunutí není důležité, kolik metrů těleso skutečně urazilo. Podstatná je pouze výchozí a koncová poloha.

Není-li v dané úloze důležité znaménko (tj. směr) posunutí, hovoříme o **velikosti** posunutí $|\Delta x|$. Ta je vždy nezáporná (tj. kladná anebo nula).

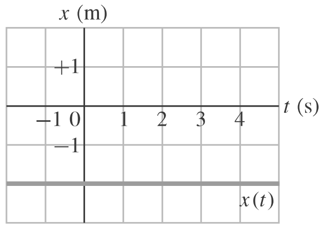
Posunutí je příkladem **vektorové veličiny**, i když zatím jen jednorozměrné. Jako každý vektor je charakterizováno jak velikostí, tak směrem. Vektorům je věnována celá kap. 3. V tuto chvíli postačí, uvědomíme-li si, že posunutí po přímce má dvě charakteristiky: (1) velikost, tj. vzdálenost mezi počátečním a koncovým bodem (například počet metrů) a (2) směr určený souřadnicovou osou orientovaný od počáteční ke koncové poloze a vyjádřený znaménkem plus či minus.

Následuje první z kontrol, jichž v této knize najdete celou řadu. Každá obsahuje jednu nebo více otázek, vyžadujících jednoduchou úvahu či výpočet (často jen „z hlavy“). Můžete si pomocí nich jednoduše ověřit, zda jste probranou látku pochopili. Správné odpovědi jsou uvedeny na konci knihy.

KONTROLA 1: Tři různá posunutí jsou dána následujícími počátečními a koncovými polohami na ose x. (a) -3 m, $+5$ m; (b) -3 m, -7 m; (c) 7 m, -3 m. Která z nich jsou záporná?

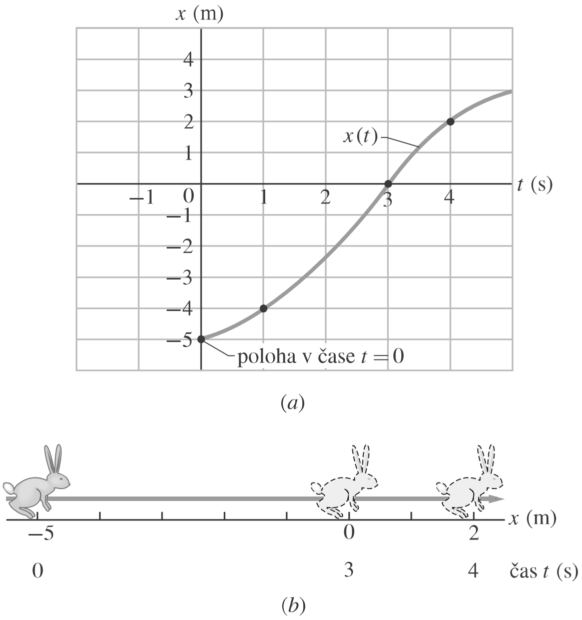
2.3 PRŮMĚRNÁ RYCHLOST

Přehlednou informaci o poloze tělesa získáme, zakreslíme-li do grafu závislost jeho polohy $x(t)$ na čase t. Zvláště jednoduchým příkladem je graf na obr. 2.2, představující závislost $x(t)$ pro králíka,* který sedí v poloze $x = -2$ m. Mnohem zajímavější situaci znázorňuje graf na obr. 2.3a. V tomto případě se totiž králík pohyboval. Poprvé jsme si jej všimli v poloze $x = -5$ m v čase $t = 0$. Pohyboval se směrem k počátku soustavy souřadnic $x = 0$, kterým proběhl v okamžiku $t = 3$ s a pokračoval v běhu v kladném směru osy x.



Obr. 2.2 Graf časové závislosti $x(t)$ polohy králíka sedícího v bodě o souřadnici $x = -2$ m. Jeho poloha se s časem nemění.

* Králíka považujeme za hmotný bod.



Obr. 2.3 (a) Graf časové závislosti polohy $x(t)$ běžícího králíka. (b) Obrázek skutečné dráhy králíka. Na stupnici pod osou x je vždy uveden okamžik, kdy králík dorazil do vyznačené polohy x.

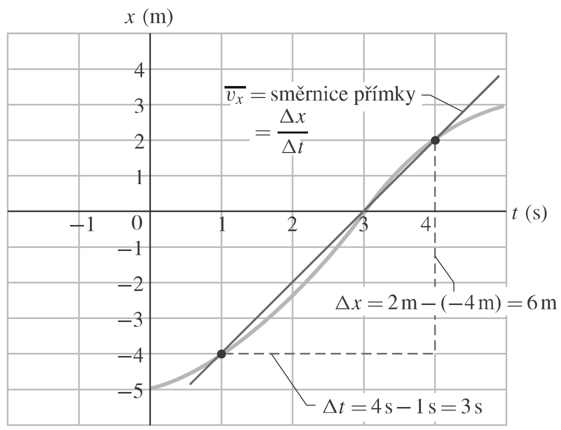
Na obr. 2.3b je zakreslen přímočarý pohyb králíka, jak bychom ho mohli vidět ve skutečnosti. Graf na obr. 2.3a je samozřejmě abstraktní: nic takového nemůžeme přímo pozorovat. Obsahuje však bohatší informaci o pohybu králíka. Umožňuje například zjistit, jak rychle se pohyboval. Ve skutečnosti je s otázkou „jak rychle“ spojeno několik různých fyzikálních veličin. Jednou z nich je tzv. **průměrná** neboli **střední rychlost** $\overline{v_x}$, kterou definujeme jako podíl posunutí Δx v určitém časovém intervalu Δt a délky tohoto intervalu:

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \qquad (2.2)$$

Označujeme* ji $\overline{v_x}$. V grafu $x(t)$ je průměrná rychlost $\overline{v_x}$ dána směrnicí přímky, která spojuje dva vybrané body křivky: polohu x_1 v čase t_1 (v grafu bod $[t_1, x_1]$) a polohu x_2 v čase t_2 (bod $[t_2, x_2]$). Podobně jako posunutí má i průměrná rychlost velikost i směr. (Je tedy dalším příkladem vektorové veličiny.) Je-li hodnota $\overline{v_x}$ kladná, pak křivka zleva doprava stoupá (funkce $x(t)$ je rostoucí). Je-li záporná, pak křivka zleva doprava klesá (funkce $x(t)$ je klesající). Průměrná rychlost $\overline{v_x}$ má vždy stejné znaménko jako posunutí, neboť hodnota Δt ve vztahu (2.2) je vždy kladná.

* Pruh nad *libovolnou* veličinou bude všude v této knize znamenat její střední hodnotu.

Obr. 2.4 dává návod, jak určit průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ běžícího králíka z obr. 2.3 v časovém intervalu od $t = 1\,\mathrm{s}$ do $t = 4\,\mathrm{s}$. Její hodnotu $\overline{v_x} = 6\,\mathrm{m}/3\,\mathrm{s} = +2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ jsme vypočetli jako směrnici spojnice dvou bodů na křivce grafu: první odpovídá začátku a druhý konci časového intervalu, během kterého jsme králíka sledovali.*



Obr. 2.4 Výpočet průměrné rychlosti v časovém intervalu od $t = 1\,\mathrm{s}$ do $t = 4\,\mathrm{s}$. Průměrná rychlost je určena jako směrnice přímky spojující dva body grafu, které odpovídají počátečnímu a koncovému okamžiku daného intervalu.

PŘÍKLAD 2.1

Nákladní dodávka jede po přímé silnici stálou rychlostí 86 km/h. Po ujetí 10,4 km náhle dojde palivo. Řidič pokračuje pěšky v původním směru. Po 27 minutách (0,450 h) dojde k čerpací stanici, vzdálené od odstavené dodávky 2,4 km. Jaká je průměrná rychlost řidiče od chvíle, kdy vyjel s dodávkou z výchozího místa, až do okamžiku příchodu k čerpací stanici? Řešte výpočtem i graficky.

ŘEŠENÍ: Pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$ musíme znát celkové posunutí Δx a dobu Δt. Je výhodné položit počátek souřadnicové osy x do místa, odkud automobil vyrazil (tedy $x_1 = 0$) a orientovat osu tak, aby směr jízdy byl kladný.

Poloha čerpací stanice na takto zvolené ose je $x_2 = 10{,}4\,\mathrm{km} + 2{,}4\,\mathrm{km} = +12{,}8\,\mathrm{km}$, a tedy $\Delta x = x_2 - x_1 = +12{,}8\,\mathrm{km}$. Dobu jízdy $\Delta t'$ určíme z rovnice (2.2), po jejíž úpravě a dosazení dostaneme:

$$\Delta t' = \frac{\Delta x'}{\overline{v_{x'}}} = \frac{(10{,}4\,\mathrm{km})}{(86\,\mathrm{km/h})} = 0{,}121\,\mathrm{h},$$

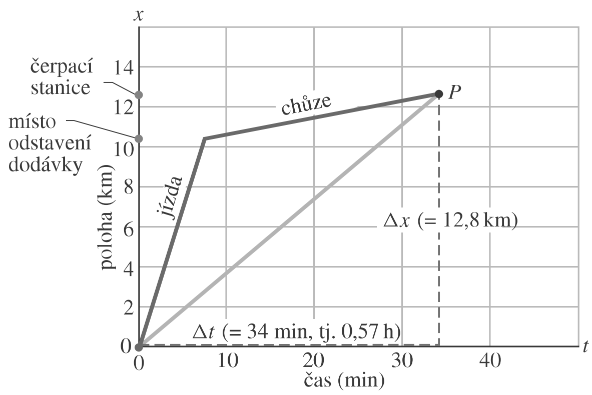
tj. asi 7,3 min. Jako $\Delta x' = 10{,}4\,\mathrm{km}$ jsme označili vzdálenost, kterou dodávka ujela do okamžiku, kdy došlo palivo. Celková doba cesty řidiče (jízda i chůze) je tedy

$$\Delta t = 0{,}121\,\mathrm{h} + 0{,}450\,\mathrm{h} = 0{,}571\,\mathrm{h}.$$

Nakonec dosadíme za Δx a Δt do rovnice (2.2):

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(12{,}8\,\mathrm{km})}{(0{,}571\,\mathrm{h})} = \\ = 22{,}4\,\mathrm{km/h} \doteq 22\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ zjistíme ještě graficky. Nejprve narýsujeme graf funkce $x(t)$ (obr. 2.5). Výchozí bod grafu splývá s počátkem a koncový bod je označen písmenem P. Průměrná rychlost je směrnicí přímky spojující tyto dva body. Z délek přerušovaných čar je zřejmé, že směrnice má hodnotu $\overline{v_x} = 12{,}8\,\mathrm{km}/0{,}57\,\mathrm{h} = +22\,\mathrm{km/h}$.



Obr. 2.5 Příklad 2.1. Přímkové úseky s označením „jízda“ a „chůze“ představují grafické znázornění časové závislosti polohy řidiče dodávky během jízdy, resp. během chůze k čerpací stanici. Směrnice přímky spojující počátek soustavy souřadnic s bodem P určuje jeho průměrnou rychlost.

PŘÍKLAD 2.2

Předpokládejme, že návrat k dodávce trvá řidiči 35 min. Musí totiž nést nádobu s palivem, a proto jde pomaleji. Jaká je průměrná rychlost řidiče na celé trati od okamžiku výjezdu z výchozího místa až po návrat od čerpací stanice?

ŘEŠENÍ: Stejně jako v předchozím případě musíme určit celkové posunutí Δx a vydělit je celkovou dobou Δt. Řidičova cesta nyní končí návratem k automobilu. Její počáteční bod má opět souřadnici $x_1 = 0$, koncový bod je dán polohou odstaveného automobilu $x_2 = 10{,}4\,\mathrm{km}$. Dostáváme

---

* V geometrii je směrnice přímky definována jako tangenta úhlu, který tato přímka svírá s nějakou vztažnou přímkou. Představuje-li však přímka například graf závislosti $x(t)$ polohy tělesa x na čase t, rozumíme směrnicí podíl přírůstku souřadnice Δx a odpovídajícího přírůstku času Δt, včetně uvážení příslušných jednotek. Je-li poloha měřena v metrech a čas v sekundách, vyjde směrnice v jednotkách $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Tangentě úhlu α mezi přímkou grafu a časovou osou (která v tomto případě hraje roli vztažné přímky) bude rovna tehdy, zvolíme-li na osách t a x stejně dlouhé jednotky. Pokud by jedna sekunda na časové ose byla reprezentována třeba úsečkou o délce 1 cm, museli bychom na ose poloh zvolit jako 1 m rovněž úsečku o délce 1 cm.

$\Delta x = 10{,}4\,\mathrm{km} - 0 = 10{,}4\,\mathrm{km}$. Celková doba jízdy a chůze k čerpací stanici a zpět je

$$\Delta t = \frac{(10{,}4\,\mathrm{km})}{(86\,\mathrm{km/h})} + (27\,\mathrm{min}) + (35\,\mathrm{min}) = \\ = 0{,}121\,\mathrm{h} + 0{,}450\,\mathrm{h} + 0{,}583\,\mathrm{h} = 1{,}15\,\mathrm{h}.$$

Je tedy

$$\overline{v_x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(10{,}4\,\mathrm{km})}{(1{,}15\,\mathrm{h})} = \\ = 9{,}04\,\mathrm{km/h} \doteq 9{,}0\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

Průměrná rychlost je v tomto případě menší než v příkladu 2.1. Je to pochopitelné, celkové posunutí je totiž menší a celková doba delší.

KONTROLA 2: Po doplnění paliva se dodávka vrací zpět do bodu x_1 rychlostí 80 km/h. Jaká je průměrná rychlost na celé cestě?

Jinou představu o tom, „jak rychle“ se hmotný bod pohybuje, lze získat pomocí tzv. **průměrné velikosti rychlosti** $\overline{v}$. Zatímco pro výpočet průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, která je vektorovou veličinou, je rozhodující vektor posunutí Δx, je průměrná velikost rychlosti veličinou skalární a je určena celkovou dráhou, kterou hmotný bod urazí nezávisle na směru pohybu.* Je tedy

$$\overline{v} = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celková doba pohybu}}. \qquad (2.3)$$

Průměrná velikost rychlosti $\overline{v}$ neobsahuje, na rozdíl od průměrné rychlosti $\overline{v_x}$, informaci o směru pohybu. Je vždy nezáporná. V některých případech může být $\overline{v} = |\overline{v_x}|$, obecně to však neplatí. Výsledek následujícího příkladu to jasně dokumentuje.

PŘÍKLAD 2.3

Určete průměrnou velikost rychlosti pohybu v příkladu 2.2.

ŘEŠENÍ: Od počátku jízdy až po návrat zpět k vozu od čerpací stanice urazil řidič celkovou vzdálenost

$$10{,}4\,\mathrm{km} + 2{,}4\,\mathrm{km} + 2{,}4\,\mathrm{km} = 15{,}2\,\mathrm{km}$$

za dobu 1,15 h. Průměrná velikost jeho rychlosti má tedy hodnotu

$$\overline{v} = \frac{(15{,}2\,\mathrm{km})}{(1{,}15\,\mathrm{h})} = 13{,}2\,\mathrm{km/h}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.1: *Rozumíme dobře zadanému problému?*

Společným problémem všech, kteří se teprve začínají zabývat řešením fyzikálních úloh, je správně pochopit zadání. Zda jsme zadání skutečně pochopili, si nejlépe ověříme tak, že se je pokusíme vyložit někomu jinému. Vyzkoušejte si to.

Když čteme zadání, zapíšeme si hodnoty známých veličin i s jednotkami a označíme je obvyklými symboly. Rozmyslíme si, kterou veličinu máme spočítat a rovněž ji označíme obvyklým symbolem. V příkladech 2.1 a 2.2 je neznámou veličinou průměrná rychlost, kterou značíme $\overline{v_x}$. Pokusíme se najít fyzikální vztahy mezi neznámou veličinou a veličinami zadanými. V příkladech 2.1 a 2.2 je to definice průměrné rychlosti, zapsaná vztahem (2.2).

Bod 2.2: *Používáme správně jednotky?*

Věnujme vždy pozornost tomu, abychom do vzorců dosadili všechny veličiny v odpovídajících jednotkách. V příkladech 2.1 a 2.2 je přirozené počítat vzdálenost v kilometrech, čas v hodinách a rychlost v kilometrech za hodinu. Někdy musíme před dosazením jednotky převést.

Bod 2.3: *Je získaný výsledek rozumný?*

Nad výsledkem se nakonec zamysleme a zvažujme, dává-li smysl. Není získaná hodnota příliš velká nebo naopak příliš malá? Má správné znaménko a jednotky? Správná odpověď v př. 2.1 je 22 km/h. Kdyby nám vyšlo třeba 0,000 22 km/h, −22 km/h, 22 km/s nebo 22 000 km/h, měli bychom hned poznat, že jsme ve výpočtu udělali chybu.

Bod 2.4: *Umíme dobře číst z grafů?*

Měli bychom být schopni dobře rozumět takovým grafům, jaké jsou například na obr. 2.2, 2.3a, 2.4 a 2.5. U všech vynášíme na vodorovnou osu čas (jeho hodnoty rostou směrem vpravo). Na svislé ose je poloha hmotného bodu x vzhledem k počátku soustavy souřadnic. Poloha x roste směrem vzhůru.

Pozorně si všímejme jednotek, v nichž jsou veličiny na osách vyjádřeny (sekundy či minuty, metry nebo kilometry), nezapomínejme na znaménka proměnných.

2.4 OKAMŽITÁ RYCHLOST

Poznali jsme již dvě různé veličiny, které popisují, jak rychle se určité těleso nebo částice pohybuje: průměrnou rychlost $\overline{v_x}$ a průměrnou velikost rychlosti $\overline{v}$. Obě určíme z měření prováděných v časovém intervalu Δt. Otázkou

* Je třeba rozlišovat *velikost vektoru průměrné rychlosti* $|\overline{v_x}|$ a *průměrnou velikost rychlosti* $\overline{v}$. První veličinu určíme prostě jako velikost vektoru definovaného vztahem (2.2) (viz také kap. 3), druhá je výsledkem středování velikosti rychlosti nezávisle na jejím směru, například z údaje rychloměru automobilu.

„jak rychle?“ však máme obvykle na mysli rychlost částice v daném okamžiku. Je popsána veličinou v_x, zvanou **okamžitá rychlost**, nebo jednoduše rychlost.

Okamžitou rychlost získáme z průměrné rychlosti tak, že budeme časový interval (neboli dobu) Δt, měřený od okamžiku t, zmenšovat bez omezení k nule. S poklesem hodnoty Δt se průměrná rychlost měřená v intervalu od t do $t + \Delta t$ blíží jisté limitní hodnotě, která pak definuje rychlost v okamžiku t:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4}$$

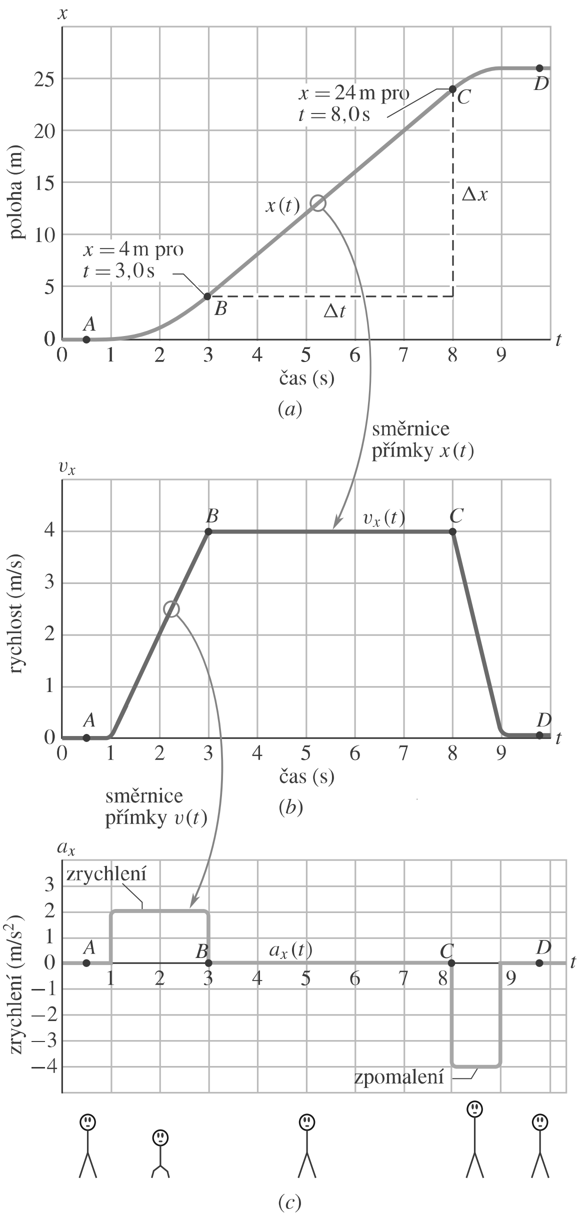
Okamžitá rychlost je další vektorovou veličinou, se kterou se setkáváme. Obsahuje totiž informaci i o směru pohybu částice. Určuje, jak rychle se v daném okamžiku mění poloha částice s časem. Názornou geometrickou představu o limitním přechodu od průměrné k okamžité rychlosti můžeme získat z obr. 2.4. Budeme-li bez omezení přibližovat bod určený koncovým okamžikem uvažovaného časového intervalu Δt k bodu počátečnímu, přejde červená přímka v tečnu ke křivce grafu, vedenou počátečním bodem. Matematicky je okamžitá rychlost rovna směrnici tečny ke grafu funkce $x(t)$.

Velikost okamžité rychlosti neboli **velikost rychlosti** již postrádá informaci o směru pohybu a má vždy nezápornou hodnotu. Rychlosti $+5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a $-5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ mají stejnou velikost $5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Rychloměr v automobilu měří jen velikost rychlosti, protože není schopen určit směr pohybu.

Angličtí studenti jsou na tom lépe. Obecná čeština užívá slova *rychlost* ve třech různých smyslech, pro které má angličtina tři různá slova, totiž *velocity* (vektor rychlosti), *speed* (velikost vektoru rychlosti) a *rate* (obecná změna v čase, např. rychlost hoření). Všechna tato slova jsou v angličtině zcela běžná. Ve fyzice užíváme slova *rychlost* pro *vektorovou veličinu*. Tam, kde by mohlo dojít k nedorozumění, raději užijeme sousloví, jako je „rychlost o velikosti… “. Slova „rychlost“ namísto „velikost rychlosti“ lze užít pouze tam, kde je *opravdu* zaručeno, že na směru nezáleží (výroky typu „Rychlost světla ve vzduchu je větší než ve vodě.“) anebo kde je směr jasně dán a nemůže se měnit (rychlost vlaku).

PŘÍKLAD 2.4

Na obr. 2.6a je zakreslena časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu. Kabina nejprve stojí v dolním patře, pak se začíná pohybovat vzhůru (kladný směr souřadnicové osy) a opět se zastaví. Nakreslete závislost rychlosti kabiny na čase.



Obr. 2.6 Příklad 2.4. (a) Časová závislost $x(t)$ polohy kabiny výtahu pohybující se svisle vzhůru po ose x. (b) Časová závislost její rychlosti $v_x(t)$. Všimněte si, že $v_x(t)$ je derivací funkce $x(t)$, tj. $v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. (c) Časová závislost zrychlení kabiny $a_x(t)$ je derivací funkce $v_x(t)$, tj. $a_x(t) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$. Schematické nákresy postaviček v dolní části obrázku naznačují pocity pasažéra při urychlování kabiny.

ŘEŠENÍ: Úseky grafu obsahující body A a D odpovídají situaci, kdy je kabina v klidu. Grafem funkce $x(t)$ v těchto úsecích jsou přímky rovnoběžné s časovou osou. Směrnice tečen, a tedy i rychlost kabiny, je nulová. V úseku mezi body B a C se sklon křivky nemění a souřadnice kabiny stále roste. Kabina se pohybuje konstantní rychlostí. Směrnici tečny (tedy rychlost) určíme jako podíl

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x = \frac{(24\,\mathrm{m} - 4{,}0\,\mathrm{m})}{(8{,}0\,\mathrm{s} - 3{,}0\,\mathrm{s})} = +4{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Kladné znaménko ukazuje, že se výtah pohybuje v kladném směru. Hodnoty rychlosti $v_x = 0$ a $v_x = 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ jsou pro příslušné časové intervaly vyznačeny v grafu na obr. 2.6b. Při rozjezdu a opětovném zastavení, tj. v časových intervalech od 1 s do 3 s a od 8 s do 9 s se rychlost kabiny mění, například podle obr. 2.6b. (K diskusi o obr. 2.6c přistoupíme až v čl. 2.5.)

Můžeme řešit i „obrácenou úlohu", kdy potřebujeme ze znalosti funkce $v_x(t)$ (graf na obr. 2.6b) určit $x(t)$ (obr. 2.6a). Její řešení však není jednoznačné. Graf funkce $v_x(t)$ dává totiž informaci pouze o *změnách* polohy, nikoli o poloze samotné. Abychom určili změnu polohy v libovolném časovém intervalu, vypočteme „obsah plochy pod křivkou" grafu $v_x(t)$ omezenou počátečním a koncovým bodem časového intervalu.* Mezi třetí a osmou sekundou se kabina pohybuje dejme tomu konstantní rychlostí $4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Změnu její polohy určíme jako „obsah plochy pod křivkou $v_x(t)$" odpovídající tomuto časovému intervalu:

$$\text{„Obsah plochy pod křivkou"} = (4{,}0)(8{,}0 - 3{,}0) = +20.$$

(Tato hodnota je kladná, protože příslušná část křivky $v_x(t)$ leží nad časovou osou.) Získaný *číselný údaj* opatříme správnou jednotkou**, v tomto případě $(\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}) \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}$. Obr. 2.6a potvrzuje, že hodnota souřadnice určující polohu kabiny se v uvažovaném časovém intervalu skutečně zvětšila o 20 m. Z obr. 2.6b však nemůžeme poznat, jaká byla její poloha na začátku a konci tohoto intervalu. K tomu bychom potřebovali další údaj.

PŘÍKLAD 2.5

Hmotný bod se pohybuje po ose x a jeho poloha je v závislosti na čase určena vztahem

$$x = 7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3. \qquad (2.5)$$

Jaká je jeho rychlost v okamžiku $t = 3{,}5$ s? Je jeho rychlost stálá, nebo se spojitě mění?

ŘEŠENÍ: Zadání pro jednoduchost neobsahuje jednotky. Můžeme si je však k číselným koeficientům doplnit takto: 7,8 m, $9{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $-2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-3}}$. Rychlost určíme pomocí rovnice (2.4), kde za x na pravé straně dosadíme závislost (2.5):

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7{,}8 + 9{,}2t - 2{,}1t^3).$$

Dostaneme tak

$$v_x = 0 + 9{,}2 - (3)(2{,}1)t^2 = 9{,}2 - 6{,}3t^2. \qquad (2.6)$$

Pro $t = 3{,}5$ je

$$v_x = 9{,}2 - (6{,}3)(3{,}5)^2 = -68,$$
$$v_x = -68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}. \qquad \text{(Odpověď)}$$

V okamžiku $t = 3{,}5$ s se hmotný bod pohybuje v záporném směru osy x a má tedy rychlost $-68\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ (o směru pohybu vypovídá záporné znaménko). Na pravé straně vztahu (2.6) vystupuje čas a rychlost v_x se tedy s časem mění.

KONTROLA 3: Následující čtyři vztahy představují možné případy závislosti polohy částice na čase. V každém z nich je poloha x zadávána v metrech, čas t v sekundách a vždy platí $t > 0$. (1) $x = 3t - 2$, (2) $x = -4t^2 - 2$, (3) $x = 2/t^2$, (4) $x = -2$. (a) Ve kterých z uvedených případů je rychlost v_x částice konstantní? (b) Kdy je záporná? (c) Kdy se pohyb částice zpomaluje?

RADY A NÁMĚTY

Bod 2.5: *Derivace a sklon křivky*

Derivace funkce je určena sklonem křivky (grafu funkce) v daném bodě. Přesněji vyjádřeno je derivace rovna směrnici tečny ke křivce v tomto bodě. Ukázkou může být příklad 2.4: Okamžitá rychlost výtahu v libovolném okamžiku (vypočtená jako derivace funkce $x(t)$ podle (2.4)) je rovna směrnici tečny ke křivce na obr. 2.6a sestrojené v odpovídajícím bodě. Ukážeme si, jak je možné určit derivaci funkce graficky.

Na obr. 2.7 je graf funkce $x(t)$ pro pohybující se hmotný bod. Při grafickém určení jeho rychlosti v okamžiku $t = 1$ s budeme postupovat takto: Nejprve na křivce označíme bod, který tomuto času odpovídá. V tomto bodě narýsujeme tečnu ke křivce grafu. Pracujeme co nejpečlivěji. Dále sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Jeho konkrétní volba je libovolná, neboť přepony všech takových trojúhelníků mají stejný sklon. Zvolíme tedy trojúhelník co největší, abychom směrnici změřili co nejpřesněji. Pomocí měřítek na souřadnicových osách určíme Δx a Δt. Směrnice tečny ke křivce je dána podílem $\Delta x/\Delta t$. Z obr. 2.7 dostaneme

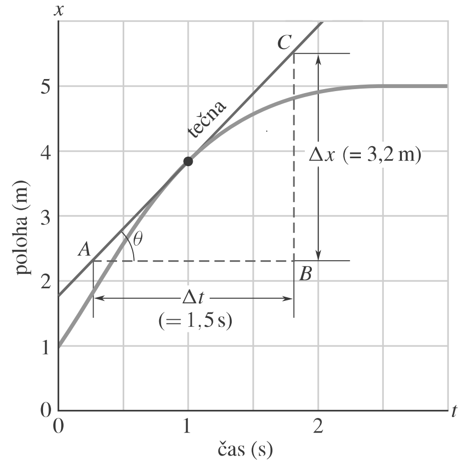
$$\text{směrnice tečny} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(5{,}5\,\mathrm{m} - 2{,}3\,\mathrm{m})}{(1{,}8\,\mathrm{s} - 0{,}3\,\mathrm{s})} = \frac{3{,}2\,\mathrm{m}}{1{,}5\,\mathrm{s}} = +2{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

Podle rovnice (2.4) je tato směrnice rovna rychlosti částice v okamžiku $t = 1$ s. Kdybychom změnili měřítko na některé souřadnicové ose, změnil by se sice jak tvar křivky, tak velikost úhlu θ, ale rychlost určená popsaným způsobem

* Tento postup zdůvodníme v článku 2.7.

** Její rozměr je určen součinem veličin na osách grafu.

by byla stejná. Známe-li matematické vyjádření funkce $x(t)$ (příklad 2.5), je vhodnější stanovit rychlost částice přímo, výpočtem její derivace. Grafická metoda je pouze přibližná.



Obr. 2.7 Derivace křivky v libovolném bodě je směrnicí tečny v tomto bodě. Směrnice tečny (a tedy i okamžitá rychlost dx/dt) v čase $t = 1{,}0$ s je $\Delta x/\Delta t = +2{,}1$ m/s.

2.5 ZRYCHLENÍ

Jestliže se vektor rychlosti částice mění, říkáme, že se částice pohybuje se zrychlením. **Průměrné zrychlení** $\overline{a_x}$ v časovém intervalu Δt je definováno podílem

$$\overline{a_x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}. \tag{2.7}$$

Okamžité zrychlení (nebo prostě jen **zrychlení**) je určeno derivací rychlosti:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}. \tag{2.8}$$

Podle vztahu (2.8) je zrychlení v daném okamžiku rovno směrnici tečny ke křivce $v_x(t)$ v bodě určeném tímto okamžikem. Spojením rovnic (2.8) a (2.4) dostaneme

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{2.9}$$

Zrychlení hmotného bodu je tedy v každém okamžiku dáno druhou derivací polohy $x(t)$ podle času. Nejužívanější jednotkou zrychlení je $m{\cdot}s^{-2}$. V příkladech a cvičeních se můžeme setkat i s jinými jednotkami, všechny však budou mít tvar délka·čas^{-2}. Zrychlení má velikost i směr, je tedy další vektorovou veličinou. Při pohybu podél osy x stačí k určení směru zrychlení zadat pouze příslušné znaménko, podobně jako u posunutí a rychlosti.

Na obr. 2.6c je graf časové závislosti zrychlení výtahové kabiny z příkladu 2.4. Porovnejme grafy $a_x(t)$ a $v_x(t)$: každý bod grafu $a_x(t)$ je určen derivací (tj. směrnicí tečny) grafu $v_x(t)$ v odpovídajícím bodě. Je-li rychlost v_x konstantní (buď $0\,m{\cdot}s^{-1}$ nebo $4\,m{\cdot}s^{-1}$), je její derivace nulová. Zrychlení kabiny je rovněž nulové. Při rozjezdu kabiny je derivace rychlosti kladná, kladné je tedy i zrychlení $a_x(t)$. Při zpomalování má rychlost zápornou derivaci a zrychlení je záporné. Porovnejme nyní sklon dvou přímých úseků grafu $v_x(t)$, které odpovídají rozjezdu a brzdění výtahu. Sklon křivky odpovídající brzdění je strmější než sklon při rozjezdu. Brzdění totiž trvalo jen polovinu doby potřebné k rozjezdu. Velikost zrychlení výtahu při brzdění byla větší než při rozjezdu, což je zřejmé i z obr. 2.6c.

Jízda výtahem je doprovázena nepříjemnými pocity, jak výmluvně napovídají schematické kresby postaviček v dolní části obr. 2.6. Při rozjezdu kabiny jsme jakoby tlačeni směrem dolů, při zastavování naopak nadlehčováni. V mezidobí nic zvláštního nepociťujeme. Svými smysly můžeme vnímat zrychlení, nikoli rychlost. Jedeme-li autem rychlostí 90 km/h nebo letíme letadlem rychlostí 900 km/h, naše tělo si pohyb vůbec neuvědomuje. Pokud by však náhle auto či letadlo začalo měnit svou rychlost, pociťujeme tuto změnu velmi intenzivně až nepříjemně. Silné vzrušení, které zažíváme při jízdě na horské dráze v lunaparku, je částečně způsobeno právě prudkými změnami rychlosti pohybu našeho těla. Ukázka reakce lidského těla na velké zrychlení je na fotografiích obr. 2.8, které byly pořízeny při prudkém urychlení a následném brzdění raketových saní.

Velká zrychlení někdy vyjadřujeme v tzv. jednotkách „g“, kde

$$\begin{aligned} 1g &= 9{,}806\,65\,m{\cdot}s^{-2} \doteq \\ &\doteq 9{,}8\,m{\cdot}s^{-2}\ (\text{jednotka } g). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Tato hodnota byla přijata jako **normální tíhové zrychlení** na 2. generální konferenci pro váhy a míry v r. 1901. Odpovídá severní zeměpisné šířce 45° na úrovni mořské hladiny. (V čl. 2.8 se dovíme, že g je velikost zrychlení tělesa volně padajícího v blízkosti zemského povrchu.) Při jízdě na horské dráze dosahuje velikost zrychlení krátkodobě hodnoty až $3g$, tj. $3 \cdot 9{,}8\,m{\cdot}s^{-2} \doteq 30\,m{\cdot}s^{-2}$.