

22

Elektrický náboj



Zavřete se s přítelem do temné komory; asi po 15 minutách si vaše oči přivyknou na tmou. Bude-li pak váš přítel kousat kostku cukru, bude kostka jiskřit. U některých tvrdých bonbonů uvidíte při každém kousnutí vystupovat z jeho úst slabé záblesky modrého světla. (Můžete také drtit kostku kleštěmi, jako je to na fotografii.) Co způsobuje tento světelný úkaz, obvykle nazývaný triboluminiscence?

22.1 ELEKTROMAGNETISMUS

Již staří Řekové věděli, že když budou třít kus jantaru, bude přitahovat kousky slámy. Tato dávná pozorování zanechala své stopy i v dnešní elektronické době — slovo **elektron** znamená řecky jantar. Řekové také pozorovali, že některé přírodní „kameny“, např. minerál magnetovec, přitahují železo.

Z těchto skromných počátků se vědy o elektřině a magnetismu rozvíjely po staletí odděleně — v podstatě až do roku 1820, kdy Hans Christian Oersted mezi nimi našel spojení: zjistil, že elektrický proud protékající vodičem vychyluje magnetickou střílku kompasu. Je zajímavé, že Oersted učinil tento objev, když si připravoval demonstrace k přednášce pro své studenty fyziky.

Novou vědu, **elektromagnetismus** (spojující elektrické a magnetické jevy), rozvíjeli dále vědci v mnoha zemích. Jedním z nejvýznamnějších byl Michael Faraday, velice nadaný experimentátor s velkou fyzikální intuicí a představitostí. Toto jeho nadání zejména vyniká, uvážíme-li, že jeho sebrané laboratorní deníky neobsahují jedinou rovnici. V polovině 19. století James Clerk Maxwell vyjádřil Faradayovy poznatky v matematické podobě, připojil řadu svých vlastních nových myšlenek a položil tak teoretické základy elektromagnetismu.

Tab. 32.1 uvádí základní zákony elektromagnetismu, nyní nazývané Maxwellovy rovnice. Přijďeme k nim postupně v následujících kapitolách, ale možná se na ně chcete podívat už teď, abyste viděli, jaký je náš cíl.

22.2 ELEKTRICKÝ NÁBOJ

Projdete-li se za suchého dne po koberci a pak přiblížíte prst ke kovové klíče u dveří, přeskočí jiskra. Televizní reklamy nás upozorňují na problém „statické přilnavosti“ oblečení (obr. 22.1). A blesk, abychom uvedli i něco velkolepého, zná každý z nás. Každý z těchto jevů je přitom projevem jen nepatrné části z obrovského množství **elektrického náboje**, jenž je obsažen v předmětech, které nás obklopují, i v našem vlastním těle. **Elektrický náboj** neboli stručně jen **náboj** je atributem (neodmyslitelnou vlastností) základních částic, z nichž se skládají objekty kolem nás; je charakteristickou vlastností, která je s těmito částicemi spojena, ať se nacházejí v jakékoli situaci.

Obrovské množství náboje si v běžných předmětech obvykle neuvědomujeme, protože předměty obsahují stejné množství *náboje* dvojího druhu: *kladného* a *záporného*. V takovém případě jsou předměty jako celek *elektricky neutrální* (předmět není nabit); to znamená, že jeho výsledný náboj je roven nule. Pokud nejsou oba typy náboje ve stejném množství, projeví se jejich rozdíl jako volný



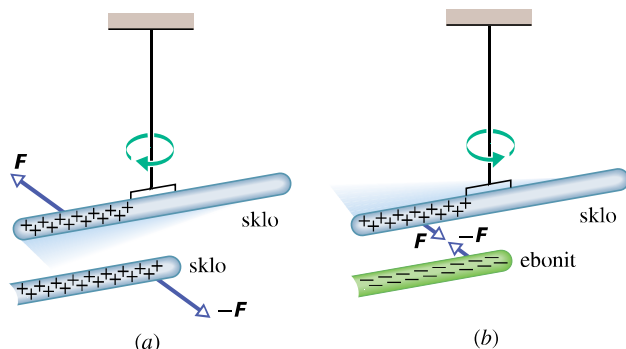
Obr. 22.1 Statická přilnavost — elektrický jev zvláště výrazný v suchých dnech — způsobuje, že se kousky papíru slepí dohromady a přilepí se k plastikovému hřebenu, že se vám šaty lepí na tělo atd.

náboj, který může interagovat s jinými předměty, a tím získáme důkaz o jeho existenci. V tom případě říkáme, že předmět je *nabitý*. Rozdíl v množství náboje je však vždy velmi malý ve srovnání s obrovským celkovým množstvím kladného a záporného náboje obsaženého v předmětu.

Nabitě předměty spolu interagují navzájem silovým působením. Abychom to ukázali, nabijeme nejprve skleněnou tyč třením jednoho jejího konce hedvábím. Při velmi těsném dotyku mezi tyčí a hedvábím se přenáší malé množství náboje z jednoho předmětu na druhý a tím se trochu naruší elektrická neutralita každého z nich. (Tyč hedvábím *třeme* jen proto, abychom dosáhli těsnějšího kontaktu a tím také většího množství přeneseného náboje. To však stále zůstává oproti celkovému náboji předmětů nepatrné.)

Zavěsme nyní nabitou tyč na vlákno, abychom ji *elektricky izolovali* od okolí; její náboj se pak nemůže měnit. Přiblížíme-li k ní druhou skleněnou tyč podobně nabitou (obr. 22.2a), obě tyče se navzájem *odpuzují*. Na každou z tyčí tedy působí síla směřující od druhé tyče. Když však třeme ebonitovou tyč kožesinou a přiblížíme ji k zavěšené skleněné tyči (obr. 22.2b), budou se obě tyče navzájem *přitahovat*. Na každou tyč tedy nyní působí síla směřující ke druhé tyči.

Tento jev můžeme vysvětlit pomocí kladného a záporného náboje. Třeme-li skleněnou tyč hedvábím, ztrácí sklo část svého záporného náboje a získá tak malý přebytek náboje kladného (reprezentovaného znaménkem plus na obr. 22.2a). Třeme-li ebonitovou tyč kožesinou, získá naopak tyč malý přebytek záporného náboje (reprezentovaného znaménkem minus na obr. 22.2b). Z našich dvou pokusů plyne:



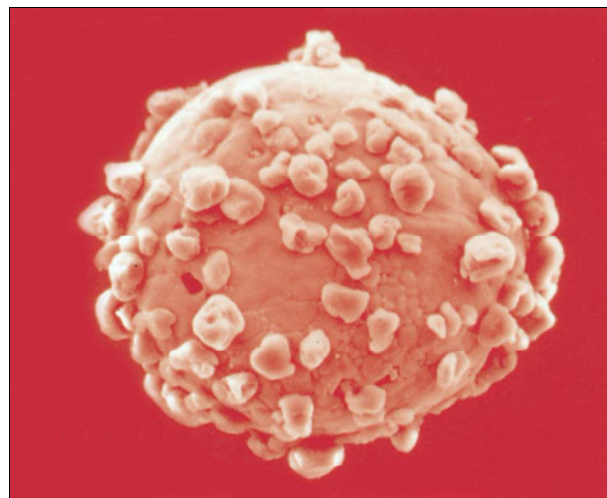
Obr. 22.2 (a) Dvě tyče nabité souhlasnými náboji se odpuzují. (b) Dvě tyče nabité opačnými náboji se přitahují.

Elektrické náboje téhož znaménka se odpuzují, náboje opačného znaménka se přitahují.

V čl. 22.4 vyjádříme tuto skutečnost i kvantitativně jako Coulombův zákon pro **elektrostatickou sílu** (nebo stručněji **elektrickou sílu**) mezi náboji.* Termín elektrostatická se používá pro zdůraznění toho, že náboje jsou vůči sobě v klidu nebo se navzájem pohybují jen zanedbatelnou rychlostí.

Přívlastky „kladný“ a „záporný“ a jejich přiřazení elektrickým nábojům „hedvábí“ a „kožešiny“ zvolil Benjamin Franklin, a to zcela libovolně v tom smyslu, že mohl klidně zaměnit označení nebo použít jinou dvojici protikladů pro rozlišení dvou druhů náboje. (Franklin byl světově uznávaný vědec. Dokonce se říkalo, že jeho diplomatický triumf ve Francii během americké války za nezávislost byl umožněn právě díky tomu, že byl jako vědec tak vysoce oceňován.)

Vzájemné přitahování a odpuzování nabitých těles má mnoho průmyslových aplikací, např. elektrostatické nanášení barev a naprašování, zachycování popílku v komínech, bezdotykový inkoustový tisk a fotokopírování. Obr. 22.3 ukazuje nepatrnou nosnou kuličku v xeroxovém kopírovacím stroji, pokrytou částicemi černého prášku nazývaného *toner*, které jsou k ní přitahovány elektrostatickými silami. Při kopírování jsou záporně nabitá částice toneru přetaženy z nosné kuličky na ta místa rotujícího válce, kde byl vytvořen kladně nabitý obraz kopírovaného dokumentu. Odtud jsou poté přitáhnuty na nabitý list papíru a na něj nakonec tepelně nataveny; tím se vytvoří trvanlivá kopie.



Obr. 22.3 Nosná kulička v xeroxu. Je pokryta částicemi toneru, které k ní přilnou díky elektrostatickému přitahování. Průměr kuličky je asi 0,3 mm.

22.3 VODIČE A NEVODIČE

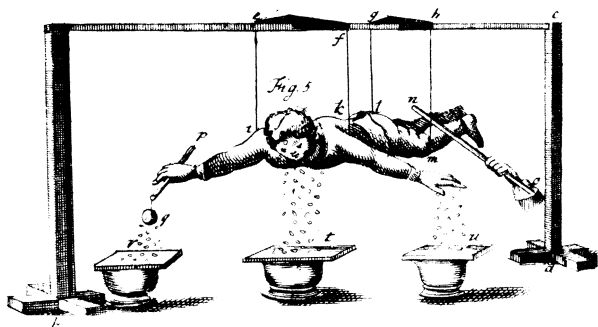
V některých látkách (např. v kovech, v pitné vodě, v lidském těle) se může část jejich náboje pohybovat značně volně. Takové látky nazýváme **vodiče**. V jiných látkách (např. ve skle, v destilované vodě, v ebonitu a vůbec ve většině umělých hmot) se nemůže volně pohybovat prakticky žádný náboj. Tyto látky nazýváme **nevodiče** (též **izolátory**, **dielektrika**). To, co se jeví při mikroskopickém popisu jako *uspořádaný pohyb náboje* látkou, je právě to, čemu říkáme v makroskopickém popisu **elektrický proud**.

Třete-li měděnou tyč vlnou a přitom ji držíte v ruce, nebudete schopni ji nabít, protože vy i tyč jste vodiče. Tření vytvoří nerovnováhu náboje na tyči, ale přebytečný náboj je okamžitě odveden z tyče vašim tělem do podlahy (která je spojena se zemským povrchem) a na tyči žádný přebytečný náboj nezůstane.

Uzemnit předmět znamená vytvořit vodivou cestu mezi ním a zemským povrchem. *Vybít* předmět znamená jej zneutralizovat, tj. vyrovnat jakoukoli cestou množství kladného a záporného náboje, který na něm je. (Obr. 22.4 ukazuje poněkud bizarní způsob vybíjení.) Když tyč držíme nikoli přímo v ruce, ale za držadlo z izolátoru, přerušíme vodivou cestu k zemi a tyč pak můžeme třením nabít.

Vlastnosti vodičů a nevodičů jsou podmíněny strukturou a elektrickou podstatou *atomů*. Atomy se skládají z kladně nabitých *protonů*, záporně nabitých *elektronů* a elektricky neutrálních *neutronů*. Protony a neutrony jsou těsně vázány v *jádře* atomů; prozatím nám bude stačit představa, že elektrony obíhají na jistých dráhách (orbitách) kolem jádra.

* Elektrický náboj je vždy vázán na látkovou částici, často však kvůli stručnosti hovoříme jen o nábojích, o působení mezi náboji atp.



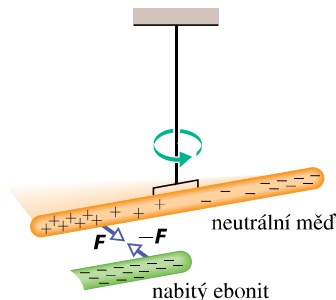
Obr. 22.4 Toto není akrobatický kousek, ale seriózní experiment, provedený v roce 1774 jako důkaz, že lidské tělo vede elektrický proud. Historický lept ukazuje nevodivými provazy přivázaného člověka, který je nabitý dotykem nabitě tyče (tyč se pravděpodobně dotýkala přímo těla, nikoli kalhot). Když člověk přiblížil obličej, levou ruku nebo tyč s vodivou koulí v pravé ruce ke kovovým deskám, elektrické jiskry přeskakující vzduchem ho vybily.

Náboje elektronu a protonu mají stejnou velikost, ale opačné znaménko, proto elektricky neutrální atom musí obsahovat stejný počet elektronů a protonů. Elektrony se drží poblíž jádra, protože mají elektrický náboj opačného znaménka než protony v jádře a jsou tedy k jádru přitahovány.

Když se seskupí atomy vodiče (např. mědi), aby vytvořily tuhé těleso, pak některé z jejich vnějších (tedy nejméně přitahovaných) elektronů už nejsou vázány k jednotlivým atomům, uvolní se od nich a pohybují se víceméně volně uvnitř celého tělesa, zanechávajíce na místě kladně nabitě zbytky atomů — *kladné ionty*. Tyto pohyblivé elektrony se nazývají *vodivostní*. V kovech je jich velmi mnoho, zatímco v nevodících je vodivostních elektronů velmi málo.

Pokus na obr. 22.5 demonstruje pohyblivost náboje ve vodiči. Záporně nabitá ebonitová tyč bude přitahovat libovolný konec izolované neutrální měděné tyče. Vodivostní elektrony v bližším konci měděné tyče jsou odpuzovány záporným nábojem ebonitové tyče. Pohybují se ke vzdálenějšímu konci měděné tyče a způsobují tak v jejím bližším konci nedostatek elektronů a tím převažující kladný náboj. Tento kladný náboj je přitahován k zápornému náboji ebonitové tyče. Ačkoli měděná tyč jako celek zůstává neutrální, říkáme, že má *indukovaný náboj*; část jejích kladných a záporných nábojů se navzájem oddělila v důsledku přiblížení jiného náboje. Jakmile se tyto náboje od sebe oddálí, budou i od okolních předmětů různě vzdáleny a budou na ně proto působit různě velkými silami; tento rozdíl již můžeme zjistit.

Podobně, přiblížíme-li kladně nabitou skleněnou tyč k jednomu konci neutrální měděné tyče, vodivostní elek-



Obr. 22.5 Neutrální měděná tyč je elektricky izolována od okolí zavěšením na nevodivé vlákno. Každý z obou konců tyče může být přitahován nabitým ebonitem. Vodivostní elektrony z blízké části měděné tyče jsou záporným nábojem ebonitu odpuzovány k jejímu vzdálenějšímu konci a tím v uprázdňené části převáží kladný náboj jader. Záporný náboj ebonitu pak přitahuje kladný náboj na bližším konci měděné tyče a odpuzuje záporný náboj na vzdálenějším; proto se měděná tyč přitáhne k ebonitu.

trony v měděné tyči jsou k tomuto konci přitahovány. Tento konec se nabije záporně a opačný konec kladně, tj. v měděné tyči se opět vytvoří indukovaný náboj. Ačkoli měděná tyč zůstává jako celek neutrální, přitahuje se k nabitě skleněné tyči.

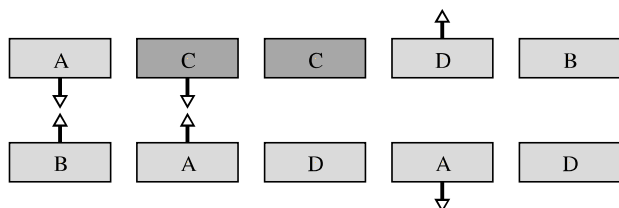
Poznamenejme, že v kovech se mohou pohybovat pouze vodivostní elektrony*; kladné ionty tvořící mřížku kovu zůstávají na místě. Předměty se tedy nabíjejí kladně pouze díky *odvedení části záporných nábojů*.

Polovodiče (např. křemík a germanium) jsou látky, které mají vlastnosti mezi vodiči a izolátory. Revoluce mikroelektroniky, která tolik změnila naše životy, byla možná jen díky přístrojům zkonstruovaným z polovodičových materiálů. V kap. 42 se budeme polovodičům věnovat podrobněji.

Běžné materiály (i ty nejlepší vodiče jako stříbro nebo měď) vždy brání toku náboje, který jimi prochází; mají vždy nenulový odpor. Existují však **supravodiče** nazývané tak proto, že nekladou pohybu elektrického náboje vůbec *žádný* odpor. Pokud vytvoříme v supravodivém prstenci proud, bude jím procházet beze změny stále, aniž by jej bylo potřeba udržovat baterií nebo jiným zdrojem energie.

* V nekovových vodičích (jako jsou roztoky a taveniny solí, ionizované plyny, plazma) se pohybují celé atomy či molekuly, obohacené o elektrony či ochuzené o ně, tedy fakticky se pohybují částice nabitě kladně i záporně.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje pět dvojic desek: A, B, D jsou nabité ebonitové desky a C je elektricky neutrální měděná deska. Elektrostatické síly působící mezi nimi jsou naznačeny pro tři dvojice. Určete, zda se desky ve zbývajících dvojicích budou přitahovat, nebo odpuzovat.

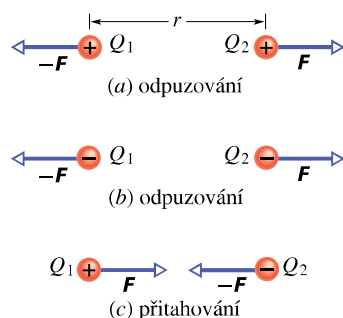


22.4 COULOMBŮV ZÁKON

Uvažujme dvě nabitá tělíska zanedbatelných rozměrů — dvě nabitá částice (nazývané **bodové náboje**). Nechť jsou jejich náboje Q_1 a Q_2 a jejich vzdálenost r . **Elektrostatická síla** působící mezi nimi, přitažlivá nebo odpuzivá, má velikost

$$F = k \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad (\text{Coulombův zákon}), \quad (22.1)$$

kde k je konstanta. Každá částice působí silou této velikosti na druhou částici; tyto dvě síly jsou silami akce a reakce. Jestliže se částice navzájem *odpuzují*, směřuje síla působící na každou částici směrem *od té druhé* (obr. 22.6a, b). Jestliže se navzájem *přitahují*, působí na každou částici síla směřující *ke druhé* částici (obr. 22.6c).



Obr. 22.6 Dvě nabitá částice ve vzdálenosti r se navzájem odpuzují, jestliže jejich náboje jsou (a) oba kladné nebo (b) oba záporné. (c) Přitahují se, mají-li náboje opačného znaménka. V každém z těchto případů je síla působící na jednu částici stejně velká jako síla působící na druhou částici, ale směřuje opačným směrem.

Rov. (22.1) se nazývá **Coulombův zákon** podle francouzského fyzika Charlese Augustina Coulomba, který jej v roce 1785 formuloval na základě svých měření. Všimněte si, že má stejný tvar jako Newtonův gravitační zákon (14.1) pro přitažlivou sílu mezi dvěma částicemi s hmotnostmi m_1 a m_2 , jejichž vzdálenost je r :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (22.2)$$

kde G je gravitační konstanta. Konstantu k v rov. (22.1) bychom mohli v analogii s gravitační konstantou G v rovnici (22.2) nazvat „elektrostatická konstanta“. Obě rovnice vyjadřují „zákon převrácených čtverců“, v němž síla klesá se čtvercem vzdálenosti mezi interagujícími částicemi. Oba zákony se liší tím, že gravitační síly jsou vždy přitažlivé, zatímco elektrostatické síly mohou být jak přitažlivé, tak odpuzivé podle toho, jaká jsou znaménka obou nábojů. Existuje totiž jen jeden druh hmotnosti (žádný známý objekt nemá zápornou hmotnost), ale jsou dva druhy náboje (proto jsou v rov. (22.1) potřebné absolutní hodnoty, zatímco v rov. (22.2) nikoli).

Coulombův zákon byl doposud potvrzen všemi pokusy, a to s vynikající přesností. Platí dokonce i uvnitř atomu: popisuje správně sílu mezi kladně nabitým jádrem a každým ze záporně nabitých elektronů, ačkoli klasická Newtonova mechanika v této oblasti selhává a musí být nahrazena kvantovou fyzikou. Tento jednoduchý zákon také správně popisuje síly, kterými se navzájem vážou atomy při vytváření molekul, a rovněž síly, kterými jsou vzájemně vázány atomy a molekuly v pevných látkách a kapalinách.

Elektrický náboj je jednou ze základních fyzikálních veličin. Z praktických důvodů (vzhledem k možnostem měření) však jednotka náboje v soustavě SI není jednotkou základní, ale odvozenou, a to z jednotky elektrického proudu — ampéru (A). Jednotkou náboje v soustavě SI je **coulomb** (C): 1 coulomb je množství náboje, které projde průřezem vodiče za 1 sekundu, protéká-li jím proud 1 ampéru. V čl. 30.2 popíšeme, jak je ampér definován experimentálně. Obecně můžeme psát

$$dQ = I dt, \quad (22.3)$$

kde dQ (v coulombech) je náboj přenesený proudem I (v ampérech) za časový interval dt (v sekundách).

Coulombův zákon zapisujeme v SI ve tvaru

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad (\text{Coulombův zákon}). \quad (22.4)$$

Konstanta v rov. (22.1) má hodnotu

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \doteq 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}. \quad (22.5)$$

Veličina ε_0 , nazývaná **permitivita vakua** nebo též **elektrická konstanta**, vystupuje někdy v rovnicích samostatně. Její hodnota je

$$\varepsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (22.6)$$

(Jak uvidíme v čl. 34.2 v rov. (34.3), je číselná hodnota $\{\varepsilon_0\}$ spojena s číselnou hodnotou rychlosti $\{c\}$ světla ve vakuu vztahem $\{\varepsilon_0\} = 1/(4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \{c\}^2)$.)

Další paralelou mezi gravitační a elektrostatickou silou je platnost **principu superpozice** (čl. 14.3). Máme-li n nabitých částic, je síla působící na libovolnou z nich (označme ji částice 1) dána vektorovým součtem

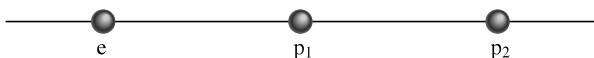
$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{14} + \dots + \mathbf{F}_{1n}, \quad (22.7)$$

kde např. \mathbf{F}_{14} je síla působící na částici 1 v důsledku existence částice 4. Stejný vztah platí pro gravitační sílu (čl. 14.3).

Rovněž oba slupkové teoremy, které nám byly tak užitečné při studiu gravitace, mají svou analogii v elektrostatice (a zdůvodníme je v čl. 24.9):

1. Kulová slupka nabitá rovnoměrně rozloženým nábojem přitahuje nebo odpuzuje nabitě částice stejně, jako kdyby veškerý náboj slupky byl soustředěn v jejím středu.
2. Kulová slupka nabitá rovnoměrně rozloženým nábojem nepůsobí žádnou elektrostatickou silou na nabitě částice umístěné uvnitř (v dutině) slupky.

KONTROLA 2: Obrázek zobrazuje dva protony (p_1, p_2) a jeden elektron (e) ležící na přímce. Jaký je směr (a) elektrostatické síly, kterou působí e na p_1 , (b) elektrostatické síly, kterou působí p_2 na p_1 , (c) výsledné elektrostatické síly, která působí na p_1 ?



PŘÍKLAD 22.1

Na obr. 22.7a jsou dvě částice v klidu: první s nábojem $Q_1 = 8Q$ ($Q > 0$) leží v počátku osy x a druhá s nábojem $Q_2 = -2Q$ ve vzdálenosti $x = d$. Do kterého bodu musíme umístit proton (jinam než do nekonečna) tak, aby byl v rovnováze (tj., aby výslednice sil, které na něj působí, byla nulová)? Je tato rovnováha stabilní, nebo nestabilní?

ŘEŠENÍ: Je-li \mathbf{F}_1 síla, kterou na proton působí náboj Q_1 , a \mathbf{F}_2 síla, kterou působí na proton náboj Q_2 , pak v hledaném bodě musí platit $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, tj.

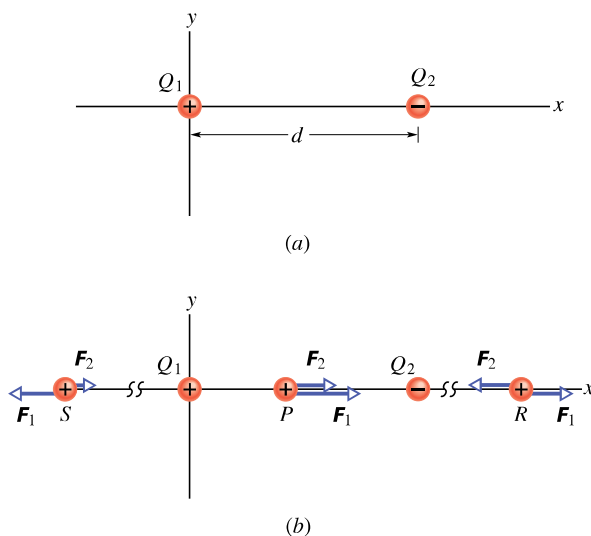
$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2. \quad (22.8)$$

Síly působící na proton v hledaném bodě musí mít tedy stejnou velikost,

$$F_1 = F_2, \quad (22.9)$$

stejný směr a opačnou orientaci.

Proton má kladný náboj, má tedy stejné znaménko jako Q_1 , a síla \mathbf{F}_1 působící na proton musí tedy směřovat od náboje Q_1 . Proton a částice s nábojem Q_2 mají opačná znaménka, takže síla \mathbf{F}_2 působící na proton směřuje k náboji Q_2 . Síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 mohou mít opačné směry jen tehdy, leží-li proton na ose x .



Obr. 22.7 Příklad 22.1. (a) Dvě částice s náboji Q_1 a Q_2 jsou v klidu na ose x ve vzdálenosti d . (b) Tři možné polohy S, P, R protonu. V každém bodě působí na proton elektrostatická síla \mathbf{F}_1 buzená nábojem Q_1 a elektrostatická síla \mathbf{F}_2 buzená nábojem Q_2 .

Je-li proton na ose x v libovolném bodě mezi Q_1 a Q_2 (např. v bodě P na obr. 22.7b), pak mají síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 směr stejný a nikoli opačný, jak požadujeme. Je-li proton v libovolném bodě na ose x vlevo od Q_1 (např. v bodě S na obr. 22.7b), pak síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 mají opačné směry. Z rov. (22.4) ovšem plyne, že síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 nemohou mít stejnou velikost: F_1 je větší než F_2 , protože F_1 vzniká působením bližšího náboje (menší r) větší velikosti ($8Q$ proti $2Q$).

Je-li konečně proton v libovolném bodě na ose x vpravo od náboje Q_2 (např. v bodě R), pak $x > d$ a síly \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 mají opět opačný směr. Protože je nyní větší náboj (Q_1) dále od protonu než náboj menší, existuje bod, ve kterém si velikosti sil F_1 a F_2 jsou rovny. Nechť x je jeho souřadnice a Q_p náboj protonu. Dosazením z rov. (22.4) do rov. (22.9) dostaneme

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{8Q Q_p}{x^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Q Q_p}{(x-d)^2}. \quad (22.10)$$

(Všimněte si, že v rov. (22.10) vystupuje jen velikost nábojů.) Úpravou rov. (22.10) získáme

$$\frac{(x-d)^2}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Odmocněním obou stran získáme

$$\frac{x-d}{x} = \pm \frac{1}{2}$$

a odtud (protože $x > d$)

$$x = 2d. \quad (\text{Odpověď})$$

Rovnováha v bodě $x = 2d$ je nestabilní. (Lze dokonce dokázat tzv. *Earnshawovu větu*: Žádná elektrostatická soustava nábojů se neudrží ve *stabilní* rovnováze pouze elektrickými silami.) Jestliže je proton vychýlen doleva od bodu R , pak velikosti obou sil F_1 i F_2 narůstají, ale F_2 narůstá rychleji (protože Q_2 je blíže než Q_1) a výsledná síla bude posunovat proton dále doleva. Je-li proton vychýlen doprava, velikosti obou sil F_1 a F_2 klesají, ale F_2 klesá více, takže výsledná síla posunuje proton dále doprava. Ve stabilní rovnováze se proton při každém malém vychýlení vrací zpět do rovnovážné polohy.

PŘÍKLAD 22.2

Obr. 22.8a představuje uspořádání šesti nabitých částic, kde $a = 2,0 \text{ cm}$ a úhel $\theta = 30^\circ$. Všechny šest částic má náboj stejné velikosti $Q = 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$; znaménka nábojů jsou vyznačena. Jaká je výsledná elektrostatická síla \mathbf{F}_1 , kterou na náboj Q_1 působí ostatní náboje?

ŘEŠENÍ: Z rov. (22.7) víme, že \mathbf{F}_1 je vektorovým součtem sil \mathbf{F}_{12} , \mathbf{F}_{13} , \mathbf{F}_{14} , \mathbf{F}_{15} a \mathbf{F}_{16} , což jsou elektrostatické síly, kterými na Q_1 působí ostatní náboje. Protože Q_2 a Q_4 mají stejnou velikost a oba jsou ve vzdálenosti $r = 2a$ od náboje Q_1 , dostáváme z rov. (22.4)

$$F_{12} = F_{14} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{(2a)^2}. \quad (22.11)$$

A obdobně, protože Q_3 , Q_5 a Q_6 mají stejnou velikost a jsou stejně vzdáleny ($r = a$) od náboje Q_1 , dostáváme

$$F_{13} = F_{15} = F_{16} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_3|}{a^2}. \quad (22.12)$$

Na obr. 22.8b jsou znázorněny síly, které působí na náboj Q_1 (sílový diagram podle kap. 5). Z něho a z rovnice (22.11) je vidět, že síly \mathbf{F}_{12} a \mathbf{F}_{14} mají stejnou velikost, ale opačný směr, takže se navzájem vruší. Z obr. 22.8b a z rov. (22.12) dále plyne, že y -ové složky sil \mathbf{F}_{13} a \mathbf{F}_{15} se také ruší a že jejich x -ové složky mají stejnou velikost a obě jsou záporné. Z obr. 22.8b také plyne, že síla \mathbf{F}_{16} má směr osy x ; síla \mathbf{F}_1 musí tedy být rovnoběžná s osou x ; její velikost je rovna rozdílu mezi velikostí F_{16} a dvojnásobkem velikosti x -ové

složky síly \mathbf{F}_{13} :

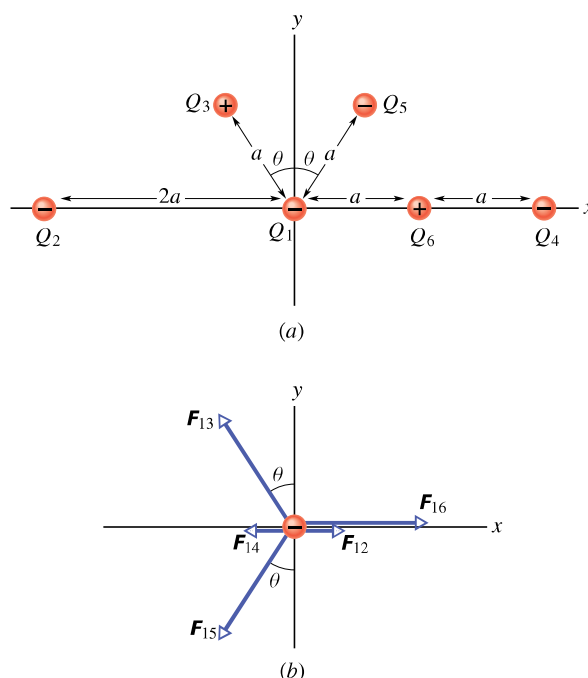
$$\begin{aligned} F_1 &= F_{16} - 2F_{13} \sin \theta = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_6|}{a^2} - \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_3|}{a^2} \sin \theta. \end{aligned}$$

Dosadíme $Q_3 = Q_6$ a $\theta = 30^\circ$:

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_6|}{a^2} - \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_6|}{a^2} \sin 30^\circ = 0.$$

(Odpověď)

Všimněte si, že přítomnost Q_6 na spojnici mezi náboji Q_1 a Q_4 neovlivní elektrostatickou sílu, kterou působí náboj Q_4 na Q_1 .



Obr. 22.8 Příklad 22.2. (a) Uspořádání šesti nabitých částic. (b) Elektrostatické síly, kterými působí ostatních pět nábojů na Q_1 .

RADY A NÁMĚTY

Bod 22.1: Symetrie

V př. 22.2 jsme využili symetrie ke zjednodušení výpočtu potřebných k řešení. Protože Q_2 a Q_4 jsou umístěny symetricky vzhledem ke Q_1 a síly \mathbf{F}_{12} a \mathbf{F}_{14} se tedy ruší, nebylo třeba tyto síly počítat. Protože y -ové složky \mathbf{F}_{13} a \mathbf{F}_{15} se ruší a jejich x -ové složky jsou stejné a sčítají se, ušetřili jsme si další námahu.

Bod 22.2: Zakreslení vektorů elektrostatických sil

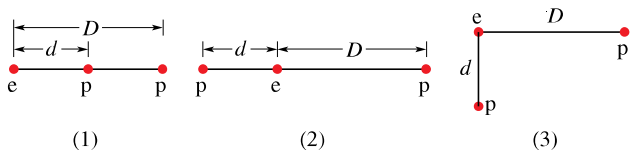
Je-li zadáno rozložení nabitých částic (obr. 22.8a) a naším úkolem je najít výslednou elektrostatickou sílu působící na

jednu z nich, sestrojíme obvykle silový diagram zobrazující pouze uvažovanou částici a síly, které na ni působí (obr. 22.8b). Pokud místo toho zakreslujeme síly přímo do zadaného diagramu zobrazujícího všechny částice, zakreslujeme je vždy s počátečním nebo koncovým bodem v místě uvažované částice.

Bod 22.3: Symboly pro náboje

Pokud znaménko náboje není slovy specifikováno, symbol Q může znamenat jak náboj kladný, tak záporný. Naproti tomu označení $+Q$ (nebo např. také $+3Q$) vyjadřuje náboj kladný a označení $-Q$ (nebo např. také $-3Q$) náboj záporný.

KONTROLA 3: Obrázek ukazuje tři různá uspořádání jednoho elektronu e a dvou protonů p . (a) Seřadte uspořádání sestupně podle velikosti výsledné elektrostatické síly, kterou na elektron působí oba protony. (b) Je v případě (3) úhel mezi výslednou silou působící na elektron a úsečkou d menší, nebo větší než 45° ?



Koule A získává záporný náboj, je stále méně kladně nabitá. Protože jsou koule stejné, musí nakonec získat stejný náboj. Přenos náboje proto skončí, když nadbytečný náboj na kouli B vzroste na $+Q/2$ a nadbytečný náboj na kouli A klesne na $+Q/2$ (obr. 22.9c).

Můžeme předpokládat, že po odstranění drátu nenaruší náboj na jedné kouli rovnoměrnost rozložení náboje na druhé kouli, protože koule jsou malé vzhledem ke své vzájemné vzdálenosti. Můžeme tedy použít první slupkový teorém. Z rov. (22.4) s $Q_1 = Q_2 = Q/2$ a $r = a$ plyne pro velikost elektrostatické síly mezi koulemi

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{a}\right)^2. \quad (\text{Odpověď})$$

Koule se nyní navzájem odpuzují, protože jsou obě kladně nabitě.

(b) Předpokládejme nyní, že je koule A na okamžik uzemněna, a pak je uzemnění přerušeno. Jaká je nyní elektrostatická síla mezi koulemi?

ŘEŠENÍ: Uzemnění dovolí elektronům s celkovým nábojem $-Q/2$ přesunout se (ze země) na kouli A (obr. 22.9d) a neutralizovat ji (obr. 22.9e). Není-li na kouli A žádný volný náboj, pak mezi koulemi nepůsobí žádná elektrostatická síla (tak jako na počátku na obr. 22.9a).

PŘÍKLAD 22.3

Na obr. 22.9a jsou dvě stejné osamocené elektricky izolované vodivé koule A, B. Vzdálenost a jejich středů je velká vzhledem k poloměrum koulí. Koule A má kladný náboj $+Q$, koule B je elektricky neutrální. Na počátku nepůsobí mezi koulemi žádná elektrostatická síla.

(a) Předpokládejme, že koule jsou na okamžik spojeny vodivým drátem. Drát je dostatečně tenký, aby bylo možno zanedbat jeho výsledný náboj. Jaká je elektrostatická síla působící mezi koulemi, je-li drát odstraněn?

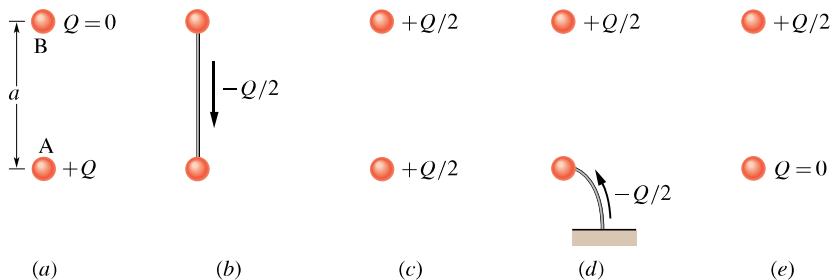
ŘEŠENÍ: Když jsou koule spojeny drátem, jsou vodivostní elektrony z koule B přitahovány kladným nábojem koule A (obr. 22.9b). Koule B ztrácí záporný náboj a nabíjí se kladně.

22.5 KVANTOVÁNÍ NÁBOJE

V dobách Benjamina Franklina byl elektrický náboj považován za spojitou tekutinu („fluidum“, podobně jako teplo, světlo apod.); tato myšlenka byla v mnoha případech užitečná. Dnes však již víme, že i samotné tekutiny (jako vzduch, voda) nejsou spojitě, ale jsou tvořeny atomy a molekulami; hmota je rozložena diskrétně. Experimenty ukazují, že ani „elektrická tekutina“ není spojitá, ale je tvořena násobky jistého elementárního náboje. Libovolný kladný nebo záporný náboj Q , který můžeme naměřit, může tedy mít hodnotu jenom

$$Q = ne, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (22.13)$$

Obr. 22.9 Příklad 22.3. Dvě malé vodivé koule A a B. (a) Na počátku je koule A nabitá kladně. (b) Vodivým spojením je mezi koulemi přenesen záporný náboj. (c) Obě koule jsou nyní nabitě kladně. (d) Uzemňujícím vodičem je na kouli A přenesen záporný náboj. (e) Koule A je nyní neutrální.



kde e je **elementární náboj**, který má hodnotu

$$e \doteq 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad (22.14)$$

Elementární náboj e je jednou z důležitých fyzikálních konstant. Elektron a proton mají náboj o velikosti e (tab. 22.1). (Kvarky — částice tvořící neutrony a protony — mají náboje $\pm e/3$ nebo $\pm 2e/3$, ale nemohou být detegovány samostatně. Proto jejich náboje nepovažujeme za elementární.)

Tabulka 22.1 Náboje tří částic

ČÁSTICE	ZNAČKA	NÁBOJ
elektron	e^- (nebo jen e)	$-e$
proton	p	$+e$
neutron	n	0

Často se můžete setkat s větami jako: „náboj na kouli“, „množství přeneseného náboje“, „náboj nesený elektrodem“, z nichž by se zdálo, že náboj je nějaký objekt, látka. (Taková tvrzení se objevila i v této kapitole.) Elektrický náboj však neexistuje sám o sobě, ale je vždy vázán na hmotné částice. Je to fyzikální veličina, podobně jako např. hmotnost nebo spin.

Pokud nějaká fyzikální veličina nemůže nabývat libovolné hodnoty, ale pouze hodnot diskrétních (nespojitéch), říkáme, že je kvantována. Už víme, že hmotnost, energie, moment hybnosti jsou kvantovány; elektrický náboj je další takovou fyzikální veličinou. Můžeme například najít částici, která nemá vůbec žádný náboj, nebo má náboj $+10e$, nebo $-6e$, ale nenajdeme částici s nábojem, řekněme, $3,57e$.

Kvantem náboje je elementární náboj e ; je velmi malý. Pro ilustraci: svítí-li 100 W žárovka, vstupuje do ní každou sekundu zhruba 10^{19} elementárních nábojů a stejné množství ji opouští. „Zrnitost“ elektřiny se při tak velkém počtu neprojevuje, stejně jako nepocítíme rukou ve vodě jednotlivé molekuly.

„Zrnitosti“ elektřiny můžeme také přičíst modré záblesky (jev triboluminiscence), které emituje kostka cukru z úvodu kapitoly, je-li drcena. Když se rozlomí krystaly cukru, jedna část každého porušeného krystalu má přebytek elektronů, zatímco druhá část má přebytek kladných iontů. Téměř okamžitě elektrony a ionty přeskočí trhlinu v porušeném krystalu, a tak se obě strany neutralizují. Během přeskočení se elektrony a ionty srážejí s molekulami dusíku obsaženého ve vzduchu, který proudí do trhliny. V důsledku srážek emituje dusík ultrafialové záření, které je neviditelné, a velmi slabé modré světlo (z viditelné oblasti spektra), které vidíme jako slabé jiskření. Aromatický olej z některých bonbonů absorbuje ultrafialové světlo a emituje následně dostatek modrého světla, které osvětlí ústa nebo

čelisti kleští. Je-li však bonbon zvlhčen slinami, pokus se nezdaří, protože vodivé sliny neutralizují obě části porušeného krystalu ještě dříve, než by se mohly objevit jiskry.

KONTROLA 4: Koule A má na začátku pokusu náboj $-50e$ a koule B náboj $+20e$. Obě jsou vyrobeny z vodivého materiálu a stejně velké. Jaký bude výsledný náboj na kouli A poté, co se navzájem dotknou?

PŘÍKLAD 22.4

Elektricky neutrální měděná mince o hmotnosti $m = 3,11 \text{ g}$ obsahuje stejné množství kladného a záporného náboje.

(a) Jaká je velikost Q celkového kladného (nebo záporného) náboje obsaženého v minci?

ŘEŠENÍ: Neutrální atom má záporný náboj o velikosti Ze , představovaný jeho elektrony, a kladný náboj o stejné velikosti, představovaný protony v jádře; Z je atomové číslo uvažovaného prvku. Pro měď je $Z = 29$ (dodatek F), tj. atom mědi má 29 protonů, a je-li elektricky neutrální, také 29 elektronů.

Náboj velikosti Q , který hledáme, je roven NZe , kde N je počet atomů v minci. Určíme ho tak, že násobíme počet molů mědi v minci počtem atomů obsažených v jednom molu (Avogadrovou konstantou $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$). Počet molů mědi v minci je m/m_m , kde $m_m = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molární hmotnost mědi (dodatek F). Je tedy

$$N = N_A \frac{m}{m_m} = (6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \frac{(3,11 \text{ g})}{(63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1})} = 2,95 \cdot 10^{22}.$$

Velikost celkového kladného nebo záporného náboje v minci je pak

$$\begin{aligned} Q &= NZe = \\ &= (2,95 \cdot 10^{22})(29)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = \\ &= 137\,000 \text{ C.} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

To je obrovský náboj. Z kap. 25 vyplyne, že tento náboj by centimetrovou kuličku nabil na nepředstavitelné napětí 10^{17} V . Pro srovnání: Třete-li ebonitovou tyč kožesinou, můžete na tyč přemístit stěží náboj o velikosti 10^{-9} C .

(b) Předpokládejme, že kladný a záporný náboj v minci by mohly být soustředěny do dvou oddělených „balíčků“ vzdálených 100 m. Jak velká přitažlivá síla by působila na každý balíček?

ŘEŠENÍ: Z Coulombova zákona (22.4) plyne

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} = \\ &= (8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \frac{(1,37 \cdot 10^5 \text{ C})^2}{(100 \text{ m})^2} = \\ &= 1,69 \cdot 10^{16} \text{ N.} \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Na „balíčky“ by tedy působila síla odpovídající váze tělesa o hmotnosti skoro $2 \cdot 10^{12}$ tun. Dokonce i kdyby náboje byly ve vzdálenosti poloměru Země, přitažlivá síla by byla stále ještě obrovská; odpovídala by váze 426tunového závaží. Proto je také nemožné výrazně porušit elektrickou neutralitu. Pokud se pokusíme odstranit z tělesa větší část náboje jednoho znaménka, vzniká velká elektrostatická síla, která se ho snaží přitáhnout zpět.

PŘÍKLAD 22.5

Jádro atomu železa má poloměr asi $4,0 \cdot 10^{-15}$ m a obsahuje 26 protonů.

(a) Jak velká je odpudivá elektrostatická síla mezi dvěma protony, které jsou ve vzdálenosti $4,0 \cdot 10^{-15}$ m?

ŘEŠENÍ: Z rov. (22.4) a tab. 22.1 plyne

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(4,0 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = \\ &= 14 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Účinek této síly by byl zanedbatelný, pokud by působila třeba na meloun, ale je obrovský, pokud působí na proton. Tak velké síly by musely roztrhnout na kousky jádro každého prvku (kromě jádra atomu vodíku, které obsahuje jen jediný proton). To se ale nestane, dokonce ani v jádrech s velkým počtem protonů. Musí tedy existovat nějaká přitažlivá jaderná síla, která tak velkou odpudivou elektrostatickou sílu překoná.

(b) Jaká je velikost gravitační síly, kterou na sebe působí tyto dva protony?

ŘEŠENÍ: Hmotnost protonu je $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Vztah (22.2) pro gravitační sílu pak dává

$$\begin{aligned} F &= G \frac{m_p^2}{r^2} = \\ &= \frac{(6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2})(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(4,0 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = \\ &= 1,2 \cdot 10^{-35} \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Z tohoto výsledku je vidět, že (přitažlivá) gravitační síla je příliš slabá na to, aby mohla překonat odpudivé elektrostatické síly působící mezi protony v jádře. Protony jsou však navzájem vázány obrovskou přitažlivou silou způsobenou *silnou interakcí*. Ta se však výrazně projevuje jen tehdy, pokud jsou částice velmi blízko u sebe (jak je tomu v jádře atomu).

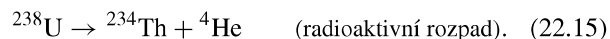
Ačkoli je gravitační síla mnohonásobně slabší než síla elektrostatická, je důležitější ve velkých měřítkách. Protože je vždy přitažlivá, může se velmi mnoho malých těles spojit do těles s obrovskými hmotnostmi, jako jsou planety a hvězdy, které vyvolávají obrovské gravitační síly. Na druhé straně,

elektrostatická síla je pro náboje stejného znaménka odpudivá, nemůže tedy spojit samotné kladné nebo samotné záporné náboje do velkých objektů, které by pak mohly působit navenek velkými elektrostatickými silami.

22.6 ZACHOVÁNÍ NÁBOJE

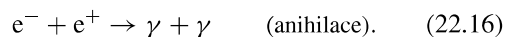
Třeme-li skleněnou tyč hedvábím, objeví se na tyči kladný náboj. Z měření plyne, že se na hedvábí objeví záporný náboj stejné velikosti. Třením se tedy náboj nevytváří, ale jen přerozděluje — převádí z jednoho tělesa na druhé a porušuje se tak původní elektrická neutralita obou těles. Tato hypotéza o **zachování náboje** byla poprvé vyslovena Benjaminem Franklinem a byla mnohokrát ověřena jak pro makroskopická nabitá tělesa, tak i pro atomy, jádra a elementární částice. Proto patří elektrický náboj k veličinám (energie, hybnost, momentu hybnost, hmotnost), pro něž platí v izolovaných systémech zákon zachování.

Radioaktivní rozpad jádra, při němž se jádro spontánně přemění na jádro jiného typu, nám dává mnoho příkladů zachování elektrického náboje. Například uran 238 (^{238}U) se může přeměnit na α -částici (tj. heliové jádro ^4He) a thorium (^{234}Th):



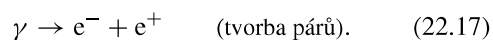
Radioaktivní *mateřské* jádro ^{238}U má atomové číslo $Z = 92$, tj. jádro obsahuje 92 protonů a má náboj $92e$. Emitovaná α -částice má $Z = 2$ a *deceřiné* jádro ^{234}Th má $Z = 90$. Náboj před rozpadem je $92e$, celkový náboj po rozpadu je $90e + 2e$. Náboj se zachovává.

Jiným příkladem zachování náboje je *anihilace* elektronu e^- (jehož náboj je $-e$) a jeho antičástice pozitronu e^+ (jehož náboj je $+e$), při níž vznikají dva fotony γ -záření.



Při použití zákona zachování náboje musíme náboje počítat algebraicky, tj. s ohledem na jejich znaménka. V anihilačním procesu rov. (22.16) je celkový náboj systému nulový před i po procesu. Náboj se opět zachovává.

Při *tvorbě elektron-pozitronových párů* (opačný proces k anihilaci) se náboj také zachovává. V tomto procesu se γ -kvantum přemění na elektron a pozitron:



Obr. 22.10 ukazuje takovou tvorbu párů v bublinkové komoře. Záření γ vstupuje do komory zleva v přímém směru

a v určitém místě se přemění na elektron a pozitron. Protože tyto nové částice jsou nabité a pohybují se, zanechávají za sebou stopy drobných bublinek. Stopy jsou zakřivené, protože v komoře je magnetické pole (kap. 29.5). Záření γ ,

které nemá náboj, nezanechává žádnou stopu. Můžeme tedy určit, kde přesně došlo k vytvoření páru: bylo to ve špičce vidlice tvaru V, kde začínají stopy elektronu a pozitronu.



Obr. 22.10 Fotografie stop, které zanechaly v bublinkové komoře elektron e^- a pozitron e^+ . Dvojice částic vznikla z γ -záření, které vniklo do komory zleva. Protože γ -záření nemá náboj, nezanechává žádnou stopu podél své dráhy (na rozdíl od elektronu a pozitronu). Stopy jsou tvořeny nepatrnými bublinkami vzniklými v přehřáté kapalině.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Elektrický náboj

Elektrická interakce těles (makroskopických i mikroskopických) je dána jejich *elektrickým nábojem*; ten může být kladný nebo záporný. Náboje stejného znaménka se vzájemně odpuzují, náboje opačného znaménka se přitahují. Těleso se stejným množstvím obou druhů náboje je elektricky neutrální. Těleso, ve kterém náboj není v rovnováze, je elektricky nabité.

Vodiče a nevodiče

Vodiče jsou látky, ve kterých se může volně pohybovat velmi mnoho nabitých částic (elektrony v kovech). V *nevodících (izolátorech)* se nabitě částice nemohou volně pohybovat. Pohybují-li se nabitě částice látkou převážně určitým směrem (probíhá-li usměrněný pohyb nosičů náboje), říkáme, že látkou *protéká elektrický proud*.

Coulomb a ampér

Jednotkou náboje v SI je coulomb (C). Je definován pomocí jednotky elektrického proudu, ampéru (A), jako náboj, který projde průřezem vodiče za dobu 1 sekundy, když vodičem prochází stálý proud o velikosti 1 ampéru.

Coulombův zákon

Coulombův zákon popisuje elektrostatickou sílu působící mezi dvěma bodovými elektrickými náboji Q_1 a Q_2 , které jsou v klidu

a jejichž vzdálenost je r :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{r^2} \quad (\text{Coulombův zákon}). \quad (22.4)$$

Zde $\epsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ je *permitivita vakua* neboli *elektrická konstanta*; $1/(4\pi\epsilon_0) \doteq 8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

Přitažlivá nebo odpuzivá síla mezi bodovými náboji v klidu působí ve spojnici obou nábojů. Jestliže uvažujeme více než dva náboje, platí rov. (22.4) pro každou dvojici nábojů. Výsledná síla působící na každý náboj je dána *principem superpozice* jako vektorový součet sil, kterými na náboj působí všechny ostatní přítomné náboje.

Dále platí dva slupkové teoremy elektrostatiky:

Slupka s rovnoměrně rozloženým nábojem přitahuje nebo odpuzuje nabitou částici vně slupky tak, jako by veškerý náboj slupky byl soustředěn v jejím středu.

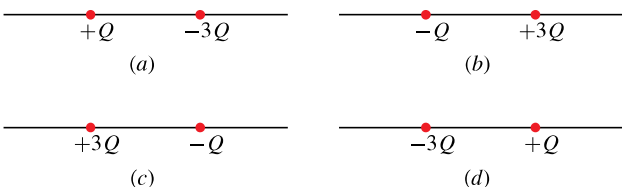
Slupka s rovnoměrně rozloženým nábojem nepůsobí žádnou elektrickou silou na nabitou částici, která se nachází uvnitř (v dutině) slupky.

Elementární náboj

Elektrický náboj je *kvantován*. Každý náboj může být vyjádřen součinem ne , kde n je kladné nebo záporné celé číslo a e je fyzikální konstanta nazývaná *elementární náboj* (je rovna přibližně $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Elektrický náboj se zachovává: celkový náboj libovolného izolovaného systému se nemění při libovolných procesech v něm probíhajících.

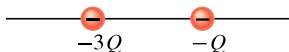
OTÁZKY

1. Platí Coulombův zákon pro všechny nabitě objekty?
2. Částice s nábojem Q_1 je umístěna vně vodivého tělesa s rovnoměrně rozloženým nábojem Q . Těleso je (1) velká plná koule, (2) velká kulová slupka, (3) malá plná koule, (4) malá kulová slupka. Vzdálenost mezi částicí a středem tělesa je ve všech případech stejná, Q_1 je dostatečně malé, aby prakticky neovlivnilo rovnoměrné rozložení náboje Q . Seřadte tělesa sestupně podle velikosti elektrostatické síly, kterou působí na částici.
3. Obr. 22.11 ukazuje čtyři uspořádání dvou nabitých částic. Ve kterém případě existuje vlevo od nich bod, do kterého můžeme umístit elektron tak, že bude v rovnováze?



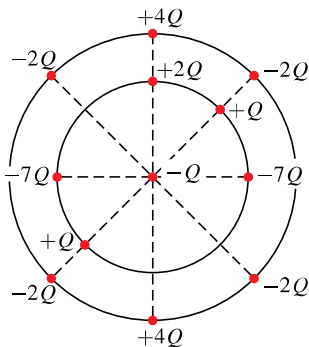
Obr. 22.11 Otázka 3

4. Na obrázku 22.12 jsou dvě nabitě částice, které se mohou volně pohybovat. Víme, že existuje bod, kam můžeme umístit třetí částici tak, aby všechny tři částice byly v rovnováze. (a) Leží tento bod vlevo od obou původních částic, vpravo od nich, nebo mezi nimi? (b) Má mít třetí částice kladný, nebo záporný náboj? (c) Je rovnováha stabilní, nebo nestabilní?



Obr. 22.12 Otázka 4

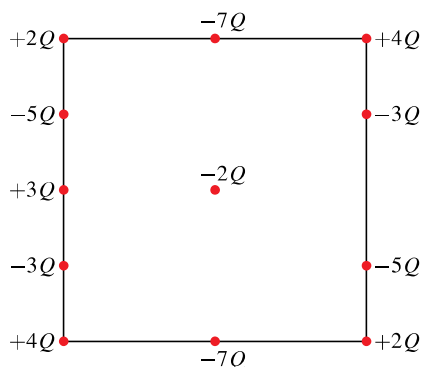
5. Na obr. ke kontrole 2 jsou na ose pevně umístěny dva protony a jeden elektron. Kam bychom měli na ose umístit čtvrtou nabitou částici tak, aby výsledná elektrostatická síla, kterou na ni působí první tři částice, byla nulová? Je to vlevo od prvních tří částic, vpravo od nich, mezi protony, nebo mezi elektronem a jemu bližším protonem?
6. Na obr. 22.13 je centrální částice s nábojem $-Q$ obklopená



Obr. 22.13 Otázka 6

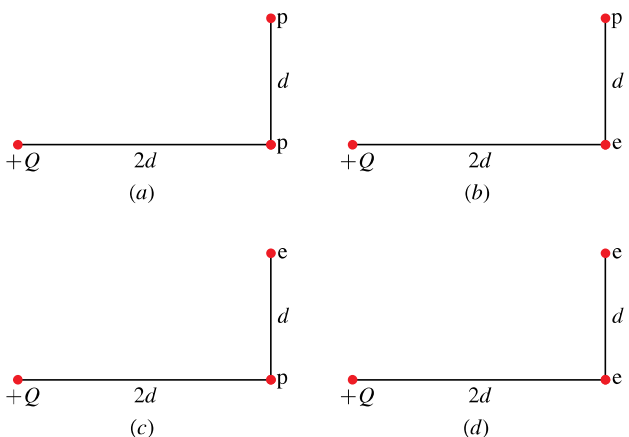
dvěma soustřednými kružnicemi s poloměry r a R , $R > r$. Na kružnicích jsou rozmístěny nabitě částice. Jakou velikost a směr má výsledná elektrostatická síla, kterou na centrální částici působí ostatní částice?

7. Na obr. 22.14 je centrální částice s nábojem $-2Q$ obklopena nabitými částicemi rozmístěnými po obvodu čtverce ve vzdálenostech d nebo $d/2$. Jakou velikost a směr má výsledná elektrostatická síla, kterou na centrální částici působí ostatní částice?



Obr. 22.14 Otázka 7

8. Na obr. 22.15 jsou čtyři uspořádání nabitých částic: protonu, elektronu a náboje $+Q$. Seřadte tato uspořádání sestupně podle velikosti výsledné elektrostatické síly působící na částici s nábojem $+Q$.

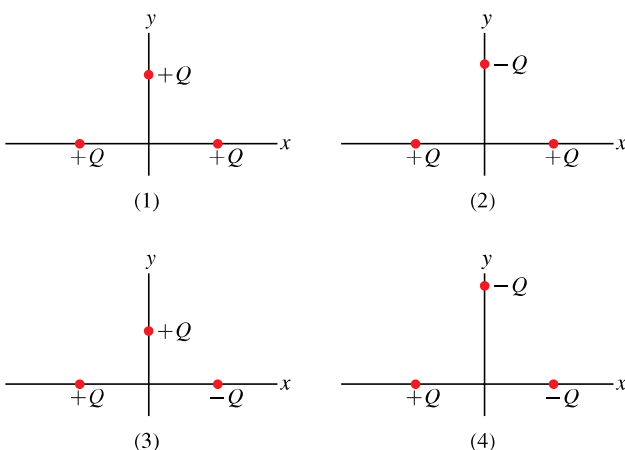


Obr. 22.15 Otázka 8

9. Na obr. 22.16 jsou čtyři uspořádání tří částic s náboji $+Q$ a $-Q$. Částice na ose x jsou stejně vzdáleny od osy y . Nejprve uvažujeme prostřední částici v případě (1); každá z ostatních dvou částic na ni působí elektrostatickou silou. (a) Jsou velikosti těchto sil stejné, nebo rozdílné? (b) Je velikost výsledné síly působící na prostřední částici stejně velká, větší, nebo menší než součet

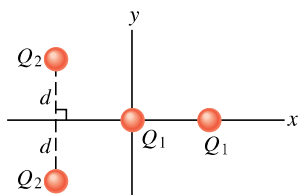
velikostí sil od obou částic? (c) Vyuší se x -ové složky obou sil? (d) Vyuší se y -ové složky obou sil? (e) Jaký směr má výsledná síla působící na prostřední částici?

Nyní uvažujme zbývající případy: Jaký je směr výsledné síly působící na prostřední částici (f) v případě (2), (g) v případě (3), (h) v případě (4)?



Obr. 22.16 Otázka 9

10. Na obr. 22.17 jsou dvě částice s nábojem Q_1 a jiné dvě částice s nábojem Q_2 . Částice v počátku se může volně pohybovat, ostatní částice jsou nepohyblivé. Určete, zda Q_2 je kladné, nebo záporné, má-li být výsledná síla působící na volnou částici nulová v případě, že Q_1 je (a) kladné, (b) záporné.



Obr. 22.17 Otázka 10

11. Čtyři stejné vodivé koule A, B, C, D mají náboje $-8,0Q$, $-6,0Q$, $-4,0Q$, $+8,0Q$. Které z nich je třeba vodivě spojit (tenkým vodičem), aby vznikly útvary s nábojem (a) $-2,0Q$, (b) $-2,5Q$? (c) Jakým spojením vzniknou dvě koule s nábojem $-3,0Q$?

12. Kladně nabitou kouli přiblížíme k izolovanému neutrálnímu vodiči. Vodič uzemníme. Určete, je-li nabit kladně, záporně, nebo je neutrální, jestliže (a) nejprve vzdálíme kouli a pak pře-

rušíme uzemnění, (b) nejprve přerušíme uzemnění a kouli pak vzdálíme?

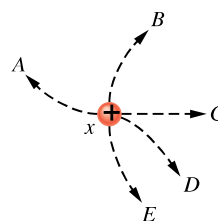
13. Vedle kladně nabitě skleněné tyče visí na nevodivém vlákně tělísko. (a) Tyč tělísko přitahuje. Znamená to nutně, že je tělísko záporně nabitě? (b) Tyč a tělísko se odpuzují. Je nutně tělísko nabitě kladně?

14. Máte k dispozici dvě stejné neutrální vodivé koule A, B, kterými můžete pohybovat po nevodivé podložce, dále tenký vodič a skleněnou tyč, kterou můžete třít hedvábím. Vodičem smíte spojit koule navzájem nebo spojit jednu kouli s podlahou. Tyčí se nesmíte dotknout žádné z koulí. Jak můžete koule nabít nábojem (a) stejné velikosti a stejného znaménka, (b) stejné velikosti a opačného znaménka?

15. V jednoduchém modelu atomu helia obíhají dva elektrony kolem jádra skládajícího se ze dvou protonů. Je velikost síly, kterou na jádro působí jeden z elektronů, větší, menší, nebo stejně velká vzhledem k velikosti síly, kterou působí jádro na tento elektron?

16. Záporně nabitá ebonitová tyč na obr. 22.5 způsobí, že se některé z vodivostních elektronů v měděné tyči pohybují k jejímu vzdálenějšímu konci. Proč proud vodivostních elektronů rychle ustane? V tyči je přece velké množství vodivostních elektronů, které se mohou ke vzdálenějšímu konci pohybovat.

17. Na obr. 22.18 jsou tři malé koule, které mají náboje o stejné velikosti a jsou v klidu na dokonale hladké ploše. Koule y a z jsou pevně umístěny ve stejné vzdálenosti od koule x. Po které z pěti naznačených trajektorií se bude pohybovat koule x, jestliže ji uvolníme z klidu?



Obr. 22.18 Otázka 17

18. Člověk, stojící na elektricky izolované plošině, se dotkne nabitěho, elektricky izolovaného vodiče. Bude tím vodič zcela vybit?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 22.4 Coulombův zákon

1C. Při zpětném úderu typického blesku protéká výbojovým kanálem proud $2,5 \cdot 10^4$ A po dobu $20 \mu\text{s}$. Jak velký náboj přitom proteče kanálem?

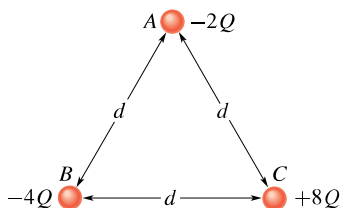
2C. Jaká elektrostatická síla působí mezi dvěma bodovými náboji o velikosti 1,00 C, jsou-li vzdáleny (a) 1,00 m, (b) 1,00 km?

3C. Bodový náboj $+3,00 \cdot 10^{-6}$ C je ve vzdálenosti 12,0 cm od druhého bodového náboje $-1,50 \cdot 10^{-6}$ C. Vypočítejte velikost síly působící na každý náboj.

4C. Jaká musí být vzdálenost mezi dvěma bodovými náboji $Q_1 = 26,0 \cdot 10^{-6}$ C a $Q_2 = -47,0 \cdot 10^{-6}$ C, aby elektrostatická síla, která mezi nimi působí, měla velikost 5,70 N?

5C. Dvě pohyblivé částice nabitě souhlasným nábojem stejné velikosti, jsou původně od sebe vzdálené $3,2 \cdot 10^{-3}$ m. Počáteční zrychlení první částice je $7,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, zrychlení druhé částice je $9,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Je-li hmotnost první částice $6,3 \cdot 10^{-7}$ kg, jaká je (a) hmotnost druhé částice, (b) velikost náboje každé z částic?

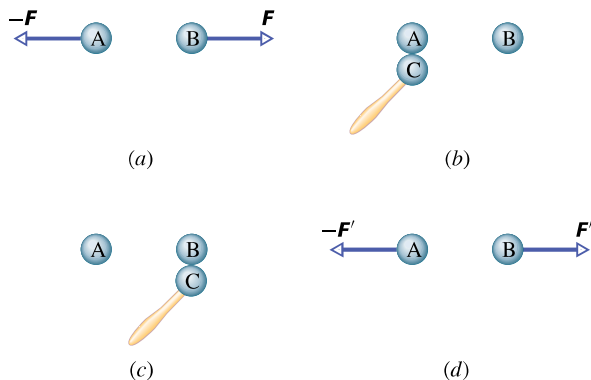
6C. Na obr. 22.19 leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka se stranou délky d tři stejné vodivé koule A, B, C, jejichž počáteční náboje jsou $-2Q$, $-4Q$, $+8Q$. (a) Jaká je velikost elektrostatické síly, která působí mezi koulemi A a C? Pak proběhnou následující procesy: A a B jsou spojeny tenkým vodičem a pak rozpojeny; B je uzemněna vodičem a pak je vodič odstraněn; B a C jsou spojeny vodičem a pak rozpojeny. Jaká bude nyní velikost elektrostatické síly (b) mezi koulemi A a C, (c) mezi koulemi B a C?



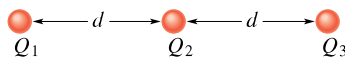
Obr. 22.19 Cvičení 6

7C. Dvě stejné vodivé koule (A) a (B) mají stejný náboj a jejich vzdálenost je mnohem větší než jejich průměr (obr. 22.20a). Elektrostatická síla, kterou působí koule (A) na kouli (B), je F . Uvažujme nyní třetí, stejnou a na počátku neutrální kouli (C) s nevodivým držadlem. Nejprve se s ní dotkne koule (A) (obr. 22.20b), potom koule (B) (obr. 22.20c) a pak ji odstraníme (obr. 22.20d). Pomocí původní síly F vyjádřete elektrostatickou sílu F' , která nyní působí na kouli (B).

8Ú. Na obr. 22.21 leží na téže přímce tři nabitě částice ve vzdálenostech d . Náboje Q_1 a Q_2 jsou pevné. Náboj Q_3 se může volně pohybovat, ale je v rovnováze (výslednice elektrostatických sil, které na něj působí, je nulová). Vyjádřete náboj Q_1 prostřednictvím náboje Q_2 .

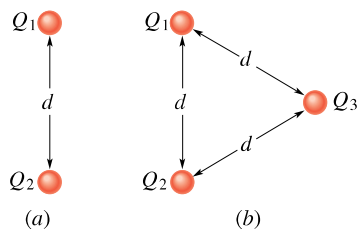


Obr. 22.20 Cvičení 7



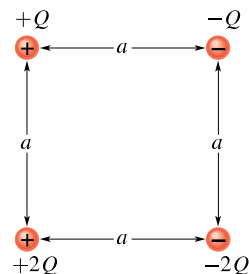
Obr. 22.21 Úloha 8

9Ú. Na obr. 22.22a jsou ve vzdálenosti d dva náboje Q_1 a Q_2 . (a) Jaká je velikost elektrostatické síly, která působí na Q_1 ? Předpokládejme, že $Q_1 = Q_2 = 20,0 \cdot 10^{-6}$ C a $d = 1,50$ m. (b) Přidáme třetí náboj $Q_3 = 20,0 \cdot 10^{-6}$ C podle obr. 22.22b. Jaká je nyní velikost elektrostatické síly, která působí na Q_1 ?



Obr. 22.22 Úloha 9

10Ú. Na obr. 22.23 určete, jaká je vodorovná a svislá složka výsledné elektrostatické síly, která působí na náboj v levém dolním rohu čtverce, je-li $Q = 1,0 \cdot 10^{-7}$ C a $a = 5,0$ cm?



Obr. 22.23 Úloha 10

11Ú. Náboje Q_1 a Q_2 leží na ose x v bodech $x = -a$ a $x = +a$. (a) Jaký musí být poměr Q_1/Q_2 , aby výsledná elektrostatická

síla, která působí na náboj $+Q$ umístěný v bodě $x = +a/2$, byla nulová? (b) Proveďte totéž pro náboj $+Q$, jestliže je umístěn v bodě $x = +3a/2$.

12Ú. Dvě malé kladně nabitě koule mají celkový náboj $5,0 \cdot 10^{-5}$ C. Jaký je náboj na každé z nich, odpuzují-li se elektrostatickou silou velikosti 1,0 N ve vzdálenosti 2,0 m?

13Ú. Dvě stejné vodivé koule, umístěné pevně ve vzdálenosti 50,0 cm, se přitahují elektrostatickou silou 0,108 N. Spojíme je vodičem. Po odstranění vodiče se koule odpuzují silou 0,0360 N. Jaké byly původní náboje na koulích?

14Ú. Dvě pevné částice s náboji $Q_1 = +1,0 \cdot 10^{-6}$ C a $Q_2 = -3,0 \cdot 10^{-6}$ C jsou ve vzdálenosti 10 cm. Jak daleko od každé z nich by měl být umístěn třetí náboj, aby výsledná elektrostatická síla, která na něj působí, byla nulová?

15Ú. Náboje a souřadnice dvou nabitých částic, pevně umístěných v rovině xy , jsou: $Q_1 = +3,0 \cdot 10^{-6}$ C, $x_1 = 3,5$ cm, $y_1 = 0,50$ cm; $Q_2 = -4,0 \cdot 10^{-6}$ C, $x_2 = -2,0$ cm, $y_2 = 1,5$ cm. (a) Určete velikost a směr elektrostatické síly působící na náboj Q_2 . (b) Kam umístíte třetí náboj $Q_3 = +4,0 \cdot 10^{-6}$ C, aby výsledná elektrostatická síla působící na Q_2 , byla nulová?

16Ú. Dva volně pohyblivé bodové náboje $+Q$ a $+4Q$ jsou ve vzdálenosti d . Třetí náboj je umístěn tak, že je systém v rovnováze. (a) Určete polohu, velikost a znaménko třetího náboje. (b) Ukažte, že rovnováha systému je nestabilní.

17Ú. (a) Jaký kladný náboj by musel být umístěn na Zemi i na Měsíci, aby se vykompenzovala jejich gravitační přitažlivost? Potřebujeme k řešení znát vzdálenost Země od Měsíce? Proč ano, nebo proč ne? (b) Kolik tisíc kilogramů vodíku by bylo potřeba rozštěpit na protony a elektrony pro vytvoření kladného náboje spočítaného v případě (a)?

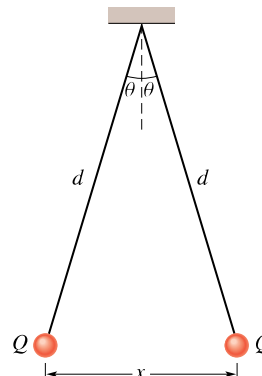
18Ú. Náboj Q je rozdělen na dvě části Q_1 a $Q - Q_1$, které jsou pak od sebe odděleny do určité vzdálenosti. Jaké musí být Q_1 vzhledem ke Q , aby elektrostatické odpuzování mezi náboji bylo maximální?

19Ú. V každém ze dvou protilehlých vrcholů čtverce je pevně umístěn náboj Q_1 , v každém z druhých dvou protilehlých vrcholů je umístěn náboj Q_2 . (a) Vyjádřete Q_1 prostřednictvím Q_2 v případě, že výsledná elektrostatická síla působící na každý náboj Q_1 je nulová. (b) Existuje taková hodnota Q_2 , pro kterou by výsledná elektrostatická síla působící na každý ze čtyř nábojů byla nulová? Vysvětlete.

20Ú. Na obr. 22.24 jsou dvě malé vodivé kuličky o stejné hmotnosti m a stejném náboji Q zavěšené na nevodivých závěsech o délce d . Předpokládejme, že úhel θ je tak malý, že přibližně platí $\tan \theta = \sin \theta$. (a) Ukažte, že v rovnováze je vzdálenost mezi kuličkami

$$x = \left(\frac{Q^2 d}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}.$$

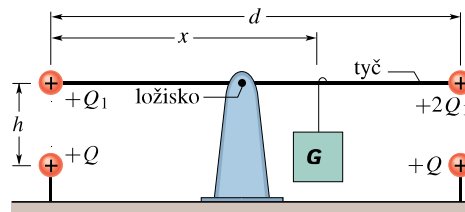
(b) Jaká je hodnota Q , je-li $d = 120$ cm, $m = 10$ g, $x = 5,0$ cm?



Obr. 22.24 Úloha 20

21Ú. Vysvětlete, co se stane s kuličkami z úlohy 20b, bude-li jedna z nich vybita. Najděte novou rovnovážnou vzdálenost x s užitím daných hodnot d a m a vypočítané hodnoty Q .

22Ú. Na obr. 22.25 je nevodivá tyč délky d zanedbatelné hmotnosti, otočná kolem svého středu. Na obou koncích tyče jsou připevněny malé vodivé koule zanedbatelných hmotností s kladnými náboji Q_1 a $2Q_2$. Tyč je vyvážena závažím G dle obrázku. Ve vzdálenosti h přímo pod každou z koulí je pevně umístěna koule s kladným nábojem Q . (a) Určete vzdálenost x , pro niž je tyč vodorovná a je v rovnováze. (b) Pro jakou hodnotu h bude tyč v rovnováze a nebude přitom vůbec zatěžovat čep, na němž je upevněna?



Obr. 22.25 Úloha 22

ODST. 22.5 Kvantování náboje

23C. Jaká je velikost elektrostatické síly mezi iontem sodíku Na^+ s nábojem $+e$ a sousedním iontem chloru Cl^- s nábojem $-e$ v krystalu soli, je-li jejich vzdálenost $2,82 \cdot 10^{-10}$ m?

24C. Neutron se skládá z jednoho kvarku „up“ s nábojem $+2e/3$ a dvou kvarků „down“, každý s nábojem $-e/3$. Jaká je velikost elektrostatické síly, kterou na sebe působí kvarky „down“, jsou-li v neutronu od sebe vzdáleny $2,6 \cdot 10^{-15}$ m?

25C. Jaký celkový náboj v coulombech by mělo 75,0 kg elektronů?

26C. Kolik megacoulombů kladného (resp. záporného) náboje je obsaženo v 1 molu neutrálního molekulárního vodíkového plynu (H_2)?

27C. Dva stejné ionty ve vzdálenosti $5,0 \cdot 10^{-10}$ m se odpuzují silou velikosti $3,7 \cdot 10^{-9}$ N. (a) Jaký je náboj každého iontu? (b) O kolikamocné ionty jde?

28C. (a) Kolik elektronů bychom museli odstranit z mince uvažované v př. 22.4, aby měla náboj $+1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$? (b) Jaké části elektronů obsažených v minci to odpovídá?

29C. Vzdálenost středů dvou malých kulových vodních kapek se stejným nábojem $-1,0 \cdot 10^{-16} \text{ C}$ je $1,0 \text{ cm}$. (a) Jaká je velikost elektrostatické síly působící mezi kapkami? (b) Kolik přebytečných elektronů způsobujících nerovnováhu jejího náboje je v každé kapce?

30C. Jak daleko musí být od sebe vzdáleny dva protony, aby se velikost elektrostatické síly působící mezi nimi rovnala váze protonu na povrchu Země?

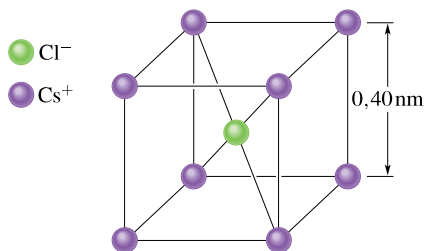
31C. Elektron je ve vakuu blízko povrchu Země. Kam je nutno umístit druhý elektron, aby elektrostatická síla vyrovnala tíhovou sílu působící na první elektron?

32Ú. Zemská atmosféra je neustále bombardována protony kosmického záření z vesmíru. Pokud by všechny protony prošly atmosférou, dopadalo by na každý čtverečný metr povrchu Země zhruba $1\,500$ protonů za sekundu. Jaký by byl odpovídající proud?

33Ú. Vlákem 100 W žárovky, připojené ke stejnosměrnému zdroji napětí 120 V , prochází stálý proud $0,83 \text{ A}$. Za jak dlouho projde vláknem 1 mol elektronů?

34Ú. Vypočítejte, kolik coulombů kladného náboje je obsaženo v 250 cm^3 (neutrální) vody (přibližně plná sklenice).

35Ú. V krystalové struktuře chloridu cesného CsCl tvoří ionty Cs^+ vrcholy krychle a iont Cl^- leží v jejím středu (obr. 22.26). Délka hrany krychle je $0,40 \text{ nm}$. Každému z iontů Cs^+ chybí jeden elektron (má tedy náboj $+e$), iont Cl^- má jeden elektron navíc (má tedy náboj $-e$). (a) Jaká je velikost výslednice elektrostatických sil, kterými na iont Cl^- působí osm iontů Cs^+ nacházejících se v rozích krychle? (b) Jestliže jeden z iontů Cs^+ chybí, říkáme, že krystal má defekt. Jaká je v tomto případě velikost výslednice elektrostatických sil, kterými na iont Cl^- působí sedm zbývajících iontů Cs^+ ?



Obr. 22.26 Úloha 35

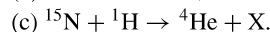
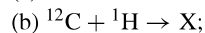
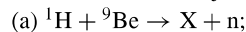
36Ú. Víme, že velikost záporného náboje elektronu a kladného náboje protonu je stejná. Předpokládejme však, že by se tyto hodnoty lišily o $0,000\,10\%$. Jakou silou by se pak odpuzovaly dvě měděné mince o hmotnosti $3,11 \text{ g}$ vzdálené $1,0 \text{ m}$? Jaký závěr můžete učinit? (Tip: Viz př. 22.4.)

37Ú. Dva studenti Jan s hmotností 90 kg a Marie s hmotností 45 kg jsou od sebe vzdáleni 30 m . Předpokládejte, že každý z nich má $0,01\%$ nerovnováhy v množství svého kladného a záporného náboje, Jan je nabit kladně a Marie záporně. Odhadněte zhruba přitažlivou elektrostatickou sílu působící mezi nimi. Studenty v provedené úvaze nahraďte stejně těžkými koulemi vody.

ODST. 22.6 Zachování náboje

38C. Při β -rozpadu se jedna částice mění na jinou, přičemž je emitován buď elektron, nebo pozitron. (a) Jaká částice je emitována, jestliže se z protonu stane β -rozpadem neutron? (b) Jaká částice je emitována, jestliže se neutron mění β -rozpadem na proton?

39C. Určete X v následujících jaderných reakcích (dodatek F):



40C. Při radioaktivním rozpadu ${}^{238}\text{U}$ (rov. (22.15)) je střed vznikající částice ${}^4\text{He}$ v určitém okamžiku ve vzdálenosti $9,0 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ od dceřiného jádra ${}^{234}\text{Th}$. (a) Jaká je v tomto okamžiku velikost elektrostatické síly, která působí na částici ${}^4\text{He}$? (b) Jaké je v tomto okamžiku zrychlení částice?

PRO POČÍTAČ

41Ú. V úloze 18 označme $Q_1 = \alpha Q$. (a) Napište výraz pro velikost F síly působící mezi náboji pomocí α , Q a vzdálenosti nábojů d . (b) Sestrojte graf závislosti F na α . Graficky nalezněte hodnotu α , která dává (c) maximální hodnotu F , (d) polovinu maximální hodnoty F .

42Ú. Dvě částice, každá s kladným nábojem Q , jsou pevně umístěny na ose x , jedna v bodě $x = 0$, druhá v bodě $x = d$. Částice s nábojem Q_1 má být umístěna na této ose v poloze $x = \alpha d$. (a) Zapište pomocí α výrazy pro výslednou elektrostatickou sílu F působící na třetí částici, která se nachází postupně v oblastech $x < 0$; $0 < x < d$; $d < x$. Výrazy by měly dát kladný výsledek, má-li F kladný směr osy x , a záporný výsledek, je-li F orientována v záporném směru osy x . (b) Sestrojte graf závislosti F na α v intervalu $-2 < \alpha < 3$.

23

Elektrické pole



Voda se ohřívá v mikrovlnné troubě tak snadno, že ji můžeme zahřát až na teplotu o 8 °C vyšší, než je normální teplota varu, aniž by začala vřít. Jestliže pak nasypeme do šálku vody kávový prášek nebo kostky ledu, nastane prudký var, jak je vidět na fotografii, a voda se rozstříkuje na všechny strany, takže nás může snadno opařit. Proč mikrovlny ohřívají vodu?

23.1 NÁBOJE A SÍLY: BLIŽŠÍ POHLED

Umístíme pevně v prostoru částici s kladným nábojem Q_1 a přibližme k ní druhou částici s kladným nábojem Q_2 . Z Coulombova zákona víme, že částice Q_1 působí na Q_2 odpudivou elektrostatickou silou, a pokud máme dostatek vstupních údajů, můžeme určit její velikost a směr. Zůstává však zásadní otázka: Jak „ví“ náboj Q_1 o existenci náboje Q_2 ? Pokud se náboje nedotýkají, jak může Q_1 působit silou na Q_2 ?

Tuto otázku o *působení na dálku* můžeme zodpovědět tak, že náboj Q_1 vytváří kolem sebe v prostoru **elektrické pole**. V každém bodě P prostoru lze pole popsat veličinou, která má velikost a směr. Její velikost závisí na velikosti Q_1 a na vzdálenosti mezi Q_1 a bodem P , ve kterém pole působí; její směr závisí na směru od Q_1 k P a na znaménku náboje Q_1 . Umístíme-li náboj Q_2 do bodu P , pak Q_1 interaguje s Q_2 prostřednictvím pole v bodě P . Velikostí a směrem tohoto pole je určena velikost a směr síly působící na Q_2 .

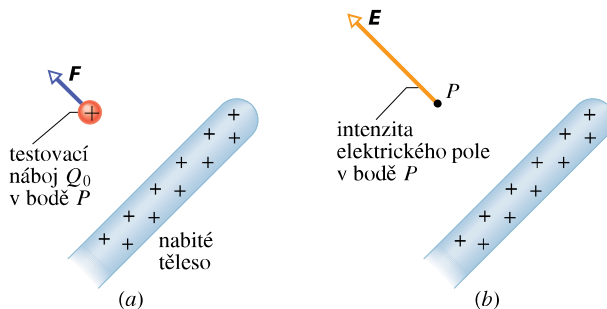
Další problém vzniká tehdy, když posuneme např. náboj Q_1 blíže k náboji Q_2 . Podle Coulombova zákona platí, že čím blíže je Q_1 ke Q_2 , tím větší musí být odpudivá síla, která na Q_2 působí. Tak tomu také je. Ale: změní se síla působící na Q_2 okamžitě? Neboli — změní se při změně polohy Q_1 okamžitě elektrické pole ve všech (i ve vzdálených) místech, např. tam, kde se nachází Q_2 ? Odpověď zní: nikoli. Informace o pohybu náboje Q_1 se šíří od Q_1 ve všech směrech jako elektromagnetická vlna rychlostí světla c . Změna elektrického pole v bodě, kde je náboj Q_2 , a tím také změna síly působící na Q_2 , se projeví, až když vlna dojde do tohoto bodu.

23.2 ELEKTRICKÉ POLE

S některými příklady pole jsme se již ve fyzice setkali. Vzduch v místnosti má v každém místě jistou teplotu. Umístíme-li teploměr kdekoli nás to zajímá, můžeme ji změřit. Říkáme, že teplotu T v místnosti lze popsat teplotním polem $T(\mathbf{r})$. Úplně stejně si můžeme představit tlakové pole $p(\mathbf{r})$ v atmosféře; udává nám, jaký tlak je v kterémkoli konkrétním bodě sledované oblasti. Toto byly dva příklady **skalárního pole**, protože jak teplota, tak i tlak jsou skalární veličiny. Z hlediska matematického popisu je tedy pole funkcí souřadnic (polohového vektoru \mathbf{r}) definovanou v oblasti, která nás zajímá. (Může samozřejmě záviset i na dalších proměnných, např. na čase t apod.)

Podobně zavádíme **vektorové pole**, jestliže uvažovaná veličina má vektorovou povahu. Proudění kapaliny jsme mohli popsat rychlostním polem $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, udávajícím okamžitou rychlost \mathbf{v} kapaliny v místě \mathbf{r} . Můžeme zavést silové

pole $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, udávající sílu \mathbf{F} , která by působila na zkoumanou částici, kdyby se nacházela v místě \mathbf{r} . A takto také popíšeme elektrické pole kolem nabitěho tělesa, např. v bodě P na obr. 23.1a: do bodu P umístíme *kladný* náboj Q_0 , nazývaný *testovací náboj*, a změříme elektrostatickou sílu \mathbf{F} , která na něj působí.



Obr. 23.1 (a) Kladný testovací náboj Q_0 umístěný do bodu P v blízkosti nabitěho tělesa. Na testovací náboj působí elektrostatická síla \mathbf{F} . (b) Intenzita \mathbf{E} elektrického pole v bodě P , které je buzeno nabitým tělesem.

Elektrické pole popíšeme vektorovou veličinou \mathbf{E} , kterou nazýváme **intenzita elektrického pole** nebo stručněji **elektrická intenzita**, která je definována vztahem

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_0} \quad (\text{intenzita elektrického pole}). \quad (23.1)$$

V bodě P má elektrická intenzita velikost $E = F/Q_0$ a její směr je dán směrem síly \mathbf{F} působící na *kladný* testovací náboj. Elektrickou intenzitu \mathbf{E} zobrazujeme vektorem umístěným v bodě P (obr. 23.1). Abychom určili elektrické pole v nějaké oblasti, musíme provést podobné měření ve všech jejích bodech. V soustavě SI je jednotkou elektrické intenzity newton na coulomb ($\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$); později pro ni odvodíme i jiná, pro praxi názornější vyjádření. V tab. 23.1 jsou uvedeny velikosti intenzity v některých konkrétních případech.

Zároveň se tu setkáváme s dalším, užším významem **fyzikálního pole**: zavedli jsme ho jako *prostředníka interakce* mezi nabitými částicemi. Vzájemné působení nyní můžeme schematicky zapsat takto:

$$\text{náboj} \Rightarrow \text{pole} \Rightarrow \text{náboj}.$$

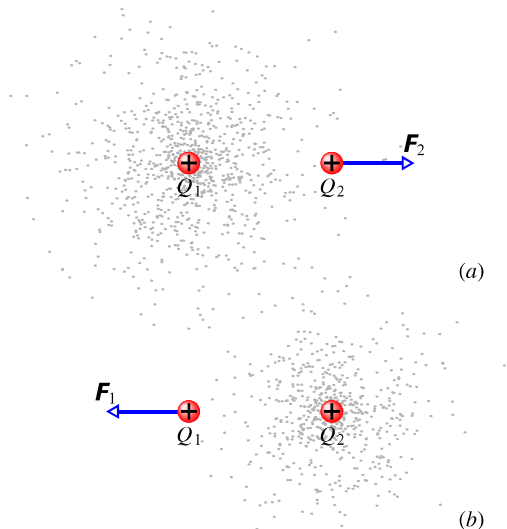
1. První náboj budí ve svém okolí *elektrické pole*.
2. Elektrické pole se šíří prostorem.
3. Druhý náboj interaguje s polem (prvního náboje), ve kterém se nachází.

Obr. 23.2 ilustruje elektrické pole zprostředkující interakci dvou nábojů. Na obr. 23.2a budí náboj Q_1 ve svém

Tabulka 23.1 Některá elektrická pole

ELEKTRICKÉ POLE	VELIKOST INTENZITY ($\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$)
Na povrchu jádra uranu	$3\cdot 10^{21}$
Uvnitř atomu vodíku (Bohrův poloměr, úloha 56 z kap. 24)	$5\cdot 10^{11}$
Při elektrickém průrazu ve vzduchu	$3\cdot 10^6$
V blízkosti nabitého válce fotokopírovacího stroje	10^5
V blízkosti nabitého plastického hřebenu	10^3
V dolní vrstvě atmosféry	10^2
Uvnitř měděného vodiče v elektrických obvodech v domácnosti	10^{-2}

okolí elektrické pole (znázorněno vytečkováním). Toto pole působí na náboj Q_2 silou F_2 . Z hlediska Q_1 (obr. 23.2b) můžeme však stejně dobře předpokládat, že pole budí náboj Q_2 a že síla F_1 působící na Q_1 je výsledkem jeho interakce s polem buzeným nábojem Q_2 . Síly mají ovšem stejnou velikost a opačný směr ($F_1 = -F_2$), i když obě elektrická pole mohou být různě silná, pokud se náboje od sebe liší velikostí.



Obr. 23.2 (a) Náboj Q_1 budí pole, které působí silou F_2 na náboj Q_2 . (b) Náboj Q_2 budí pole, které působí silou F_1 na náboj Q_1 . Mají-li náboje různou velikost, výsledná pole budou různá. Síly však mají vždy stejnou velikost a opačný směr; tj. $F_1 = -F_2$.

Ačkoli pro určení elektrického pole nabitého tělesa používáme testovací náboj, pole samozřejmě existuje nezávisle na něm. Pole v bodě P na obr. 23.1b existuje předtím i poté, co jsme do tohoto bodu testovací náboj umístili. (Předpokládáme, že testovací náboj je natolik malý, že jeho přítomnost neovlivní rozdělení náboje na nabitém tělese

a že se jeho vložení tedy nezmění to elektrické pole, které určujeme.)

Pro vyšetření úlohy, jakou hraje elektrické pole při interakci nabitých těles, musíme vyřešit dva úkoly:

- (1) Vypočítat intenzitu pole vytvářeného daným rozdělením nábojů.
- (2) Vypočítat sílu, kterou dané pole působí na náboj umístěný do pole.

Prvnímu úkolu se budeme věnovat v čl. 23.4 až 23.7 pro několik konfigurací nábojů. Druhý úkol budeme řešit v čl. 23.8 a 23.9 pro bodový náboj a dvojici bodových nábojů nacházejících se v elektrickém poli. Nejprve se ale budeme zabývat způsobem zobrazení elektrických polí.

23.3 ELEKTRICKÉ SILOČÁRY

Michael Faraday, který v 19. století zavedl pojem elektrického pole, si představoval prostor kolem nabitého tělesa vyplněný *siločárami*. Tyto čáry — budeme je pro určitost nazývat **elektrické siločáry** — jsou myšlené orientované křivky, které názorně zobrazují elektrické pole.

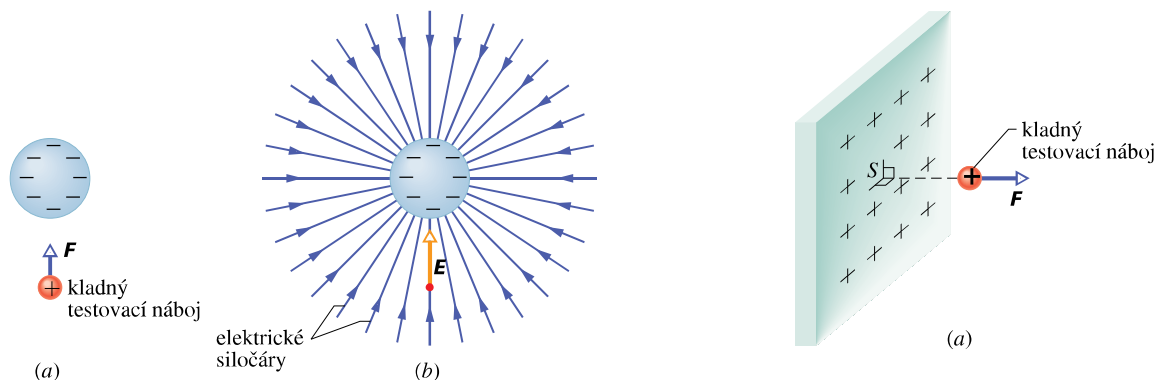
Vztah mezi siločárou a vektorem elektrické intenzity je následující:

- (1) Kvalitativně: v každém bodě určuje směr tečny k siločáře směr vektoru E .
- (2) Kvantitativně: chceme-li vyjádřit nejen směr, ale i velikost elektrické intenzity, nakreslíme tolik siločár, aby jejich počet na jednotku plochy kolmé k siločáram byl úměrný velikosti E . V tom případě tam, kde jsou siločáry blízko u sebe, je pole silné (velikost intenzity E je velká) a tam, kde jsou daleko od sebe, je pole slabé.

Na obr. 23.3a je koule s rovnoměrně rozloženým záporným nábojem. Jestliže umístíme *kladný* testovací náboj kamkoli do blízkosti koule, bude na něj působit elektrostatická síla směřující do středu koule (obr. 23.3a). Jinými slovy, vektor elektrické intenzity směřuje v každém bodě v blízkosti koule radiálně do jejího středu. Toto vektorové pole je zobrazeno na obr. 23.3b siločárami, které jsou orientovány stejně jako síla a vektor intenzity. Navíc rozbíhání siločár se vzdáleností od koule ukazuje, že velikost intenzity se vzdáleností od koule klesá.

Kdyby byla koule na obr. 23.3 rovnoměrně nabitá *kladným* nábojem, vektor intenzity v každém bodě blízko koule by směřoval radiálně *od* koule. Proto by se také elektrické siločáry *rozbíhaly* radiálně od koule.

Z kladných nábojů siločáry vycházejí (zdroj, zřídlo).
V záporných nábojích siločáry končí (nor, propad).



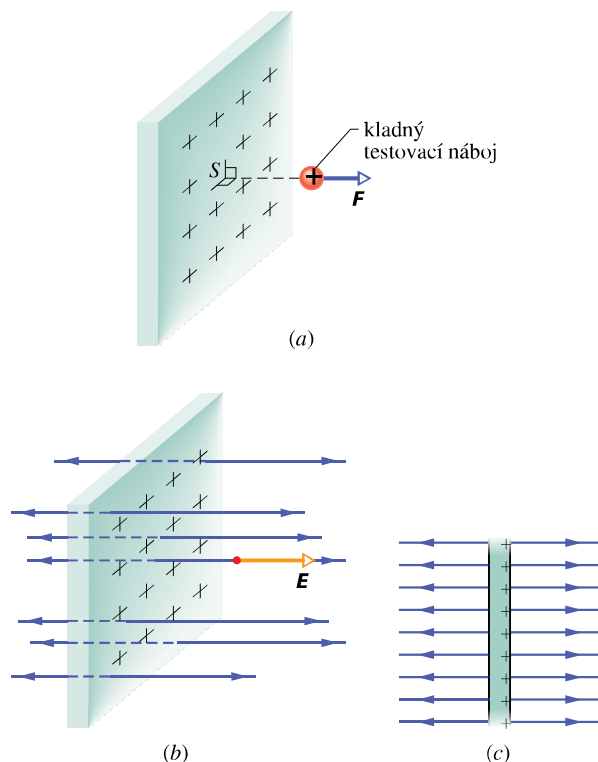
Obr. 23.3 (a) Elektrostatická síla F působící na kladný testovací náboj v blízkosti koule s rovnoměrně rozloženým záporným nábojem. (b) Vektor elektrické intenzity E v místě testovacího náboje a elektrické siločáry v okolí koule. Siločáry vedou směrem k záporně nabitě kouli. (Jejich počátek je v nekonečnu nebo ve vzdálených kladných nábojích.)

Je-li úhrnný náboj zkoumané soustavy kladný, pak některé siločáry z ní vedou do nekonečna (pokud ovšem nekončí na záporných nábojích mimo zkoumanou soustavu). Analogicky, je-li úhrnný náboj zkoumané soustavy záporný, pak některé siločáry do ní vedou z nekonečna (pokud ovšem nevycházejí z kladných nábojů mimo zkoumanou soustavu).

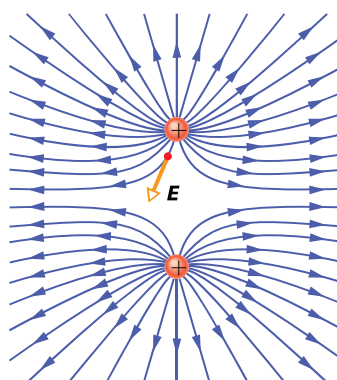
Na obr. 23.4a je část nekonečné nevodivé vrstvy (nebo roviny), která je na jedné straně rovnoměrně nabitá kladným nábojem. Umístíme-li kladný testovací náboj do libovolného bodu poblíž roviny, bude výsledná elektrostatická síla na něj působící k rovině kolmá, protože složky síly ve směrech rovnoběžných s rovinou se navzájem zruší v důsledku symetrie v rozložení náboje vzhledem k bodu S . Výsledná síla směřuje kolmo od roviny (obr. 23.4a); proto také intenzita v každém bodě prostoru na obou stranách roviny směřuje kolmo od ní (obr. 23.4b, c). Protože je náboj na rovině rozložen rovnoměrně, mají všechny vektory intenzity tutéž velikost. Pole, jehož intenzita má v každém bodě nějaké oblasti stejný směr a velikost, nazýváme *homogenní* ($E = \text{konst.}$).

Žádná reálná nevodivá vrstva samozřejmě není nekonečně velká. Uvažujeme-li však oblast blízko reálné roviny a dostatečně daleko od jejích krajů, jsou siločáry pole uspořádány tak, jak je to zobrazeno na obr. 23.4b, c.

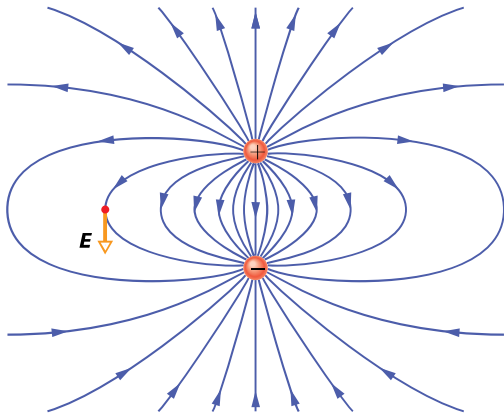
Obr. 23.5 ukazuje siločáry pole dvou stejně velkých kladných nábojů, obr. 23.6 siločáry dvou nábojů stejné velikosti, ale opačného znaménka. Toto uspořádání nábojů se nazývá **elektrický dipól**. Ačkoli nepoužíváme siločáry v kvantitativním významu často, jsou pro popis velmi výstižné. Můžeme téměř „vidět“, jak se náboje na obr. 23.5 odstrkují a na obr. 23.6 k sobě přitahují.



Obr. 23.4 (a) Elektrostatická síla F působící na kladný testovací náboj poblíž velmi velké, nevodivé roviny, která je na jedné straně rovnoměrně nabitá kladným nábojem. (b) Vektor intenzity E v místě testovacího náboje a siločáry elektrického pole v blízkosti roviny. Siločáry směřují od kladně nabitě roviny. (c) Boční pohled na situaci (b).



Obr. 23.5 Siločáry pole dvou stejně velkých kladných bodových nábojů. Náboje se navzájem odpuzují. Abychom „viděli“ skutečný trojrozměrný model elektrických siločár, je třeba v duchu otáčet zobrazeným modelem kolem osy ležící v rovině stránky a procházející oběma náboji. Trojrozměrný model a elektrické pole, které reprezentuje, jsou *rotačně symetrické* kolem této osy. V jednom bodě pole je zobrazen vektor intenzity. Má směr tečny k siločáře procházející tímto bodem.



Obr. 23.6 Siločáry pole dvou stejně velkých bodových nábojů opačných znamének. Náboje se navzájem přitahují. Model siločár a elektrické pole, které reprezentuje, jsou rotačně symetrické kolem osy procházející oběma náboji. V jednom bodě je zobrazen vektor intenzity. Má směr tečny k siločáře procházející tímto bodem.

PŘÍKLAD 23.1

Jak se na obr. 23.3 mění velikost elektrické intenzity se vzdáleností od středu rovnoměrně nabitou koule?

ŘEŠENÍ: Předpokládejme, že na kouli z obr. 23.3 končí N siločár. Představme si soustřednou kouli o poloměru r obklopující nabitou kulovou plochu. Počet siločár připadajících na jednotku této plochy je $N/(4\pi r^2)$. Protože intenzita E je úměrná této hodnotě, můžeme psát $E \sim 1/r^2$. Intenzita pole vytvářeného rovnoměrně nabitou koulí tedy také klesá se čtvercem vzdálenosti od středu koule.

23.4 ELEKTRICKÉ POLE BODOVÉHO NÁBOJE

Hledáme-li intenzitu pole **bodového náboje** Q (nabité částice zanedbatelných rozměrů), vložíme do libovolného bodu ve vzdálenosti r od bodového náboje kladný testovací náboj Q_0 . Podle Coulombova zákona (rov. (22.4)) je velikost elektrostatické síly působící na Q_0 rovna

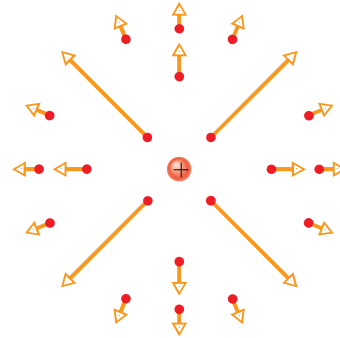
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q||Q_0|}{r^2}. \quad (23.2)$$

Síla F směřuje od bodového náboje, je-li náboj Q kladný, a směrem k němu, je-li záporný. Velikost elektrické intenzity je podle rov. (23.1) rovna

$$E = \frac{F}{Q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2} \quad (\text{bodový náboj}). \quad (23.3)$$

Směr vektoru E je stejný jako směr síly působící na kladný testovací náboj: směřuje od bodového náboje, je-li náboj Q kladný, a směrem k němu, je-li záporný.

Elektrické pole v prostoru kolem bodového náboje najdeme tak, že v jednotlivých bodech tohoto prostoru umístíme testovací náboj. Na obr. 23.7 jsou znázorněny vektory intenzity pole kladného bodového náboje (nikoli siločáry).



Obr. 23.7 Vektory elektrické intenzity v několika bodech kolem kladného bodového náboje.

Výsledné pole způsobené několika bodovými náboji můžeme najít pomocí principu superpozice. Jestliže umístíme kladný testovací náboj Q_0 do blízkosti n bodových nábojů Q_1, Q_2, \dots, Q_n , pak podle rov. (22.7) je výsledná síla F_0 , kterou působí n bodových nábojů na testovací náboj, rovna

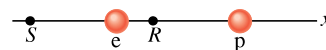
$$F_0 = F_{01} + F_{02} + \dots + F_{0n}.$$

Podle rov. (23.1) je tedy intenzita výsledného elektrického pole v místě testovacího náboje

$$E = \frac{F_0}{Q_0} = \frac{F_{01}}{Q_0} + \frac{F_{02}}{Q_0} + \dots + \frac{F_{0n}}{Q_0} = E_1 + E_2 + \dots + E_n, \quad (23.4)$$

kde E_i je intenzita pole, které by budil osamocený bodový náboj Q_i . Rov. (23.4) je vyjádřením **principu superpozice** pro intenzitu elektrického pole.

KONTROLA 1: Na obrázku je znázorněn proton p a elektron e na ose x . Jaký je směr intenzity elektrického pole buzeného elektronem (a) v bodě S , (b) v bodě R ? Jaký je směr intenzity výsledného pole (c) v bodě R , (d) v bodě S ?



PŘÍKLAD 23.2

Na obr. 23.8a jsou tři částice s náboji $Q_1 = +2Q$, $Q_2 = -2Q$, $Q_3 = -4Q$, každá ve vzdálenosti d od počátku. Jaká je intenzita výsledného elektrického pole v počátku souřadnic?

ŘEŠENÍ: Náboje Q_1 , Q_2 a Q_3 budí pole o intenzitách \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 a \mathbf{E}_3 . Hledáme vektorový součet $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$. Nejprve musíme nalézt velikost a směr všech tří vektorů intenzity. Velikost vektoru \mathbf{E}_1 , který je buzen nábojem Q_1 , najdeme z rov. (23.3) dosazením d za r a $2Q$ za $|Q|$:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2}.$$

Podobně najdeme velikosti vektorů \mathbf{E}_2 a \mathbf{E}_3 :

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} \quad \text{a} \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}.$$

Nyní musíme zjistit, jaká bude orientace těchto tří vektorů v počátku souřadnic. Protože Q_1 je kladný náboj, směřuje vektor intenzity směrem od něho. Protože náboje Q_2 a Q_3 jsou oba záporné, směřují vektory intenzity polí, která budí, směrem k nim. Vektory intenzity jsou znázorněny na obr. 23.8b. (Počátky vektorů jsme umístili do bodu, v němž máme určit výsledné pole.)

Intenzity nyní obvyklým postupem vektorově sečteme. Vyjádřením x -ové a y -ové složky každého vektoru a jejich sečtením získáme výslednou x -ovou a y -ovou složku vektoru \mathbf{E} . Jeho velikost najdeme pomocí Pythagorovy věty a pro určení směru \mathbf{E} použijeme definici tangenty úhlu.

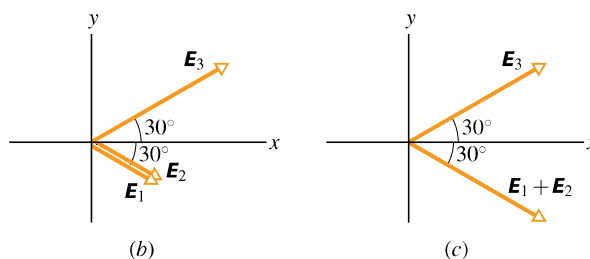
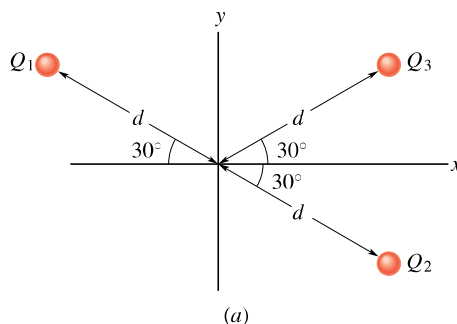
Pro zjednodušení výpočtu můžeme však také využít symetrie úlohy. Z obr. 23.8b plyne, že \mathbf{E}_1 a \mathbf{E}_2 mají stejný směr. Proto i jejich vektorový součet má tento směr a velikost bude

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{d^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2}, \end{aligned}$$

což je stejná velikost, jakou má \mathbf{E}_3 .

Zbývá sečíst dva vektory, a to \mathbf{E}_3 a $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, které mají stejnou velikost a jsou symetrické vzhledem k ose x (obr. 23.8c). Z toho plyne, že y -ové složky těchto dvou vektorů se navzájem ruší. Protože x -ové složky obou vektorů jsou kladné, má výsledná intenzita \mathbf{E} směr osy x a její velikost je

$$\begin{aligned} E &= 2E_{3x} = 2E_3 \cos 30^\circ = \\ &= 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{d^2} (0,866) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{6,93Q}{d^2}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$



Obr. 23.8 Příklad 23.2. (a) Tři částice s náboji Q_1 , Q_2 , Q_3 se nacházejí ve stejné vzdálenosti d od počátku souřadnic. (b) Vektory intenzit \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 polí buzených v počátku souřadnic těmito třemi částicemi. (c) Vektor intenzity \mathbf{E}_3 a vektorový součet $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ v počátku souřadnic.

PŘÍKLAD 23.3

Předpokládejme pro jednoduchost, že jádro atomu uranu je kulově symetrické a má poloměr $R = 6,8 \cdot 10^{-15}$ m. Za předpokladu, že kladný náboj jádra je rozložen rovnoměrně, určete elektrickou intenzitu, kterou tento náboj budí v bodě na povrchu jádra.

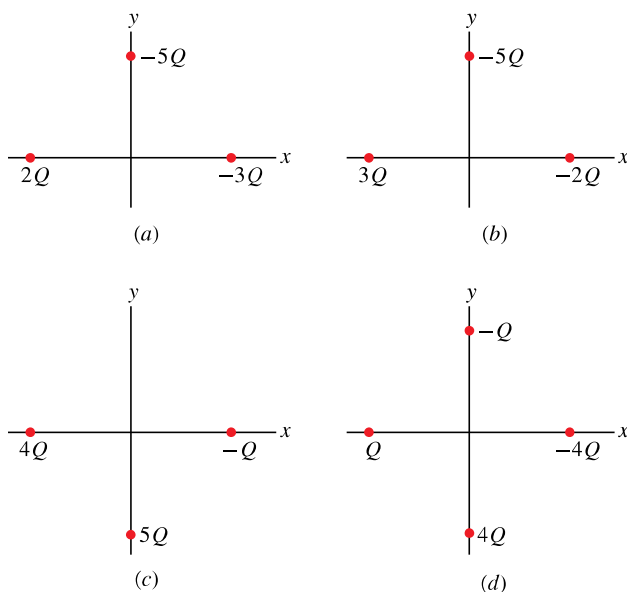
ŘEŠENÍ: Jádro má kladný náboj Ze , kde atomové číslo $Z = 92$ udává počet protonů v jádře a $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C je náboj protonu. Je-li náboj v jádře rozložen rovnoměrně, lze použít první slupkový teorem z kap. 22. Elektrostatická síla působící na kladný testovací náboj umístěný vně jádra je stejná, jako by celý náboj jádra byl soustředěn v jeho středu.

Z rov. (23.1) plyne, že také intenzita pole buzeného jádrem je stejná, jako by byl všechen jeho náboj soustředěn v jeho středu. Podle rov. (23.3) je velikost intenzity

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze}{R^2} = \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2})(92)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(6,8 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = \\ &= 2,9 \cdot 10^{21} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Protože náboj jádra je kladný, směřuje vektor intenzity \mathbf{E} směrem od středu jádra.

KONTROLA 2: Obrázek znázorňuje čtyři situace, v nichž jsou nabité částice ve stejné vzdálenosti od počátku. Seřaďte tyto případy sestupně podle velikosti intenzity výsledného elektrického pole v počátku souřadnic.



23.5 ELEKTRICKÉ POLE DIPÓLU

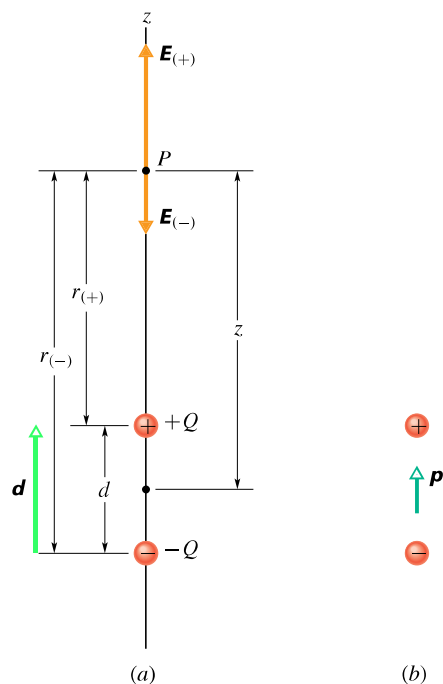
Na obr. 23.9a jsou dva náboje $+Q$ a $-Q$. Poloha náboje $+Q$ vůči $-Q$ je dána vektorem \mathbf{d} . Jak už bylo uvedeno v souvislosti s obr. 23.6, takové uspořádání se nazývá **elektrický dipól**. Určeme intenzitu pole dipólu v bodě P , který je ve vzdálenosti z od středu dipólu na ose dipólu (tj. na přímce procházející oběma náboji tvořícími dipól).

Vektor intenzity \mathbf{E} v bodě P — a také intenzity $\mathbf{E}_{(+)}$ a $\mathbf{E}_{(-)}$ polí buzených jednotlivými náboji tvořícími dipól — leží v ose dipólu; zvolíme ji za osu z . Použitím principu superpozice najdeme velikost E intenzity v bodě P :

$$\begin{aligned} E &= E_{(+)} - E_{(-)} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{(+)}^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_{(-)}^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z - \frac{1}{2}d)^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0(z + \frac{1}{2}d)^2}. \end{aligned} \quad (23.5)$$

Po malých úpravách můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left(\left(1 - \frac{d}{2z}\right)^{-2} - \left(1 + \frac{d}{2z}\right)^{-2} \right). \quad (23.6)$$



Obr. 23.9 (a) Elektrický dipól. Intenzity $\mathbf{E}_{(+)}$ a $\mathbf{E}_{(-)}$ v bodě P na ose dipólu jsou buzeny náboji $+Q$ a $-Q$. Vzdálenost bodu P od jednotlivých nábojů, které tvoří dipól, je $r_{(+)}$ a $r_{(-)}$. (b) Dipólový moment dipólu $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ směřuje od záporného náboje ke kladnému.

Obvykle se zajímáme o elektrické působení dipólu ve vzdálenostech, které jsou velké ve srovnání s jeho rozměry, tj. ve vzdálenostech $z \gg d$. Pro tak velké vzdálenosti v rov. (23.6) platí $d/(2z) \ll 1$. Oba výrazy v závorkách můžeme proto rozvinout podle binomické věty

$$\left(\left(1 + \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) - \left(1 - \frac{2d}{2z(1!)} + \dots\right) \right).$$

Pro velikost intenzity tedy platí

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \left[\left(1 + \frac{d}{z} + \dots\right) - \left(1 - \frac{d}{z} + \dots\right) \right]. \quad (23.7)$$

Vynechané členy v obou rozvoji v rov. (23.7) obsahují d/z ve vyšších mocninách. Protože $d/z \ll 1$, příspěvky těchto členů jsou stále menší a při aproximaci E ve velkých vzdálenostech je můžeme zanedbat. V naší aproximaci můžeme rov. (23.7) zapsat ve tvaru

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Qd}{z^3}. \quad (23.8)$$

Součin Qd udává velikost p vektorové veličiny, kterou nazýváme **elektrický dipólový moment \mathbf{p}** . Rov. (23.8)

můžeme tedy psát ve tvaru

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} \quad (\text{elektrický dipól}). \quad (23.9)$$

Vektor $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ podle definice směřuje od záporného konce dipólu ke kladnému (obr. 23.9b).

Jak plyne z rov. (23.9), měříme-li elektrické pole dipólu pouze ve vzdálených bodech, nemůžeme určit odděleně hodnoty Q a d , ale pouze hodnotu jejich součinu. Pole ve vzdálených bodech se nezmění, jestliže se například zdvojnásobí Q a současně d klesne na polovinu. Dipólový moment je tedy základní vlastností dipólu.

Ačkoli rov. (23.9) platí pouze pro vzdálené body na ose dipólu, lze dokázat, že velikost intenzity E pole dipólu klesá se vzdáleností: $E \sim 1/r^3$ pro všechny vzdálené body bez ohledu na to, leží-li na ose dipólu nebo ne; r zde označuje vzdálenost mezi uvažovaným bodem a středem dipólu.

Ze srovnání obr. 23.9 s průběhem siločár na obr. 23.6 je vidět, že směr intenzity \mathbf{E} pro vzdálené body na ose dipólu je vždy stejný jako směr dipólového momentu \mathbf{p} . To platí bez ohledu na to, kam jsme umístili bod P na ose dipólu.

Z rov. (23.9) plyne, že zdvojnásobíme-li vzdálenost uvažovaného bodu od dipólu, klesne intenzita pole osmkrát. Zdvojnásobíme-li však vzdálenost od bodového náboje, zmenší se intenzita pole pouze čtyřikrát (viz rov. (23.3)). Intenzita pole dipólu klesá tedy se vzdáleností mnohem rychleji než intenzita pole náboje. Fyzikálním důvodem pro tento rychlý pokles je skutečnost, že ze vzdálených bodů se dipól jeví jako dva stejně velké, ale opačné náboje, které téměř — ale ne zcela — splývají. Proto se také jejich pole ve vzdálených bodech téměř — i když ne zcela — ruší.

PŘÍKLAD 23.4

Molekula vodní páry budí ve svém okolí stejné elektrické pole jako dipól na obr. 23.9. Její dipólový moment má velikost $p = 6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$. Jaká je velikost intenzity pole ve vzdálenosti $z = 1,1 \text{ nm}$ od molekuly na její dipólové ose? (Tato vzdálenost je dostatečně velká, abychom mohli použít rov. (23.9)).

ŘEŠENÍ: Z rov. (23.9) plyne

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3} = \\ &= \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})}{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})(1,1 \cdot 10^{-9} \text{ m})^3} = \\ &= 8,4 \cdot 10^7 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

23.6 ELEKTRICKÉ POLE NABITÉHO VLÁKNA

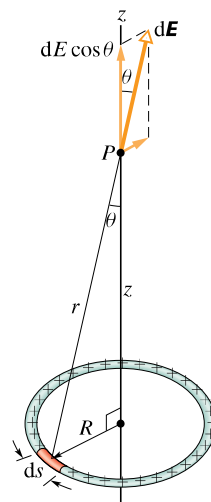
Dosud jsme uvažovali pole vytvářené jedním nebo nanejvýše několika bodovými náboji. Nyní uvažujme rozložení náboje, které je tvořeno velkým množstvím velmi těsně vedle sebe umístěných bodových nábojů, prostírajících se na vlákně, na ploše, nebo uvnitř nějakého objemu. Mluvíme o **spojitém rozložení náboje**. V tomto odstavci vyšetříme elektrické pole spojitě nabitého vlákna a plochy. S nabitým objemem jsme se již setkali v př. 23.3, kde jsme určili intenzitu pole vně rovnoměrně nabitě koule. V kap. 24 vypočteme intenzitu i uvnitř takové koule.

Když se zabýváme spojitě rozloženým nábojem, popisujeme náboj na tělese pomocí **hustoty náboje**. Je to náboj, který připadá na jednotku délky (nabitého vlákna), nebo na jednotkovou plochu (nabitě plochy), nebo na jednotku objemu (nabitě tělesa). V tab. 23.2 jsou uvedeny příslušné hustoty nábojů s jejich označením a jednotkou v soustavě SI.

Tabulka 23.2 Některé charakteristiky popisující rozložení elektrického náboje

NÁZEV	ZNAČKA	JEDNOTKA SI
Náboj	Q	C
Délková hustota náboje	τ	$\text{C}\cdot\text{m}^{-1}$
Plošná hustota náboje	σ	$\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$
Objemová hustota náboje	ρ	$\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$

Na obr. 23.10 je tenký nevodivý prstenec o poloměru R s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem o délkové hustotě τ . Jaká je intenzita \mathbf{E} elektrického pole v bodě P , který je ve vzdálenosti z od roviny prstence na jeho ose souměrnosti?



Obr. 23.10 Prstenec s rovnoměrně rozloženým kladným nábojem. Na elementární délky ds připadá elementární náboje τds , který budí v bodě P pole o intenzitě $d\mathbf{E}$. Složka $d\mathbf{E}$ ve směru osy prstence je $dE \cos \theta$.

Abychom našli odpověď, nemůžeme přímo použít rov. (23.3), která udává intenzitu pole vytvářeného bodovým nábojem: prsteneček není bod. Můžeme ho však myšleně rozdělit na infinitezimální elementy tak malé, že je můžeme považovat za bodové, a pak pro každý z nich použít rov. (23.3). Intenzitu, kterou v bodě P budí prsteneček, dostaneme podle principu superpozice jako vektorový součet intenzit, které budí jednotlivé nábojové elementy.

Nechť ds je délka elementu prstence. Protože τ je náboj připadající na jednotku délky, má element prstence infinitezimální náboj o velikosti

$$dQ = \tau ds \quad (23.10)$$

a ten vytváří v bodě P ve vzdálenosti r pole o intenzitě $d\mathbf{E}$. Element považujeme za bodový náboj a s užitím rov. (23.10) můžeme z rov. (23.3) vyjádřit velikost $d\mathbf{E}$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau ds}{r^2}. \quad (23.11)$$

Protože $r^2 = z^2 + R^2$, můžeme rov. (23.11) přepsat do tvaru

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau ds}{(z^2 + R^2)}. \quad (23.12)$$

Z obr. 23.10 plyne, že $d\mathbf{E}$ svírá s osou prstence (kterou jsme zvolili za osu z) úhel θ a má nenulovou složku jak ve směru kolmém k této ose, tak i rovnoběžném s ní.

Každý element náboje na prstenci vytváří v bodě P infinitezimální pole o intenzitě $d\mathbf{E}$, jejíž velikost je dána rov. (23.12). Všechny tyto vektory $d\mathbf{E}$ mají stejné z -ové složky. Průměty kolmé k ose souměrnosti mají stejnou velikost, ale míří do různých směrů. Ke každému z nich přitom existuje druhý, opačně orientovaný; takové dvojice průmětů se spolu vyruší. Výsledná intenzita v bodě P proto leží v ose z a má velikost rovnou součtu z -ových složek intenzit $d\mathbf{E}$.

Podle obr. 23.10 má z -ová složka $d\mathbf{E}$ velikost $dE \cos \theta$. Dále odsud plyne, že

$$\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}. \quad (23.13)$$

Z rov. (23.13) a (23.12) dostáváme

$$dE \cos \theta = \frac{z\tau}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} ds. \quad (23.14)$$

Velikost výsledné intenzity získáme integrací rovnice (23.14) podél obvodu prstence, tj. od $s = 0$ do $s = 2\pi R$. Protože s je jediná veličina v rov. (23.14), která se

během integrace mění, můžeme ostatní veličiny vytknout před integrál. Integrace pak dává

$$\begin{aligned} E &= \int dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z\tau}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} ds = \\ &= \frac{z\tau(2\pi R)}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (23.15)$$

Protože τ je náboj připadající na jednotkovou délku prstence, je člen $\tau(2\pi R)$ v rov. (23.15) roven celkovému náboji prstence Q . Rov. (23.15) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$E = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (\text{nabitý prsteneček}). \quad (23.16)$$

Je-li náboj na prstenci záporný, je velikost intenzity v bodě P také dána rov. (23.16), ale vektor \mathbf{E} je orientován směrem k prstenci.

Uvažujme nyní rov. (23.16) pro bod na ose z , který je tak daleko od prstence, že $z \gg R$. Pro takový bod můžeme výraz $z^2 + R^2$ v rov. (23.16) nahradit výrazem z^2 ; rov. (23.16) přejde do tvaru

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \quad (\text{nabitý prsteneček ve velké vzdálenosti}). \quad (23.17)$$

To je pochopitelný výsledek, protože z velké vzdálenosti se prsteneček jeví jako bodový náboj. Dosadíme-li v rov. (23.17) r za z , dostaneme skutečně rov. (23.3) pro intenzitu elektrického pole bodového náboje.

Uvažujme dále rov. (23.16) pro bod ve středu prstence, tj. pro $z = 0$. V tomto bodě vychází $E = 0$. To je opět pochopitelný výsledek, protože když umístíme testovací náboj do středu prstence, nebude na něj působit žádná výsledná síla: síla, kterou působí libovolný element prstence, se bude rušit se silou, kterou působí element k němu protilehlý. To znamená, že je nulová také intenzita elektrického pole.

PŘÍKLAD 23.5

Na obr. 23.11a je ebonitová tyč rovnoměrně nabitá nábojem $-Q$. Tyč je ohnuta do oblouku o středovém úhlu 120° a poloměru r . Zvolme souřadnicový systém tak, že osa x splývá s osou oblouku a počátek je v jeho středu křivosti P . Vyjádřete pomocí Q a r intenzitu \mathbf{E} elektrického pole vytvořeného tyčí v bodě P .

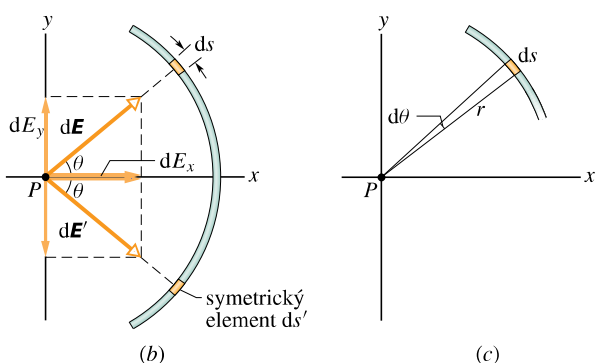
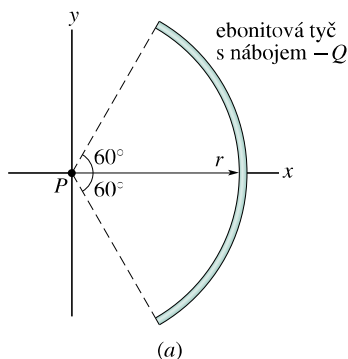
ŘEŠENÍ: Uvažujme infinitezimální element tyče o délce ds , který je nad osou x a jehož průvodič svírá s osou x úhel θ (obr. 23.11b). Nechť τ je délková hustota náboje na tyči. Pak element ds má infinitezimální náboj o velikosti

$$dQ = \tau ds. \quad (23.18)$$

Ten vytváří v bodě P , který je ve vzdálenosti r od elementu, pole o infinitezimální intenzitě $d\mathbf{E}$. Považujeme-li element za bodový náboj, můžeme pomocí rov. (23.3) vyjádřit velikost $d\mathbf{E}$ vztahem

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau ds}{r^2}. \quad (23.19)$$

Protože náboj dQ je záporný, směřuje $d\mathbf{E}$ k ds .



Obr. 23.11 Příklad 23.5. (a) Ebonitová tyč s nábojem $-Q$ tvoří oblouk o poloměru r se středovým úhlem 120° ; bod P je středem křivosti oblouku. (b) Infinitezimální element ds v horní části tyče, jehož průvodič svírá s osou x úhel θ , budí v bodě P elektrické pole $d\mathbf{E}$. Element ds' , symetrický k ds podle osy x , budí v bodě P pole $d\mathbf{E}'$, které má stejnou velikost. (c) Oblouku délky ds odpovídá úhel $d\theta$.

Ke každému elementu ds existuje symetricky umístěný element ds' (zrcadlový obraz) na spodní polovině tyče. Intenzita $d\mathbf{E}'$, kterou budí v bodě P element ds' , má velikost rovněž danou rov. (23.19), přičemž vektor intenzity směřuje směrem k ds' (obr. 23.11b). Je zřejmé, že y -ové složky vektorů $d\mathbf{E}$ a $d\mathbf{E}'$ jsou stejně velké, ale mají opačná znaménka; jejich součet je proto nulový. Dále vidíme, že jejich x -ové složky jsou stejné. Abychom našli intenzitu pole buzeného tyčí, stačí sečíst (integrovat) pouze x -ové složky infinitezimálních intenzit buzených všemi elementy tyče. Z obr. 23.11b a rov. (23.19) dostáváme pro velikost x -ové složky dE_x buzené elementem ds

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r^2} \cos \theta ds. \quad (23.20)$$

Rov. (23.20) má dvě proměnné, θ a s . Ty však nejsou nezávislé. Element ds vyjádříme vztahem

$$ds = r d\theta,$$

kde $d\theta$ je úhel, příslušný oblouku ds (obr. 23.11c). Nyní můžeme integrovat rov. (23.20) přes středový úhel od $\theta = -60^\circ$ do $\theta = 60^\circ$. Pro intenzitu pole, které v bodě P budí celá tyč, dostaneme

$$\begin{aligned} E_x &= \int dE_x = \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r^2} r \cos \theta d\theta = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos \theta d\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} [\sin \theta]_{-60^\circ}^{60^\circ} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} [\sin 60^\circ - \sin(-60^\circ)] = \\ &= \frac{1,73\tau}{4\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned} \quad (23.21)$$

Určíme ještě τ . Tyči odpovídá středový úhel 120° , tj. tyč tvoří třetinu celé kružnice. Její délka je tedy $2\pi r/3$ a délková hustota náboje

$$\tau = \frac{\text{náboj}}{\text{délka}} = \frac{Q}{2\pi r/3} = \frac{0,477Q}{r}.$$

Dosazením do rov. (23.21) a úpravou dostáváme

$$E_x = \frac{1,73(0,477Q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{0,83Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (\text{Odpověď})$$

Vektor \mathbf{E} směřuje k tyči, podél osy symetrie rozložení náboje.

RADY A NÁMĚTY

Bod 23.1: Výpočet pole nabitěho vlákna

Podáme obecný návod, jak určit intenzitu pole, které v bodě P budí rovnoměrně nabitě vlákno, buď přímé, nebo ve tvaru oblouku. Zvolíme element náboje dQ , najdeme intenzitu $d\mathbf{E}$ buzenou tímto elementem a $d\mathbf{E}$ integrujeme přes celé nabitě vlákno.

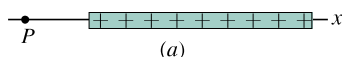
1. Má-li nabitě vlákno tvar oblouku, je ds délka elementárního oblouku. Je-li přímé, zvolíme v jeho směru osu x a pak dx je délka elementu. Délkový element si označíme na náčrtku.
2. Vyjádříme element náboje dQ zvoleného délkového elementu buď jako $dQ = \tau ds$, nebo $dQ = \tau dx$.
3. Vyjádříme intenzitu $d\mathbf{E}$ pole buzeného v bodě P nábojem dQ z rov. (23.3), kde dQ je rovno τds (nebo τdx). Je-li náboj vlákna kladný, zakreslíme v bodě P vektor $d\mathbf{E}$, který směřuje od elementu dQ . Je-li náboj záporný, zakreslíme vektor směřující k dQ .
4. Vždy hledáme, zda je v rozložení nábojů symetrie. Jestliže bod P leží na ose symetrie, rozložíme vektor intenzity $d\mathbf{E}$

do dvou směrů, z nichž jeden je k ose symetrie kolmý a druhý je s ní rovnoběžný. Pak zavedeme element dQ' symetrický s dQ . V bodě P zakreslíme vektor $d\mathbf{E}'$ pole, které je buzeno elementem dQ' , a rozložíme ho do výše uvedených směrů. Jedna ze složek buzená dQ se ruší s odpovídající složkou buzenou dQ' a nemusíme ji dále uvažovat. Složky ve směru kolmém se však sčítají. Integrováním sečteme tyto složky od všech elementů.

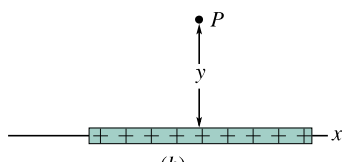
5. Existují čtyři typy rovnoměrného rozdělení náboje, kde můžeme zjednodušit integrál podle kroku 4. Každý typ můžeme ještě zobecnit tím, že část vlákna bude nabita kladně a část záporně.

Prstenec, leží-li bod P na jeho ose (obr. 23.10): Ve výrazu pro dE dosadíme $r^2 = z^2 + R^2$ jako v rov. (23.12). Vyjádříme sčítanou složku dE pomocí θ . Tím se zavede $\cos \theta$, ale θ je pro všechny elementy stejné a není tedy proměnnou. Vyjádříme $\cos \theta$ z rov. (23.13). Integrujeme přes s podél obvodu kružnice.

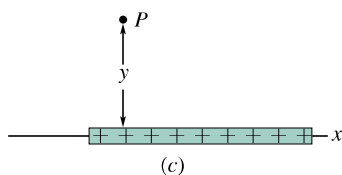
Oblouk kružnice, leží-li bod P v jejím středu (obr. 23.11): Vyjádříme sčítanou složku dE pomocí θ . Tím se zavede buď $\sin \theta$, nebo $\cos \theta$. Zredukujeme výsledné dvě proměnné s a θ na jednu (θ) nahrazením $ds = r d\theta$. Integrujeme přes θ jako v př. 23.5 od jednoho konce oblouku ke druhému.



(a)



(b)



(c)

Obr. 23.12 (a) Bod P leží v prodloužení nabitého vlákna. (b) Bod P leží v rovině symetrie vlákna ve vzdálenosti y . (c) Totéž jako (b), ale P neleží v rovině symetrie.

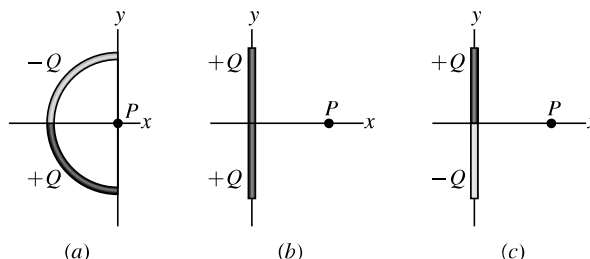
Přímé vlákno, leží-li bod P v prodloužení vlákna jako na obr. 23.12a: Ve výrazu pro dE nahradíme $r = x$. Integrujeme přes x od jednoho konce vlákna ke druhému.

Přímé vlákno, leží-li bod P ve vzdálenosti y jako na obr. 23.12b: Ve výrazu pro dE nahradíme r výrazem obsahujícím x a y . Je-li P na ose vlákna, najdeme výraz pro sčítanou složku dE . Tím se zavede buď $\sin \theta$, nebo $\cos \theta$. Zredukujeme výsledné dvě proměnné x a θ na jednu (x) nahrazením goniometrické funkce výrazem obsahujícím x a y . Integrujeme přes x od jednoho konce vlákna ke druhému.

Jestliže P neleží na ose (obr. 23.12c), sestavíme integrál pro součet složek dE_x a integrujeme přes x , abychom našli E_x . Sestavíme také integrál pro součet složek dE_y a integrujeme opět přes x , abychom našli E_y . Obvyklým způsobem najdeme ze složek E_x a E_y velikost E a směr \mathbf{E} .

6. Má-li být výsledek vyjádřen pomocí celkového náboje Q , nahradíme $\tau = Q/s$, kde s je délka vlákna (např. pro prstenec je s rovno obvodu prstence).

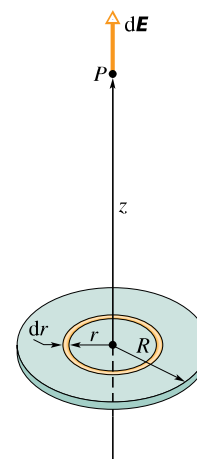
KONTROLA 3: Na obrázku jsou tři nevodivé tyče, jedna ohnutá do oblouku a dvě přímé. Na obou polovinách každé z nich je rovnoměrně rozložený uvedený náboj. Určete pro každou tyč směr intenzity výsledného pole v bodě P .



23.7 ELEKTRICKÉ POLE NABITÉHO DISKU

Na obr. 23.13 je kruhový ebonitový disk o poloměru R , který má na svém horním povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj o plošné hustotě σ (tab. 23.2). Jaká je elektrická intenzita v bodě P , který je ve vzdálenosti z od roviny disku na jeho ose souměrnosti?

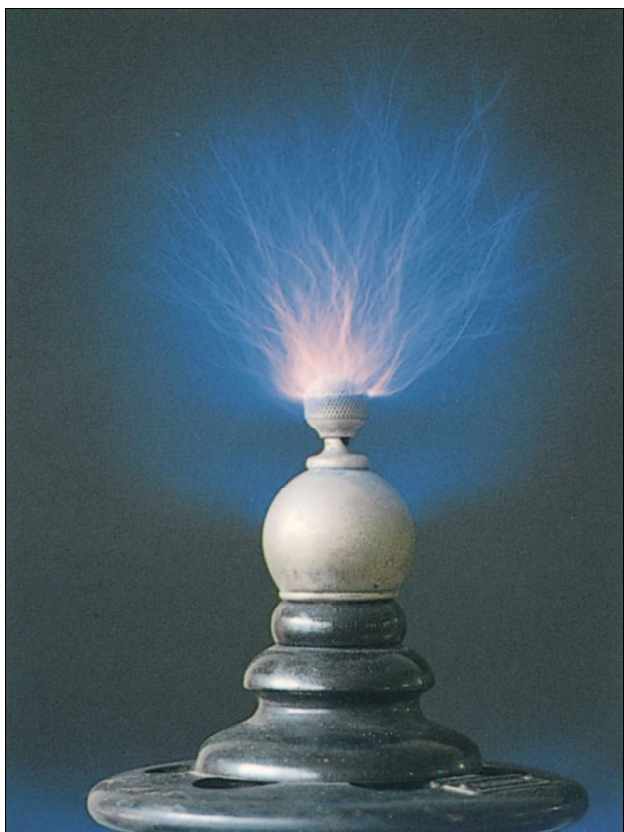
Obr. 23.13 Disk o poloměru R rovnoměrně nabitý kladným nábojem. Vyznačený prstenec má poloměr r a radiální šířku dr . V bodě P na ose souměrnosti budí prstenec infinitesimální intenzitu $d\mathbf{E}$.



Rozdělíme disk na soustředné prstence a spočítáme intenzitu v bodě P sečtením (tj. integrací) všech dílčích příspěvků. Na obr. 23.13 je jeden takový prstencík o polooměru r a šířce dr . Protože σ je náboj připadající na jednotku plochy, je náboj na prstencíku roven

$$dQ = \sigma dS = \sigma (2\pi r dr), \quad (23.22)$$

kde dS je element plochy prstencíku.



Je-li elektrická intenzita v okolí nabitěho tělesa dostatečně velká, dojde k *elektrickému průrazu* okolního vzduchu: molekuly vzduchu jsou ionizovány (z molekul se uvolní elektrony) a vznikají přechodné vodivé dráhy. Elektrické jiskry, které zde vidíte, tyto dráhy ukazují.

Pole, které budí nabitý prstencík, jsme už počítali. Do rov. (23.16) za Q dosadíme dQ z rov. (23.22) a za R proměnnou r . Tím získáme výraz pro velikost intenzity dE , kterou v bodě P budí zvolený prstencík:

$$dE = \frac{z\sigma 2\pi r dr}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

neboli

$$dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \frac{2r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Nyní můžeme najít velikost E integrací přes celý povrch disku, tj. integrací podle proměnné r od $r = 0$ do $r = R$, přičemž z zůstává během integrace konstantní. Dostáváme

$$E = \int dE = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \int_0^R (z^2 + r^2)^{-3/2} (2r) dr. \quad (23.23)$$

Integrál převedeme na tvar $\int X^m dX$ substitucí $X = (z^2 + r^2)$, $m = -\frac{3}{2}$ a $dX = (2r) dr$. Pro upravený integrál máme

$$\int X^m dX = \frac{X^{m+1}}{m+1}$$

a z rov. (23.23) dostáváme

$$E = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0} \left[\frac{(z^2 + r^2)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^R.$$

Po dosazení mezí a úpravě dostáváme pro velikost intenzity pole buzeného plochým kruhovým nabitým diskem v bodě P na jeho ose

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (\text{nabitý disk}). \quad (23.24)$$

Směr intenzity \mathbf{E} je kolmý k disku.

Pro $R \rightarrow \infty$ a z konečné se v rov. (23.24) druhý člen v závorce blíží k nule a rovnice se redukuje na tvar

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{nekonečná vrstva}). \quad (23.25)$$

To je intenzita pole buzeného nekonečnou vrstvou náboje rovnoměrně rozloženého na jedné straně nevodiče. Siločáry v takové situaci jsou zobrazeny na obr. 23.4.

Rov. (23.25) dostaneme i v případě, že $z \rightarrow 0$ a R zůstává konečné. To znamená, že v bodech velmi blízko disku je intenzita stejná, jako kdyby byl disk nekonečný.

PŘÍKLAD 23.6

Disk na obr. 23.13 je na svém horním povrchu nabit nábojem s plošnou hustotou $\sigma = +5,3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. (To odpovídá situaci na fotosenzitivním válci kopírovacího stroje.)

(a) Jaká je elektrická intenzita u povrchu disku?

ŘEŠENÍ: Směr \mathbf{E} je kolmý k disku a velikost E plyne z rov. (23.25):

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{(5,3 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2})}{2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2})} = \\ &= 3,0 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota platí pro všechny body, které jsou blízko povrchu disku, a přitom dostatečně daleko od jeho okraje.

Je-li intenzita pole v látce dostatečně velká, dojde k *elektrickému průrazu*, při kterém v materiálu náhle vznikají vodivé cesty. Ve vzduchu k němu za atmosférického tlaku dochází, jestliže intenzita přesáhne hodnotu $3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Při průrazu probíhají elektrony jednou či více vodivými dráhami a vytvářejí *elektrické jiskry*. Protože vypočítaná intenzita v tomto příkladu je pouze $3 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, k jiskření ještě nedojde.

(b) Užitím binomické věty najdete elektrickou intenzitu v bodě na ose disku ve velké vzdálenosti od něj.

ŘEŠENÍ: Slova *ve velké vzdálenosti od disku* znamenají, že vzdálenost z je mnohem větší než rozměry disku. To nám umožní použít binomickou větu pro aproximaci odmocniny vystupující v rov. (23.24).

Binomická věta má tvar (dodatek E)

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots, \quad (23.26)$$

kde $|x| < 1$. Odmocninu vyjádříme ve tvaru

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{z}{z\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}}} = \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2},$$

který je vhodný pro užití binomické věty s $x = R^2/z^2$ a $n = -\frac{1}{2}$. Protože z je mnohem větší než R , je také $|x| < 1$.

Podle rov. (23.26) můžeme rozvinout

$$\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{-\frac{1}{2}R^2}{1!z^2} + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)R^4}{2!z^4} + \dots$$

Následující členy na pravé straně jsou stále menší. Požadovaný výsledek můžeme dostatečně přesně aproximovat zanedbáním členů menších než R^2/z^2 , což dává

$$\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \doteq 1 - \frac{R^2}{2z^2}.$$

Dosazením tohoto výrazu do rov. (23.24) dostáváme

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right)\right) = \\ &= \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{R^2}{z^2}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výraz můžeme vyjádřit pomocí náboje Q rozloženého na povrchu disku, neboť $\sigma = Q/S$, kde $S = \pi R^2$. Je tedy

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{R^2}{z^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{z^2}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď}) \quad (23.27)$$

V bodech na ose disku, pro které je $z \gg R$, je podle rov. (23.27) pole buzené nábojem Q na povrchu disku stejné jako pole buzené bodovou částicí se stejným nábojem Q .

23.8 BODOVÝ NÁBOJ V ELEKTRICKÉM POLI

V předcházejících čtyřech článcích jsme se zabývali prvním z našich dvou úkolů: nalézt pro dané rozdělení náboje elektrické pole, které je nábojem buzeno v okolním prostoru. Nyní se budeme zabývat druhým úkolem: co se stane s nabitou částicí, která se nachází v elektrickém poli, buzeném jinými statickými nebo pomalu se pohybujícími náboji.

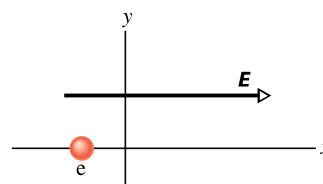
Na takovou částici působí elektrostatická síla vyjádřená vztahem

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}, \quad (23.28)$$

kde Q je náboj částice (zahrnující i znaménko) a \mathbf{E} je intenzita pole, které v místě, kde se částice nachází, budí ostatní náboje. (Toto pole nazýváme někdy *vnějším polem*, abychom zdůraznili, že nezahrnuje *vlastní pole* částice. Nabitá částice není ovlivněna svým vlastním elektrickým polem.) Z rov. (23.28) je vidět, že platí:

Na nabitou částici působí ve vnějším elektrickém poli \mathbf{E} elektrostatická síla \mathbf{F} . Má směr \mathbf{E} , jestliže je náboj Q částice kladný, a opačný směr, jestliže je náboj Q záporný.

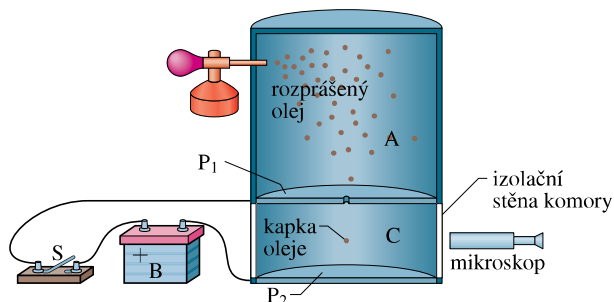
KONTROLA 4: (a) Určete na obrázku, jaký je směr elektrostatické síly, kterou na elektron působí znázorněné elektrické pole. (b) Ve kterém směru je elektron urychlován, jestliže se před vstupem do elektrického pole pohybuje rovnoběžně s osou y ? (c) Jestliže se na počátku pohybuje ve směru osy x , bude velikost jeho rychlosti vzrůstat, klesat, nebo zůstane stejná?



Měření elementárního náboje

Rov. (23.28) se uplatní při měření velikosti náboje elektronu, tj. elementárního náboje e , které prováděl americký fyzik Robert A. Millikan v letech 1910–1913. Na obr. 23.14 je zobrazeno jeho zařízení.

Vstříkujeme-li drobné olejové kapky do komory A, některé z nich se při srážkách s ionty vzduchu nabíjí kladně, jiné záporně. Uvažujme kapku o poloměru r a hmotnosti m , která padá dolů malým otvorem v desce P_1 do komory C. Předpokládejme, že kapka má záporný náboj $-Q_1$. Pomalu se pohybující kapku brzdí síla odporu prostředí o velikosti



Obr. 23.14 Millikanovo zařízení pro měření elementárního náboje e . Jestliže nabitá olejová kapka prochází otvorem v desce P_1 do komory C, můžeme její pohyb řídit zapínáním a vypínáním spínače S, tedy vytvářením nebo rušením elektrického pole v komoře C. Kapku pozorujeme mikroskopem a z doby průchodu mezi dvěma vodorovnými vlákny v ohniskové rovině okuláru měříme její rychlost.

$F = 6\pi\eta r v$ (Stokesův vzorec), kde η je dynamická viskozita vzduchu. Proto kapka záhy dosáhne mezní rychlosti, kterou určíme z rovnováhy sil.

Je-li spínač S na obr. 23.14 vypnut, není v komoře C žádné elektrické pole, a podmínka rovnováhy sil dává*

$$mg = 6\pi\eta r v_0.$$

Mezní rychlost v_0 se určí z doby průchodu mezi dvěma vodorovnými vlákny v ohniskové rovině okuláru mikroskopu, kterým pozorujeme kapku.

Zapneme-li spínač S, spojíme komoru C s kladným pólem baterie a ta nabije vodivou desku P_1 kladně a desku P_2 záporně. Nabité desky budí v komoře C elektrické pole, jehož intenzita E směřuje dolů. Podle rov. (23.28) působí toto pole elektrostatickou silou na každou nabitou kapku, která se nachází v komoře, a ovlivňuje její pohyb. Pád kapky

* Vztakovou sílu působící na kapku pro jednoduchost neuvažujeme.



V elektrostatickém odlučovači působí elektrostatické pole na nabitě částice popílku. Popílek je zachycen v komíně a neznečistí atmosféru. Odlučovač je v provozu na levé, ale nikoli na pravé fotografii.

se zastaví a kapka začne stoupat. Její mezní rychlost v_1 je určena podmínkou rovnováhy sil

$$Q_1 E - mg = 6\pi\eta r v_1.$$

Změní-li se náboj kapky (srážkou s jiným iontem vzduchu) na $-Q_2$, změní se mezní rychlost jejího stoupání na v_2 :

$$Q_2 E - mg = 6\pi\eta r v_2.$$

Z těchto tří vztahů dostaneme

$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = \frac{mg}{Ev_0} (v_2 - v_1).$$

Potom kondenzátor vybijeme a znovu změříme rychlost v_0 . Jednu kapku tak mnohokrát proměříme a z každé náhlé změny její rychlosti vypočteme podle výše uvedené rovnice změnu jejího náboje.

Mnohonásobným proměřením kapek Millikan zjistil, že rozdíly ΔQ byly vždy celistvými násobky jistého náboje e , tedy

$$\Delta Q = ne, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (23.29)$$

Hodnota $e \doteq 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ patří mezi základní fyzikální konstanty a nazývá se **elementární náboj**. Millikanův pokus byl důkazem toho, že elektrický náboj je kvantován, a Millikan získal v roce 1923 Nobelovu cenu za fyziku částečně i za tuto práci. Nyní dokážeme měřit elementární náboj mnohem přesněji, a to nepřímo, výpočtem z veličin, které jsou snadněji a přesněji měřitelné.

Inkoustová tiskárna

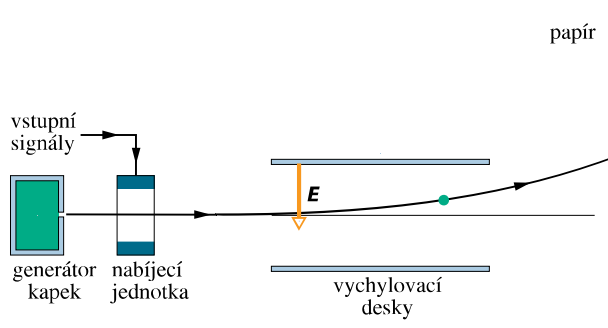
Potřeba vysoce kvalitního a rychlého tisku si vyžádala hledání alternativ k dotykovému tisku, který se uplatňuje



např. v mechanickém psacím stroji. Jednou alternativou je tisk nastřikováním drobných inkoustových kapek.

Na obr. 23.15 se záporně nabitá kapka pohybuje mezi dvěma nabitými vychylovacími deskami, mezi kterými je homogenní elektrické pole o intenzitě E směřující svisle dolů. V souladu s rov. (23.28) se kapka vychyluje vzhůru a pak dopadá na papír v místě, které je závislé na velikosti intenzity E a náboje Q .

V praxi se postupuje tak, že E je konstantní a polohu kapky na papíře ovládáme nábojem Q , jenž kapka získá v nabíjecí jednotce, kterou prochází, než vletí do vychylovacího systému. Nabíjecí jednotka je řízena elektronickými signály, v nichž je zakódováno to, co má být vytištěno.



Obr. 23.15 Základní princip inkoustové tiskárny. Vstupním signálem z počítače určujeme náboj předávaný každé kapce a tím polohu na papíře, kam kapka dopadne. K vytvoření jednoho znaku je potřeba asi 100 drobných kapek.

PŘÍKLAD 23.7

V Millikanově zařízení na obr. 23.14 má kapka oleje o poloměru $R = 2,76 \mu\text{m}$ přebytečný náboj tří elektronů. Jaká je velikost a směr intenzity, která způsobí, že kapka zůstává v zařízení v klidu? Hustota ρ oleje je $920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (vztlak vzduchu je malý vzhledem k tíhové síle mg a můžeme jej zanedbat).

ŘEŠENÍ: Aby byla kapka v rovnováze, musí elektrostatická síla působící na kapku směřovat vzhůru a mít velikost mg . Z rov. (23.28) a (23.29) plyne velikost elektrostatické síly $F = (3e)E$. Hmotnost kapky vyjádříme jako součin jejího objemu a hustoty. Rovnováha sil pak dává

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = (3e)E.$$

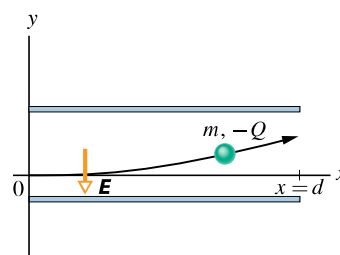
Odtud

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\pi R^3 \rho g}{9e} = \\ &= \frac{4\pi (2,76 \cdot 10^{-6} \text{ m})^3 (920 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}) (9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2})}{9(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = \\ &= 1,65 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Protože kapka je nabitá záporně, plyne z rov. (23.28), že E a F mají opačný směr: $F = -3eE$. Vektor E musí tedy směřovat svisle dolů.

PŘÍKLAD 23.8

Na obr. 23.16 jsou vychylovací desky inkoustové tiskárny se zavedenými souřadnicovými osami. Kapka inkoustu o hmotnosti $m = 1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg}$ a se záporným nábojem o velikosti $Q = 1,5 \cdot 10^{-13} \text{ C}$ je vstříknuta do prostoru mezi deskami ve směru osy x rychlostí $v_x = 18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Délka d desek je $1,6 \text{ cm}$. Desky jsou nabity a budí tedy mezi sebou elektrické pole. Předpokládejme, že pole je homogenní, se svisle dolů orientovanou intenzitou E o velikosti $1,4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. Jaká je svislá odchylka kapky od původního směru na úrovni konce desek? (Tíhová síla působící na kapku je malá vzhledem k elektrostatické síle a můžeme ji zanedbat.)



Obr. 23.16 Příklad 23.8. Kapka inkoustu o hmotnosti m se záporným nábojem $-Q$ je vychylována elektrickým polem inkoustové tiskárny.

ŘEŠENÍ: Protože kapka je nabitá záporně a elektrické pole směřuje směrem dolů, působí podle rov. (23.28) na kapku směrem vzhůru elektrostatická síla o velikosti QE a kapka je urychlována vzhůru s konstantním zrychlením a_y . Použitím druhého Newtonova zákona získáme

$$a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{QE}{m}. \quad (23.30)$$

Nechť t je doba, kterou potřebuje kapka k tomu, aby prošla oblastí mezi deskami. Za dobu t mají svislá a vodorovná souřadnice kapky hodnotu

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \text{a} \quad d = v_x t, \quad (23.31)$$

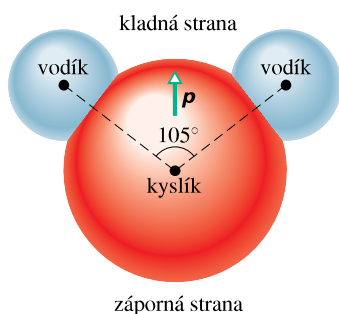
neboť ve směru osy x nepůsobí žádná síla a kapka se tedy pohybuje ve vodorovném směru konstantní rychlostí v_x . Vyloučením t a dosazením z rov. (23.30) za a_y získáme

$$\begin{aligned} y &= \frac{QE d^2}{2m v_x^2} = \\ &= \frac{(1,5 \cdot 10^{-13} \text{ C})(1,4 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1})(1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2(1,3 \cdot 10^{-10} \text{ kg})(18 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2} = \\ &= 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 0,64 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

23.9 DIPÓL V ELEKTRICKÉM POLI

Dipólový moment \mathbf{p} elektrického dipólu jsme definovali jako vektor, který směřuje od záporného pólu ke kladnému. Uvidíme, že pro popis chování dipólu ve vnějším homogenním elektrickém poli stačí znát vektor \mathbf{p} .

Jak už bylo uvedeno v př. 23.4, tvoří molekula vody (H_2O) elektrický dipól. Obr. 23.17 ukazuje, proč je tomu tak. Černé body označují jádro kyslíku (mající osm protonů) a dvě jádra vodíku (z nichž každé má jeden proton). Barevné plochy představují oblasti, v nichž se vyskytují elektrony obíhající jádro.



Obr. 23.17 Molekula H_2O : jsou zobrazena tři jádra (reprezentována černými body) a oblasti, v nichž se pohybují elektrony. Dipólový moment \mathbf{p} směřuje od (záporné) kyslíkové části molekuly ke (kladné) vodíkové části.

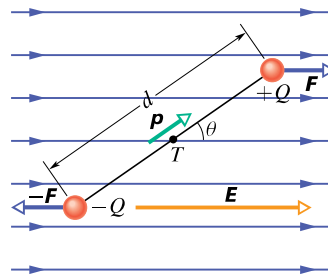
Atomy vodíku a atom kyslíku neleží v molekule vody v jedné přímce, ale svírají úhel 105° (obr. 23.17). V důsledku toho má molekula „kyslíkovou část“ a „vodíkovou část“. Navíc všech deset elektronů molekuly se pohybuje v blízkosti kyslíkového jádra. Proto je kyslíková část molekuly o něco negativnější než vodíková část, a tak se vytváří elektrický dipólový moment \mathbf{p} . Je-li molekula vody umístěna do vnějšího elektrického pole, chová se stejně jako dipól na obr. 23.9.

Sledujme, jak se chová dipól ve vnějším homogenním poli o intenzitě \mathbf{E} (obr. 23.18a). Předpokládejme, že se dipól skládá ze dvou opačných nábojů o stejné velikosti Q ve vzdálenosti d , je tuhý vzhledem k působení vnějších elektrostatických sil, ale může se otáčet. Dipólový moment \mathbf{p} svírá s vektorem intenzity \mathbf{E} úhel θ .

Na nabitě konce dipólu působí elektrostatické síly \mathbf{F} a $-\mathbf{F}$. Působí v opačném směru a mají stejnou velikost $F = QE$, takže tvoří silovou dvojici.

Výslednice sil, kterými působí pole na dipól, je tedy nulová. Tyto síly však působí na dipól momentem síly. Z rov. (11.30) při $r = d/2$ plyne

$$M = F \frac{d}{2} \sin \theta + F \frac{d}{2} \sin \theta = Fd \sin \theta. \quad (23.32)$$



(a)



(b)

Obr. 23.18 (a) Dipól v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} . Dva stejně velké, ale opačné náboje jsou ve vzdálenosti d . Těžiště T soustavy je uprostřed mezi nimi. Tyč mezi náboji představuje jejich tuhé spojení. (b) Pole o intenzitě \mathbf{E} působí na dipól momentem síly \mathbf{M} . Vektor \mathbf{M} směřuje kolmo od nás, což je znázorněno symbolem \otimes .

Moment síly můžeme také vyjádřit pomocí velikosti intenzity E a dipólového momentu $p = Qd$:

$$M = pE \sin \theta. \quad (23.33)$$

Pro vektor \mathbf{M} platí

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (\text{moment síly působící na dipól}). \quad (23.34)$$

Vektory \mathbf{p} a \mathbf{E} jsou zobrazeny na obr. 23.18b. Moment síly působící na dipól se snaží otočit \mathbf{p} do směru \mathbf{E} , tj. zmenšit úhel θ . Na obr. 23.18 je tato rotace ve směru otáčení hodinových ručiček. Tomu odpovídá podle kap. 11 orientace \mathbf{M} proti směru osy z . Platí tedy

$$M_x = M_y = 0, \quad M_z = -pE \sin \theta. \quad (23.35)$$

Potenciální energie dipólu

Potenciální energie dipólu závisí na jeho orientaci v elektrickém poli. Jeho energie je nejmenší, je-li ve své stabilní rovnovážné poloze, tj. jestliže moment \mathbf{p} má stejný směr a orientaci jako intenzita \mathbf{E} (pak $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$). Při všech ostatních orientacích je potenciální energie dipólu větší. Dipól je tedy podobný kyvadlu, které má nejmenší gravitační potenciální energii ve své rovnovážné poloze — v nejnižším bodě. Pro otočení kyvadla nebo dipólu do libovolné jiné polohy je potřeba práce vnějších sil.

Konfiguraci odpovídající nulové potenciální energii můžeme vždy zvolit zcela libovolně, protože fyzikální význam má pouze rozdíl jejích hodnot. Ukazuje se, že výraz

pro potenciální energii dipólu ve vnějším elektrickém poli je nejjednodušší, jestliže zvolíme nulovou hodnotu potenciální energie pro úhel $\theta = 90^\circ$ (obr. 23.18). Potenciální energii E_p dipólu pro libovolnou hodnotu θ pak určíme podle rov. (8.1) ($\Delta E_p = -W$) tak, že vypočteme práci, kterou pole vykoná při otočení dipólu z polohy $\theta' = 90^\circ$ do polohy $\theta' = \theta$. Z rov. (11.44) ($W = \int M d\theta$) a rov. (23.35) dostaneme:

$$\begin{aligned} E_p &= -W = - \int_{90^\circ}^{\theta} M d\theta' = \\ &= \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin \theta' d\theta'. \end{aligned} \quad (23.36)$$

Odtud plyne

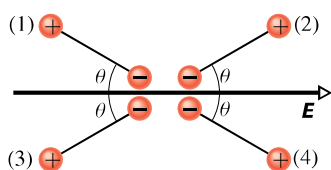
$$E_p = -pE \cos \theta. \quad (23.37)$$

Ve vektorovém tvaru můžeme zapsat

$$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{potenciální energie dipólu}). \quad (23.38)$$

Z rov. (23.37) a (23.38) plyne, že potenciální energie dipólu je nejmenší ($E_p = -pE$) pro $\theta = 0$, tj. když \mathbf{p} a \mathbf{E} mají tentýž směr a orientaci; dipól je ve stabilní rovnováze. A naopak, potenciální energie je největší ($E_p = pE$) pro $\theta = 180^\circ$, tj. když \mathbf{p} a \mathbf{E} mají opačnou orientaci; dipól je přitom v rovnováze labilní.

KONTROLA 5: Na obrázku jsou čtyři různé polohy dipólu ve vnějším elektrickém poli. Seřadte je sestupně (a) podle velikosti momentu sil působícího na dipól, (b) podle potenciální energie dipólu.

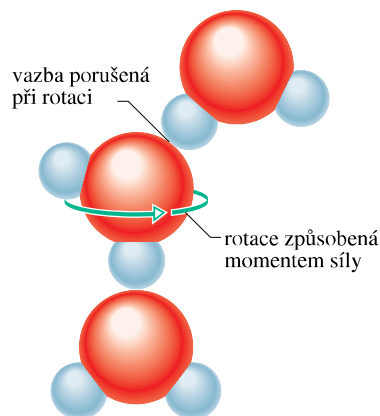


Mikrovlnné vaření

Ve vodě, v níž se molekuly mohou relativně volně pohybovat, ovlivňuje elektrické pole buzené každým molekulárním dipólem jiné dipóly v jeho okolí. V důsledku toho se molekuly mohou vázat do skupin po dvou nebo po třech, protože záporný (kyslíkový) konec jednoho dipólu a kladný (vodíkový) konec jiného dipólu se navzájem přitahují. Při vytváření takových skupin se elektrická potenciální energie dipólů přeměňuje na kinetickou energii chaotického pohybu skupin i jejich okolních molekul. Současně se skupiny rozbíjejí srážkami mezi molekulami a přenos energie

probíhá také opačně (energie chaotického pohybu se mění v potenciální elektrickou energii molekulárních dipólů). Teplota vody (která souvisí se střední kinetickou energií molekul) se tudíž nemění, protože v průměru je výsledný přenos energie nulový.

V mikrovlnné troubě, v níž jsou generovány mikrovlny, je však situace jiná. Elektrické pole mikrovln rychle osciluje. Je-li v troubě voda, toto oscilující pole působí na molekuly vody časově proměnným momentem síly, který otáčí molekulami tam a zpět ve snaze natočit jejich dipólový moment souhlasně se směrem vektoru intenzity pole. Molekuly, které jsou vázány ve skupinách po dvou, se mohou otáčet kolem osy dané vazbou mezi nimi a zůstávají spojené, ale ve skupině tří spojených molekul se alespoň jedna ze dvou vazeb musí porušit (obr. 23.19).



Obr. 23.19 Skupina tří molekul vody. Moment síly způsobený oscilujícím elektrickým polem v mikrovlnné troubě rozbije jednu z vazeb mezi molekulami a tím celou skupinu.

Energii potřebnou k rozbití těchto vazeb dodává elektrické pole mikrovln. Molekuly, které se odštěpí ze skupin, mohou vytvářet nové skupiny a přenášet tak potenciální elektrickou energii, kterou právě získaly, do kinetické energie chaotického pohybu. Tuto energii voda získává při vytváření skupin, ale neztrácí ji, když jsou skupiny rozbíjeny (působením elektrického pole mikrovln), a proto teplota vody stoupá. Potraviny tedy mohou být uvařeny v mikrovlnné troubě díky ohřívání vody, kterou obsahují. Kdyby molekula vody netvořila elektrický dipól, mikrovlnná trouba by nemohla pracovat. Frekvence mikrovln (2,45 GHz) odpovídá rezonanční frekvenci molekul vody.

PŘÍKLAD 23.9

Neutrální molekula vody má ve svém plynném stavu elektrický dipólový moment $6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$.

(a) Jaká je vzdálenost středů kladného a záporného náboje v molekule?

ŘEŠENÍ: V této molekule je deset protonů a deset elektronů. Velikost dipólového momentu je tedy

$$p = Qd = (10e)(d),$$

kde d je vzdálenost, kterou hledáme, a e je elementární náboj. Proto

$$\begin{aligned} d &= \frac{p}{10e} = \frac{(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})}{10(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = \\ &= 3,9 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3,9 \text{ pm}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato vzdálenost je velmi malá, je menší než poloměr atomu vodíku.

(b) Jakým maximálním momentem síly může na molekulu působit pole o intenzitě $1,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$? (Takové pole se dá snadno vytvořit v laboratoři.)

ŘEŠENÍ: Z rov. (23.33) vidíme, že moment síly je maximální pro $\theta = 90^\circ$. Dosazením této hodnoty do rov. (23.33) dostáváme

$$\begin{aligned} M &= pE \sin \theta = \\ &= (6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})(1,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}) \sin 90^\circ = \\ &= 9,3 \cdot 10^{-26} \text{ N}\cdot\text{m}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jakou práci musí vykonat vnější síla, aby otočila molekulu vody o 180° , je-li molekula na počátku ve stabilní rovnovážné poloze $\theta = 0$?

ŘEŠENÍ: Práce je rovna rozdílu potenciální energie v poloze $\theta = 180^\circ$ a $\theta = 0$. Užitím rov. (23.37) dostáváme

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= E_p(180^\circ) - E_p(0) = \\ &= (-pE \cos 180^\circ) - (-pE \cos 0) = \\ &= 2pE = 2(6,2 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m})(1,5 \cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}) = \\ &= 1,9 \cdot 10^{-25} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

PŘEHLED & SHRUTÍ**Elektrické pole**

Elektrostatické působení nabitých těles vysvětlujeme tím, že každý náboj budí v prostoru kolem sebe elektrické pole. Elektrostatická síla působící na libovolný náboj je způsobena elektrickým polem, které v daném místě budí ostatní náboje.

Definice intenzity elektrického pole

Intenzita elektrického pole \mathbf{E} (neboli elektrická intenzita) v daném bodě je definována pomocí elektrostatické síly \mathbf{F} , kterou v tomto bodě působí pole na kladný testovací náboj Q_0 :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_0}. \quad (23.1)$$

Elektrické siločáry

Elektrické siločáry slouží k zobrazení směru a velikosti elektrického pole. Vektor elektrické intenzity v určitém bodě leží v tečně k siločáře procházející tímto bodem. Hustota siločár v určitém místě je úměrná velikosti intenzity v tomto místě. Siločáry začínají v kladných nábojích (nebo v nekonečnu) a končí v záporných nábojích (nebo v nekonečnu).

Pole bodového náboje

Velikost E elektrické intenzity \mathbf{E} buzené bodovým nábojem Q je ve vzdálenosti r od tohoto náboje rovna

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{r^2}. \quad (23.3)$$

Elektrická intenzita \mathbf{E} je orientována směrem od budícího náboje, pokud je kladný, a směrem k němu, pokud je záporný.

Pole elektrického dipólu

Elektrický dipól je soustava dvou bodových nábojů stejné velikosti Q , ale opačného znaménka; jejich vzdálenost je d . Dipólový moment \mathbf{p} má velikost Qd a směřuje od záporného náboje ke kladnému. Velikost elektrické intenzity buzené dipólem ve vzdáleném bodě na ose dipólu (která probíhá oběma náboji) je

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{p}{z^3}, \quad (23.9)$$

kde z je vzdálenost daného bodu od středu dipólu.

Pole spojitě rozložených nábojů

Intenzitu elektrického pole *spojitě rozloženého náboje* najdeme tak, že nábojové elementy považujeme za bodové náboje a integrací sečteme dílčí pole jimi buzená.

Síla působící na bodový náboj v elektrickém poli

Je-li bodový náboj Q umístěn do elektrického pole o intenzitě \mathbf{E} , působí na něj elektrostatická síla

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E}. \quad (23.28)$$

Je-li náboj Q kladný, má \mathbf{F} stejnou orientaci jako \mathbf{E} , pro Q záporné má \mathbf{F} orientaci opačnou.

Dipól v elektrickém poli

Je-li elektrický dipól s momentem \mathbf{p} umístěn do elektrického pole o intenzitě \mathbf{E} , působí na něj pole silovým momentem \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (23.34)$$

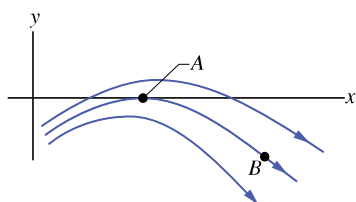
Dipól má potenciální energii E_p , která souvisí s jeho směrem vzhledem k vektoru elektrické intenzity:

$$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}. \quad (23.38)$$

Tato potenciální energie je rovna nule, je-li moment dipólu \mathbf{p} kolmý k intenzitě \mathbf{E} ; je nejmenší ($E_p = -pE$), má-li \mathbf{p} stejný směr a orientaci jako \mathbf{E} , a je největší ($E_p = pE$), má-li \mathbf{p} stejný směr, ale opačnou orientaci než \mathbf{E} .

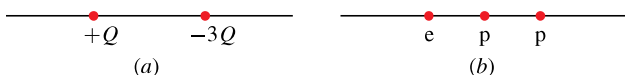
OTÁZKY

1. Na obr. 23.20 jsou tři elektrické siločáry. Jaký je směr a orientace elektrostatické síly, která působí na kladný testovací náboj, umístěný (a) v bodě A, (b) v bodě B? (c) Jestliže testovací náboj uvolníme, ve kterém z těchto bodů bude mít větší zrychlení?



Obr. 23.20 Otázka 1

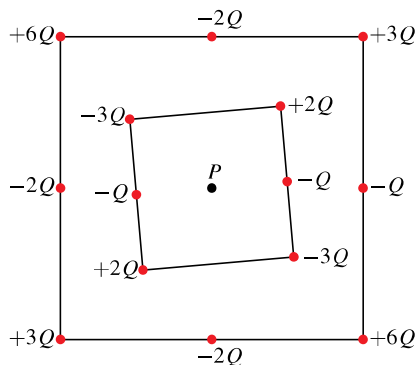
2. Obr. 23.21a zobrazuje dvě nabitě částice na přímce. (a) Kde je na ní bod (jinde než v nekonečnu), v němž je výsledné elektrické pole nulové: mezi náboji, vlevo od nich, nebo vpravo? (b) Existuje bod mimo přímku (jiný než v nekonečnu), v němž je výsledné elektrické pole nulové?



Obr. 23.21 Otázky 2 a 3

3. Na obr. 23.21b jsou dva protony a jeden elektron na přímce, ve stejných vzdálenostech. Kde je na této přímce bod (jinde než v nekonečnu), ve kterém je výsledné elektrické pole nulové: vlevo od částic, vpravo od nich, mezi dvěma protony, nebo mezi elektronem a bližším protonem?

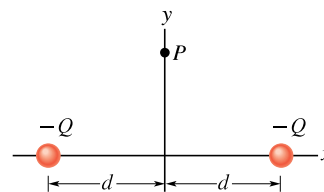
4. Na obr. 23.22 jsou dvě čtvercová uspořádání nabitých částic.



Obr. 23.22 Otázka 4

Čtverce mají společný střed P , ale různoběžné strany. Částice jsou rozloženy po obvodu čtverců ve vzdálenostech d nebo $d/2$. Jaká je velikost a směr výsledné intenzity v bodě P ?

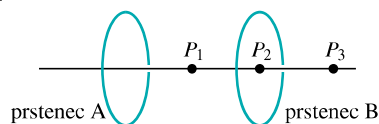
5. Na obr. 23.23 jsou dvě částice s nábojem $-Q$ umístěny symetricky vzhledem k ose y ; každá budí v bodě P na této ose elektrické pole. (a) Je velikost intenzit těchto polí v bodě P stejná? (b) Směřuje vektor každé z intenzit směrem k náboji, který ji budí, nebo směrem od něho? (c) Je velikost výsledné intenzity v bodě P rovna součtu velikostí intenzit polí jednotlivých nábojů (tj. je rovna $2E$)? Zesílí se, nebo se vyruší (d) x -ové, (e) y -ové složky vektorů intenzit? (f) Jaký směr má výsledná intenzita v bodě P ?



Obr. 23.23 Otázka 5

6. Tři nevodivé rovnoměrně nabitě tyče mají tvar segmentů kružnice se stejným poloměrem. Tyč A má náboj $+2Q$ a tvoří oblouk, jemuž odpovídá středový úhel 30° ; tyč B má náboj $+6Q$ a tvoří oblouk, jemuž odpovídá středový úhel 90° ; tyč C má náboj $+4Q$ a tvoří oblouk se středovým úhlem 60° . Seřaďte tyče sestupně podle velikosti jejich délkové hustoty náboje.

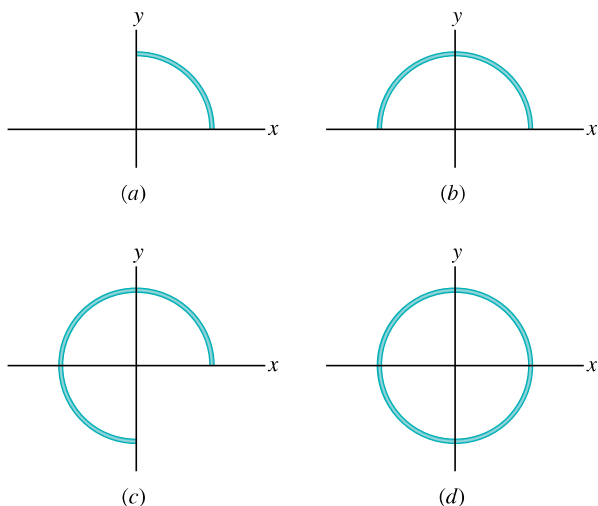
7. Na obr. 23.24 jsou dva stejné kruhové nevodivé prstence se středy na společné ose. Ve třech různých případech jsou na prstencích A a B rovnoměrně rozloženy náboje (1) Q_0 a Q_0 , (2) $-Q_0$ a $-Q_0$, (3) $-Q_0$ a Q_0 . Seřaďte jednotlivé případy sestupně podle velikosti výsledné intenzity (a) v bodě P_1 uprostřed mezi prstenci, (b) v bodě P_2 ve středu prstence B, (c) v bodě P_3 vpravo od prstence B.



Obr. 23.24 Otázka 7

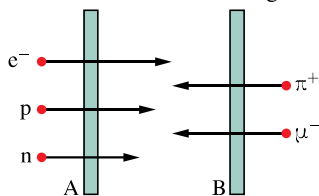
8. Plastiková tyč tvaru čtvrtiny kružnice s rovnoměrně rozloženým nábojem $+Q$ (obr. 23.25a) budí ve středu kružnice (v po-

částku souřadnicového systému) elektrické pole s intenzitou o velikosti E . Na obr. 23.25b, c, d jsou postupně přidávány další podobné tyče se stejným rovnoměrně rozloženým nábojem $+Q$, až je kružnice úplná. Páté uspořádání (které by mohlo být označeno jako obr. 23.25e) je podobné jako obr. 23.25d s tím rozdílem, že tyč ve čtvrtém kvadrantu má náboj $-Q$. Seřadte těchto pět uspořádání sestupně podle velikosti elektrické intenzity ve středu kružnice.



Obr. 23.25 Otázka 8

9. Na obr. 23.26 prochází elektron e^- malým otvorem v desce A a pohybuje se směrem k desce B. Homogenní elektrické pole

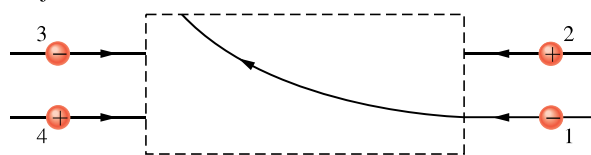


Obr. 23.26 Otázka 9

v prostoru mezi deskami zpomaluje elektron, aniž by ho vychylovalo. (a) Jaký je směr pole? (b) Čtyři jiné částice (proton p , pion π^+ , mion μ^- a neutron n) procházejí podobně malými otvory buď v desce A, nebo v desce B a pak se pohybují v prostoru mezi deskami. Určete pro každou z těchto částic, zda velikost její rychlosti v oblasti mezi deskami stoupá, klesá, nebo se nemění.

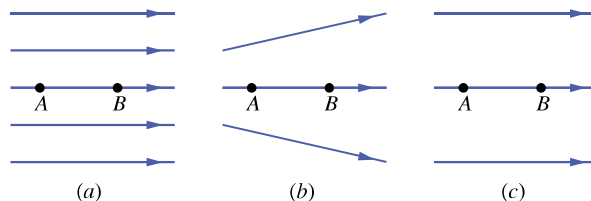
10. Obr. 23.27 ukazuje trajektorii, kterou proletěla nabitá čás-

tice 1 v pravoúhlé oblasti s homogenním elektrickým polem; částice byla vychýlena směrem k hornímu okraji stránky. (a) Je intenzita \mathbf{E} orientována směrem vlevo, vpravo, k hornímu okraji, nebo k dolnímu okraji stránky? (b) Tři jiné nabitě částice vstupují do elektrického pole. Které budou vychýleny směrem k hornímu okraji oblasti a které směrem k dolnímu?



Obr. 23.27 Otázka 10

11. Na obr. 23.28 jsou tři uspořádání elektrických siločár. V každém uspořádání je v bodě A z klidu uvolněn proton, je urychlován elektrickým polem a prochází bodem B. Body A a B mají ve všech třech uspořádáních stejnou vzdálenost. Seřadte sestupně tato uspořádání podle velikosti hybnosti, které proton dosáhne v bodě B.



Obr. 23.28 Otázka 11

12. (a) V kontrole 5 určete, zda je práce vykonaná polem při otočení dipólu z polohy (1) do polohy (2) kladná, záporná, nebo nulová. (b) Jestliže se místo toho dipól otočí z polohy (1) do polohy (4), je práce vykonaná polem větší, menší, nebo stejná jako v (a)?

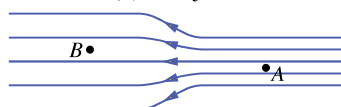
13. Hodnoty potenciální elektrické energie pro čtyři polohy dipólu v elektrickém poli jsou (1) $-5E_p$, (2) $-7E_p$, (3) $3E_p$, (4) $5E_p$, kde E_p je kladné. Seřadte polohy sestupně podle velikosti (a) úhlu mezi dipólovým momentem \mathbf{p} a intenzitou \mathbf{E} , (b) momentu síly působícího na dipól.

14. Jestliže za suchého dne přejdete po některém druhu koberce a pak se dotknete kovové kliky dveří nebo (pro větší legraci) něčí šije, může přeskóčit jiskra. Proč se tato jiskra objeví? Její jas a hlasitost můžete zvýšit, jestliže dotek provedete nataženým prstem nebo ještě lépe kovovým klíčem.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 23.3 Elektrické siločáry

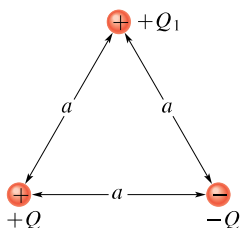
1C. Na obr. 23.29 jsou znázorněny siločáry elektrického pole ležícího v rovině nákresny. V levé části obrázku mají siločáry dvojnásobnou vzdálenost než v části pravé. (a) Jak velká síla působí na proton v bodě A , je-li velikost elektrické intenzity v tomto bodě $40 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$? (b) Jaká je velikost intenzity v bodě B ?



Obr. 23.29 Cvičení 1

2C. Načrtněte kvalitativně elektrické siločáry pro dva blízké bodové náboje $+Q$ a $-2Q$.

3C. Na obr. 23.30 jsou tři bodové náboje, které leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Načrtněte siločáry pole, které budí náboje $+Q$ a $-Q$ a určete z nich směr síly, která působí na náboj $+Q_1$ v důsledku přítomnosti ostatních dvou nábojů. (*Tip:* obr. 23.6.)



Obr. 23.30 Cvičení 3

4C. Načrtněte kvalitativně siločáry pole vně a mezi dvěma soustřednými vodivými kulovými slupkami. Na vnitřní slupce je rovnoměrně rozložen kladný náboj Q_1 , na vnější slupce je rovnoměrně rozložen záporný náboj $-Q_2$. Uvažujte případy $Q_1 > Q_2$, $Q_1 = Q_2$ a $Q_1 < Q_2$.

5C. Načrtněte kvalitativně siločáry pole, které budí tenký kruhový rovnoměrně nabitý disk o poloměru R . (*Tip:* Uvažujte jako limitní případy body velmi blízké disku, v nichž je vektor elektrické intenzity kolmý k jeho povrchu, a body velmi vzdálené, v nichž je elektrické pole podobné poli bodového náboje.)

ODST. 23.4 Elektrické pole bodového náboje

6C. Jak velký je bodový náboj, který v bodě vzdáleném $1,00 \text{ m}$ budí elektrické pole o intenzitě $1,00 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$?

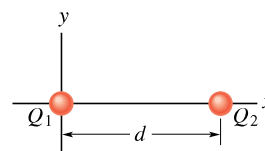
7C. Jak velký je bodový náboj, který v bodě vzdáleném 50 cm budí elektrické pole o intenzitě $2,00 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$?

8C. Dva opačné bodové náboje stejné velikosti $2,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ jsou od sebe vzdáleny 15 cm . Jaká je velikost a směr elektrické intenzity v bodě, který je uprostřed mezi oběma náboji?

9C. Atom plutonia 239 má poloměr jádra $6,64 \text{ fm}$ a atomové číslo $Z = 94$. Určete velikost a směr elektrické intenzity na povrchu jádra za předpokladu, že je kladný náboj v jádře rozdělen rovnoměrně.

10Ú. Částice s nábojem $-Q_1$ se nachází v počátku osy x . (a) Kam bychom měli umístit druhou částici s nábojem $-4Q_1$, aby výsledné elektrické pole bylo nulové v bodě $x = 2,0 \text{ mm}$? (b) Jestliže je naopak do nalezeného bodu umístěna částice s nábojem $+4Q_1$, jaký bude v bodě $x = 2,0 \text{ mm}$ směr výsledné intenzity?

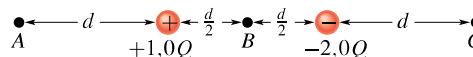
11Ú. Na obr. 23.31 jsou dva bodové náboje $Q_1 = +1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ a $Q_2 = +3,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$ ve vzdálenosti $d = 10 \text{ cm}$ od sebe. Zakreslete intenzitu jejich výsledného elektrického pole $E(x)$ jako funkci x pro kladné i záporné hodnoty x . (Považujte E za kladné, směřuje-li vektor \mathbf{E} vpravo.)



Obr. 23.31 Úlohy 11 a 12

12Ú. (a) Na obr. 23.31 jsou dva bodové náboje $Q_1 = -5Q$ a $Q_2 = +2Q$ ve vzdálenosti d od sebe. Nalezněte bod (nebo body), v nichž je jejich výsledné elektrické pole nulové. (b) Načrtněte kvalitativně elektrické siločáry.

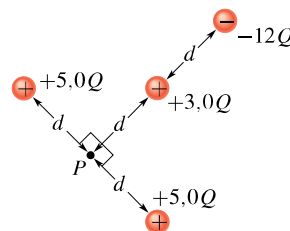
13Ú. Na obr. 23.32 jsou dva bodové náboje $+1,0Q$ a $-2,0Q$ ve vzdálenosti d od sebe. (a) Určete elektrickou intenzitu \mathbf{E} v bodech A , B , C . (b) Načrtněte průběh elektrických siločar.



Obr. 23.32 Úloha 13

14Ú. Dva náboje $Q_1 = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ a $Q_2 = -4,0Q_1$ jsou od sebe vzdáleny 50 cm . Najděte takový bod na přímce procházející oběma náboji, ve kterém je elektrická intenzita nulová.

15Ú. Na obr. 23.33 určete, jaká je v bodě P intenzita pole, buzeného čtyřmi zobrazenými náboji.



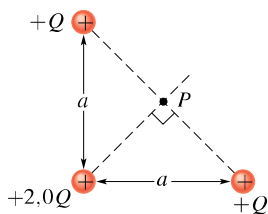
Obr. 23.33 Úloha 15

16Ú. Proton a elektron leží ve dvou vrcholech rovnostranného trojúhelníka o straně délky $2,0 \cdot 10^{-6}$ m. Jaká je velikost elektrické intenzity ve třetím vrcholu?

17Ú. Na hodinovém ciferníku jsou rozmístěny záporné bodové náboje $-Q, -2Q, -3Q, \dots, -12Q$ v místech odpovídajících číslic (1, 2, ..., 12). Hodinové ručičky neovlivňují výsledné elektrické pole buzené bodovými náboji. V kolik hodin ukazuje malá ručička ve směru intenzity pole ve středu ciferníku? (Tip: Využijte symetrii úlohy.)

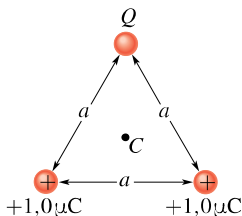
18Ú. V každém vrcholu rovnostranného trojúhelníka o straně délky 20 cm je umístěn jeden elektron. Jaká je velikost elektrické intenzity ve středu jedné strany?

19Ú. Na obr. 23.34 určete směr a velikost elektrické intenzity v bodě P .



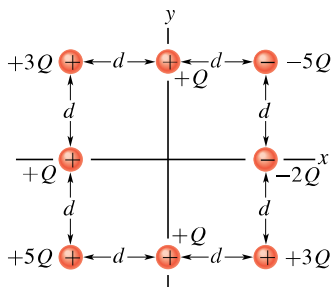
Obr. 23.34 Úloha 19

20Ú. Na obr. 23.35 jsou náboje umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Určete, pro jakou hodnotu Q (velikost i znaménko) je výsledné elektrické pole v bodě C (v těžišti trojúhelníka) nulové.



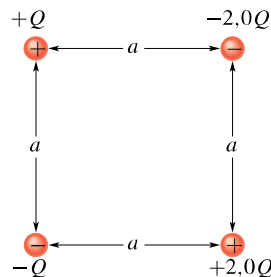
Obr. 23.35 Úloha 20

21Ú. Na obr. 23.36 jsou čtyři náboje umístěny ve vrcholech čtverce a čtyři další leží uprostřed jeho stran. Vzdálenost sousedních nábojů na obvodu čtverce je d . Jaká je velikost a směr vektoru elektrické intenzity ve středu čtverce?



Obr. 23.36 Úloha 21

22Ú. Jaká je velikost a směr elektrické intenzity uprostřed čtverce na obr. 23.37, je-li $Q = 1,0 \cdot 10^{-8}$ C a $a = 5,0$ cm?



Obr. 23.37 Úloha 22

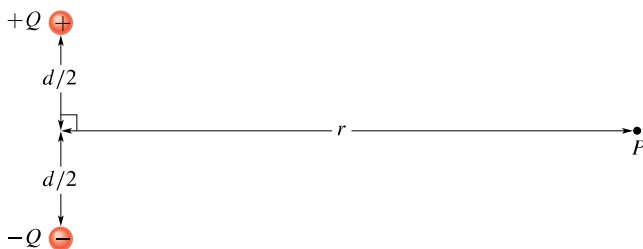
ODST. 23.5 Elektrické pole dipólu

23C. Vypočítejte elektrický dipólový moment soustavy elektronu a protonu, které jsou od sebe vzdáleny 4,30 nm.

24C. Nechť jsou oba náboje na obr. 23.9 kladné. Za předpokladu $z \gg d$ dokažte, že velikost intenzity E v bodě P na obrázku je

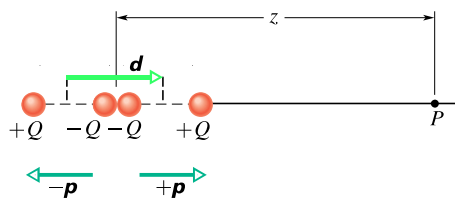
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{z^2}$$

25Ú. Nalezněte na obr. 23.38 velikost a směr elektrické intenzity buzené dipólem v bodě P , který leží ve vzdálenosti r od středu dipólu. Výsledek zapište pro $r \gg d$ pomocí dipólového momentu \mathbf{p} .



Obr. 23.38 Úloha 25

26Ú*. Elektrický kvadrupól. Elektrický kvadrupól na obr. 23.39



Obr. 23.39 Úloha 26

je vytvořen dvěma elektrickými dipóly, jejichž dipólové momenty $\mathbf{p}, -\mathbf{p}$ jsou stejně velké, opačně orientované a posunutě o \mathbf{d} vůči sobě (zde* $\mathbf{d} \parallel \mathbf{p}$). Dokažte, že intenzita elektrického

* Druhý typ ($\mathbf{d} \perp \mathbf{p}$) by odpovídal obr. 23.37 s náboji uvedených znamének, ale stejných velikostí.

pole buzeného kvadrupólem v bodě P , který leží na jeho ose daleko od jeho středu ($z \gg d$), má velikost

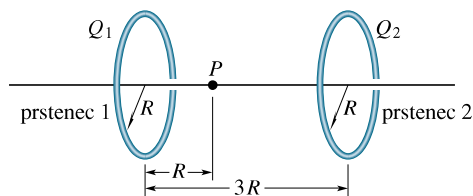
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cdot 2Qd^2}{z^4},$$

kde $2Qd^2$ je kvadrupólový moment tohoto nábojového seskupení.

ODST. 23.6 Elektrické pole nabitého vlákna

27C. Načrtněte zhruba průběh elektrické intenzity na ose nabitého prstence o poloměru 6,0 cm s rovnoměrně rozloženým nábojem úhrnné velikosti $1,0 \cdot 10^{-8}$ C.

28C. Na obr. 23.40 jsou dva rovnoběžné nevodivé prstence se společnou osou. Prstenec 1 je rovnoměrně nabit nábojem Q_1 a má poloměr R ; prstenec 2 je rovnoměrně nabit nábojem Q_2 a má stejný poloměr R . Vzdálenost prstenců je $3R$. V bodě P na ose ve vzdálenosti R od prstence 1 je výsledné elektrické pole nulové. Jaký je poměr nábojů Q_1/Q_2 ?



Obr. 23.40 Cvičení 28

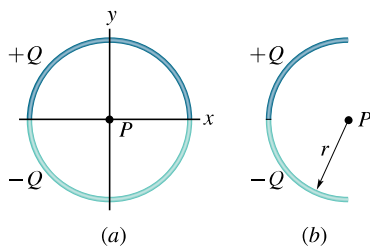
29Ú. V jaké vzdálenosti od středu rovnoměrně nabitého prstence o poloměru R na jeho ose má elektrická intenzita maximální velikost?

30Ú. Nechť je elektron vázán na osu nabitého prstence z čl. 23.6. Ukažte, že pod vlivem elektrostatické síly bude podél osy kmitat s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eQ}{mR^3}},$$

kde Q je náboj prstence a m je hmotnost elektronu.

31Ú. Na obr. 23.41a dvě plastické tyče ohnuté do tvaru půlkružnice tvoří kružnici o poloměru R ležící v rovině xy . Osa x prochází styčnými body půlkružnic a náboj na obou tyčích je rozložen rovnoměrně. Jedna tyč má kladný náboj $+Q$, druhá záporný náboj $-Q$. Jaká je velikost a směr intenzity \mathbf{E} v bodě P ve středu kružnice?

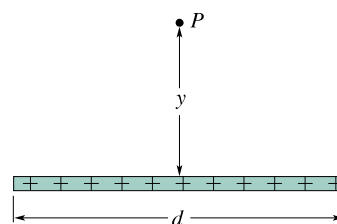


Obr. 23.41 Úlohy 31 a 32

32Ú. Tenká skleněná tyč je ohnuta do tvaru půlkružnice o poloměru r . Na její horní polovině je rovnoměrně rozložen náboj $+Q$, na dolní polovině náboj $-Q$ (obr. 23.41b). Najděte velikost a směr intenzity \mathbf{E} ve středu půlkružnice.

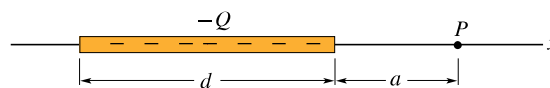
33Ú. Tenká nevodivá tyč konečné délky d je rovnoměrně nabitá nábojem Q . Dokažte, že velikost elektrické intenzity E v bodě P na ose kolmé k tyči (obr. 23.42) je

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{1}{(d^2 + 4y^2)^{1/2}}.$$



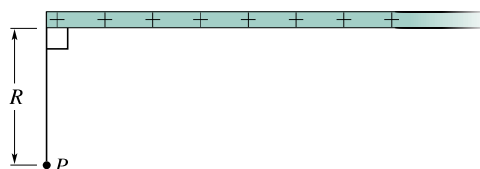
Obr. 23.42 Úloha 33

34Ú. Na obr. 23.43 je nevodivá tyč délky d rovnoměrně nabitá nábojem $-Q$. (a) Určete délkovou hustotu náboje tyče. (b) Určete elektrickou intenzitu v bodě P ve vzdálenosti a od konce tyče. (c) Kdyby byl bod P velmi daleko od tyče vzhledem k její délce d , chovala by se tyč jako bodový náboj. Ukažte, že odpověď na otázku (b) se pro $a \gg d$ redukuje na vztah pro intenzitu pole bodového náboje.



Obr. 23.43 Úloha 34

35Ú*. Na obr. 23.44 je „polonekonečná“ nevodivá tyč rovnoměrně nabitá nábojem o délkové hustotě τ . Ukažte, že vektor elektrické intenzity v bodě P svírá s tyčí úhel 45° a že tento výsledek nezávisí na vzdálenosti R . (Tip: Najděte v bodě P složku vektoru intenzity s tyčí rovnoběžnou a k tyči kolmou a porovnejte je.)



Obr. 23.44 Úloha 35

ODST. 23.7 Elektrické pole nabitého disku

36C. Disk o poloměru 2,5 cm má na svém horním povrchu plošnou hustotu náboje $5,3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. Jaká je velikost elektrické intenzity na ose disku v bodě ve vzdálenosti $z = 12$ cm od disku?

37Ú. (a) Jaký náboj musí mít disk z př. 23.6 (obr. 23.13), aby elektrická intenzita na jeho povrchu měla v jeho středu velikost, při níž dochází k jiskrovému elektrickému průrazu vzduchu (vznik jiskry)? Uvažujte disk o poloměru 2,5 cm a použijte údaje pro vzduch z tab. 23.1. (b) Předpokládejte, že každý atom má efektivní průřez $0,015 \text{ nm}^2$. Kolik atomů tvoří povrch disku? (c) Náboj v (a) vzniká v důsledku toho, že některé z povrchových atomů mají jeden přebytečný elektron. Jaká část povrchových atomů musí mít přebytečný elektron, aby došlo k průrazu?

38Ú. V jaké vzdálenosti na ose rovnoměrně nabitého plastického disku o poloměru R je velikost elektrické intenzity rovna polovině hodnoty, kterou má na povrchu disku v jeho středu?

ODST. 23.8 Bodový náboj v elektrickém poli

39C. Elektron je uvolněn z klidu v homogenním elektrickém poli o intenzitě $2,00 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Vypočítejte jeho zrychlení. (Vliv gravitačního pole zanedbejte.)

40C. Elektron je urychlován elektrickým polem východním směrem se zrychlením $1,80 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Určete velikost a směr elektrické intenzity.

41C. Vypočítejte velikost síly, kterou působí elektrický dipól s dipólovým momentem $3,6 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$ na elektron, který se nachází na ose dipólu ve vzdálenosti 25 nm od jeho středu. Předpokládejte, že tato vzdálenost je velká vzhledem k rozměru dipólu.

42C. K průrazu vlhkého vzduchu (jeho molekuly jsou ionizovány) dochází v elektrickém poli o intenzitě $3,0 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Jak velkou elektrostatickou silou působí toto pole na (a) elektron, (b) jednomocný kladný iont (tj. jemuž chybí jeden elektron)?

43C. Částice α (jádro atomu helia) má hmotnost $6,64 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a náboj $+2e$. Jaká je velikost a směr elektrické intenzity, která vyrovná účinek tíhové síly?

44C. Nabitý mrak budí ve vzduchu v blízkosti zemského povrchu elektrické pole. Je-li do tohoto pole umístěna částice s nábojem $-2,0 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, působí na ni směrem dolů elektrostatická síla $3,0 \cdot 10^{-6} \text{ N}$. (a) Jaká je velikost elektrické intenzity? (b) Jaká je velikost a směr elektrostatické síly, která působí na proton umístěný v tomto elektrickém poli? (c) Jaká je velikost gravitační síly působící na proton? (d) Jaký je v tomto případě poměr velikostí elektrostatické síly a síly gravitační?

45C. Vektor elektrické intenzity v atmosféře blízko zemského povrchu směřuje dolů a má velikost asi $150 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Chceme nabít kouli ze síry, jejíž váha je 4,4 N tak, aby „plula“ v atmosféře. (a) Jaký náboj (velikost i znaménko) musíme použít? (b) Proč je experiment neproveditelný?

46C. (a) Jaké má zrychlení elektron v homogenním elektrickém poli o intenzitě $1,40 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$? (b) Elektron je na počátku v klidu. Za jak dlouho by dosáhl rychlosti rovné jedné desetíně rychlosti světla? (c) Jakou dráhu by za tuto dobu urazil? (Užijte newtonovskou mechaniku.)

47C. Svazky protonů s vysokou energií mohou být vytvářeny v „dělech“, v nichž jsou urychlovány elektrickým polem. (a) Jaké

bude zrychlení protonu, je-li intenzita elektrického pole v dělu $2,00 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$? (b) Jakou rychlost proton získá, jestliže ho pole urychluje na dráze 1,00 cm?

48C. Elektron pohybující se rychlostí $5,00 \cdot 10^8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ vletí do elektrického pole o intenzitě $1,00 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ ve směru vektoru intenzity, takže se zpomaluje. (a) Jakou dráhu elektron v poli urazí, než se zastaví? (b) Jaká doba přitom uplyne? (c) Oblast, v níž působí elektrické pole, zúžíme na 8,00 mm. Jakou část své počáteční kinetické energie elektron v poli ztratí?

49C. Kulová vodní kapka o průměru 1,20 μm se vznáší v nepohyblivém vzduchu v důsledku působení atmosférického elektrického pole o intenzitě $E = 462 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ s orientací svisle dolů. (a) Jaká je hmotnost kapky? (b) Kolik má kapka přebytečných elektronů?

50C. V Millikanově pokusu (obr. 23.14) se olejová kapka o poloměru 1,64 μm a hustotě $851 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ vznáší v komoře C, kde působí směrem dolů elektrické pole o intenzitě $1,92 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Vyjádřete náboj kapky pomocí e . Vztlak vzduchu zanedbejte.

51Ú. Při jednom ze svých experimentů zjistil Millikan na jedné kapce v různých okamžicích následující náboje:

$$\begin{array}{lll} 6,563 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & 13,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & 19,71 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ 8,204 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & 16,48 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & 22,89 \cdot 10^{-19} \text{ C}, \\ 11,50 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & 18,08 \cdot 10^{-19} \text{ C}, & 26,13 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \end{array}$$

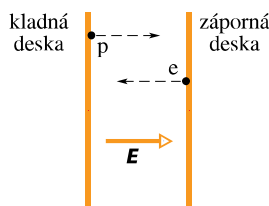
Jakou hodnotu elementárního náboje e mohl odvodit z těchto údajů?

52Ú. V prostoru mezi dvěma opačně nabitými deskami je homogenní elektrické pole. Z povrchu záporně nabitě desky se z klidu uvolní elektron a dopadne za dobu $1,5 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ na protější desku, která je ve vzdálenosti 2,0 cm. (a) Jakou má elektron rychlost při dopadu na druhou desku? (b) Jaká je velikost elektrické intenzity E ?

53Ú. Těleso o hmotnosti 10,0 g s nábojem $+8,00 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ se nachází v elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} , jejíž složky jsou $E_x = 3,00 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, $E_y = -600 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$, $E_z = 0$. (a) Jaká je velikost a směr elektrické síly působící na těleso? (b) Určete souřadnice tělesa v čase 3,00 s, je-li pro $t = 0$ v klidu v počátku souřadnicového systému.

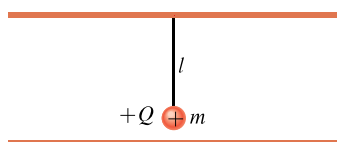
54Ú. V určitém okamžiku jsou složky rychlosti elektronu, pohybujícího se mezi dvěma rovnoběžnými nabitými deskami, $v_x = 1,5 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $v_y = 3,0 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Intenzita elektrického pole mezi deskami je $\mathbf{E} = (120 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})\mathbf{j}$. (a) Jaké je zrychlení elektronu? (b) Jaká bude rychlost elektronu poté, co jeho souřadnice x vzroste o 2,0 cm?

55Ú. Na obr. 23.45 jsou dvě velké nabitě rovnoběžné měděné desky, jejichž vzdálenost je 5,0 cm. Mezi deskami je homogenní elektrické pole. Ve stejném okamžiku se uvolní elektron ze záporně desky a proton z kladné desky. V jaké vzdálenosti od kladné desky se budou částice míjet? (Zanedbejte sílu, kterou na sebe částice působí navzájem.) Nepřekvapuje vás, že k řešení tohoto problému nepotřebujete znát intenzitu elektrického pole?



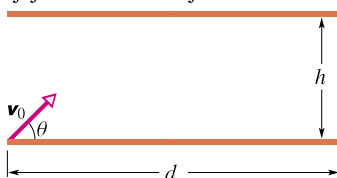
Obr. 23.45 Úloha 55

56Ú. Na obr. 23.46 je kyvadlo, zavěšené na horní ze dvou velkých vodorovných desek. Kyvadlo se skládá z malé nevodivé koule o hmotnosti m s nábojem $+Q$ a z nevodivého vlákna délky l . Jaká je perioda kmitů kyvadla, je-li mezi deskami vytvořeno homogenní elektrické pole o intenzitě E (a) nabitím horní desky záporně a dolní desky kladně, (b) opačným nabitím desek?



Obr. 23.46 Úloha 56

57Ú. Na obr. 23.47 jsou dvě vodorovné desky, dolní je nabitá kladně, horní záporně. Mezi deskami je tedy homogenní elektrické pole, jehož intenzita E směřuje vzhůru a má velikost $2,00 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Délka desek je $d = 10,0 \text{ cm}$ a jejich vzdálenost $h = 2,00 \text{ cm}$. Z levého okraje dolní desky je mezi desky vstřelen elektron. Jeho počáteční rychlost v_0 svírá s dolní deskou úhel $\theta = 45,0^\circ$ a má velikost $6,00 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) Narazí elektron na jednu z desek? (b) Pokud ano, na kterou desku a v jaké vzdálenosti od jejího levého okraje?



Obr. 23.47 Úloha 57

ODST. 23.9 Dipól v elektrickém poli

58C. Elektrický dipól skládající se z nábojů o velikosti $1,50 \text{ nC}$, jejichž vzdálenost je $6,20 \mu\text{m}$, se nachází v elektrickém poli

o intenzitě $1\,100 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. (a) Jak je velký jeho elektrický dipólový moment? (b) Jaký je rozdíl potenciálních energií dipólu, odpovídajících jeho paralelní a antiparalelní orientaci vzhledem k vektoru intenzity elektrického pole?

59C. Elektrický dipól se skládá z nábojů $+2e$ a $-2e$, jejichž vzdálenost je $0,78 \text{ nm}$. Nachází se v elektrickém poli o intenzitě $3,4 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Vypočítejte velikost momentu sil působícího na dipól, je-li dipólový moment orientován (a) souhlasně rovnoběžně, (b) kolmo, (c) nesouhlasně rovnoběžně vzhledem k elektrickému poli.

60Ú. Vyjádřete práci potřebnou k otočení dipólu o 180° v homogenním elektrickém poli o intenzitě E pomocí velikosti p dipólového momentu, velikosti E elektrické intenzity a počátečního úhlu θ_0 , který svírají vektory p a E .

61Ú. Najděte úhlovou frekvenci kmitů elektrického dipólu s dipólovým momentem o velikosti p a momentem setrvačnosti I v homogenním elektrickém poli s intenzitou o velikosti E (pro malé úhlové amplitudy oscilací kolem rovnovážné polohy).

62Ú. Elektrický dipól s dipólovým momentem

$$\mathbf{p} = (3,00\mathbf{i} + 4,00\mathbf{j})(1,24 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})$$

se nachází v elektrickém poli o intenzitě $\mathbf{E} = (4\,000 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})\mathbf{i}$. (a) Jakou má dipól potenciální energii? (b) Jaký moment síly na něj působí? (c) Jakou práci vykoná vnější síla, která otočí dipólem do polohy, v níž je dipólový moment roven

$$\mathbf{p} = (-4,00\mathbf{i} + 3,00\mathbf{j})(1,24 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m})?$$

PRO POČÍTAČ

63Ú. Dvě částice, každá s kladným nábojem Q , jsou umístěny pevně na ose y v bodech $y = 0$ a $y = -d$. (a) Napište výraz, který udává velikost výsledné elektrické intenzity v bodech na ose x určených vztahem $x = \alpha d$. (b) Sestrojte graf závislosti $E(\alpha)$ pro oblast $0 < \alpha < 4$. Z grafu určete hodnoty α , které dávají (c) maximální hodnotu E , (d) polovinu maximální hodnoty E .

64Ú. Pro údaje z úlohy 51 předpokládejte, že náboj Q kapky je dán vztahem $Q = ne$, kde n je přirozené číslo a e je elementární náboj. (a) Najděte n pro každé měření Q . (b) Proveďte lineární regresi hodnot $Q = f(n)$ a určete z ní e .

24

Gaussův zákon elektrostatiky



Podívejte se na zářivou krásu blesků při bouřce nad Manhattanem. Každý blesk přitom přenese z mraků na zemský povrch přibližně 10^{20} elektronů. Je možné určit průměr blesku? Vzhledem k tomu, že se na blesk díváme ze vzdálenosti několika kilometrů, můžeme porovnat jeho rozměry např. s rozměry automobilu?

24.1 NOVÝ POHLED NA COULOMBŮV ZÁKON

Chcete-li nalézt těžiště brambory, můžete to provést buď experimentálně, nebo pomocí složitého číselného výpočtu trojného integrálu. Jestliže má však brambora tvar elipsoidu, můžete z její symetrie určit přesně těžiště i bez výpočtu. V tom je značná výhoda symetrie. Se symetrickými situacemi se setkáváme ve všech oborech fyziky. Je-li to možné, snažíme se vyjádřit fyzikální zákony v takovém tvaru, aby se výhody symetrie mohly plně projevit.

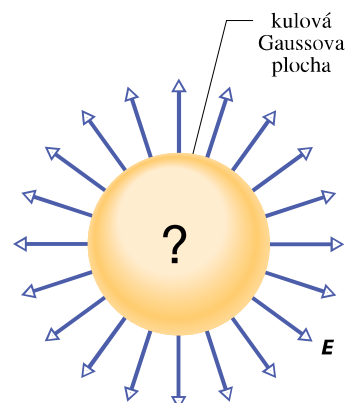
Coulombův zákon je hlavním zákonem elektrostatiky, ale nemá bohužel tvar, který by nám podstatně ulehčoval práci v situacích, které se vyznačují symetrií. Proto v této kapitole zavedeme jinou formulaci Coulombova zákona, kterou odvodil německý matematik a fyzik *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855). Tento zákon, zvaný **Gaussův zákon elektrostatiky**, může být s výhodou použit v některých případech symetrie v rozložení nábojů. Pro elektrostatické problémy je přitom zcela ekvivalentní *Coulombovu zákonu*. Který z těchto zákonů zvolíme, závisí pouze na povaze zkoumaného problému.

U Gaussova zákona je důležitá volba myšlené uzavřené plochy, zvané **Gaussova plocha**. Ta může mít libovolný tvar, ale nejvýhodnější je takový, který vyjadřuje symetrii zkoumaného problému. Proto volíme za Gaussovou plochu nejčastěji povrch koule, válce či jiného symetrického útvaru. Musí to však být vždy plocha *uzavřená*.

Představme si, že jsme vytvořili Gaussovou plochu kolem jisté konfigurace nábojů. Potom můžeme použít Gaussův zákon elektrostatiky.

Gaussův zákon vyjadřuje vztah mezi intenzitou elektrického pole na (uzavřené) Gaussově ploše a celkovým nábojem, který se nachází uvnitř této plochy.

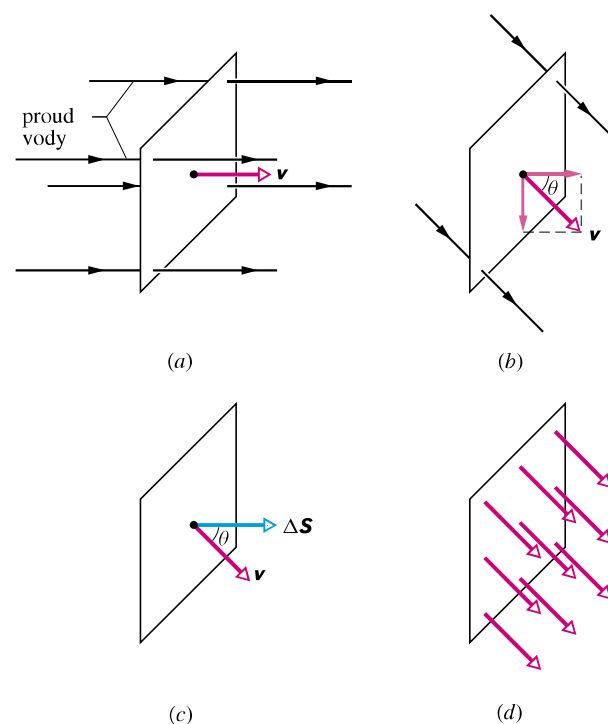
Na obr. 24.1 je znázorněna jednoduchá situace, kdy Gaussovou plochou je kulová plocha. Předpokládejme, že v každém bodě jejího povrchu existuje elektrické pole o intenzitě konstantní velikosti a směřující ven z koule. I bez znalosti Gaussova zákona můžeme usoudit, že uvnitř plochy musí existovat určitý (kladný) náboj. Jestliže *známe* Gaussův zákon, můžeme vypočítat, jak velký náboj se nachází uvnitř plochy. K výpočtu potřebujeme pouze vědět, „jak mnoho pole“ je na povrchu Gaussovy plochy. Toto „jak mnoho“ vyjadřujeme *tokem* elektrické intenzity danou plochou.



Obr. 24.1 Kulová Gaussova plocha. Mají-li vektory elektrické intenzity ve všech bodech povrchu stejnou velikost a míří-li ven z koule, je možné učinit závěr, že v objemu ohraničeném Gaussovou plochou se nachází kulově symetricky rozložený kladný náboj.

24.2 TOK

Předpokládejme podle obr. 24.2a, že proud vody o konstantní rychlosti \mathbf{v} prochází malou čtvercovou plochou



Obr. 24.2 (a) Homogenní proud vody pohybující se rychlostí \mathbf{v} kolmo k ploše čtverce o obsahu ΔS . (b) Vektor \mathbf{v} svírá s kolmicí k ploše čtverce úhel θ ; složka vektoru \mathbf{v} ve směru této kolmice je rovna $v \cos \theta$. (c) Vektor plochy $\Delta \mathbf{S}$ je kolmý k rovině čtverce a svírá s vektorem \mathbf{v} úhel θ . (d) Rychlostní pole \mathbf{v} v ploše čtverce.

o obsahu ΔS . Nechť $\Delta\Phi$ představuje *objemový tok* (objem za jednotku času) vody plochou. Jeho velikost závisí na úhlu, který svírá rychlost \mathbf{v} s rovinou plochy. Je-li \mathbf{v} kolmá k rovině, je $\Delta\Phi = v\Delta S$. Je-li vektor rychlosti \mathbf{v} rovnoběžný s plochou čtverce, pak jím neproudí žádná voda a $\Delta\Phi = 0$. Obecně $\Delta\Phi$ závisí na průmětu vektoru \mathbf{v} do kolmice k ploše čtverce (obr. 24.2b). Proto

$$\Delta\Phi = (v \cos \theta) \Delta S. \quad (24.1)$$

Dříve než budeme diskutovat tok, který se vyskytuje v elektrostatice, přepíšeme rov. (24.1) do vektorového tvaru. Uvažujme plochu $\Delta\mathcal{S}$ a pokládejme ji za rovinnou (obr. 24.2c). Definujme vektor $\Delta\mathbf{S}$ tak, že je k rovině plochy kolmý a jeho velikost je rovna jejímu obsahu ΔS . Potom můžeme napsat rov. (24.1) jako skalární součin vektoru rychlosti \mathbf{v} proudu vody a vektoru plochy $\Delta\mathbf{S}$ čtverce

$$\Delta\Phi = v\Delta S \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{S}, \quad (24.2)$$

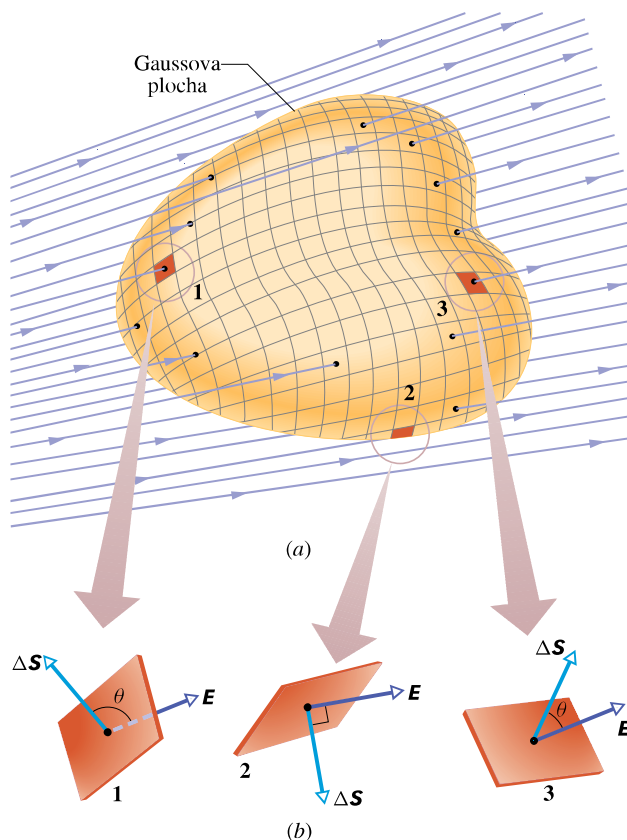
kde θ je úhel mezi \mathbf{v} a $\Delta\mathbf{S}$.

Slovo „tok“ má smysl, jestliže hovoříme např. o proudu vody plochou. Můžeme se však na rov. (24.2) dívat abstraktněji. Abychom to vysvětlili, uvědomme si, že můžeme přiřadit vektor rychlosti každému bodu v proudu vody. Soubor všech těchto vektorů vytváří *pole rychlostí*. Nyní můžeme interpretovat rov. (24.2) jako *tok rychlostního pole plochou, která je ohraničena uzavřenou křivkou* (obr. 24.2d). Podle této interpretace již tok neznačí, že plochou $\Delta\mathcal{S}$ musí téci něco hmatatelného rychlostí \mathbf{v} . Místo rychlosti \mathbf{v} můžeme použít libovolné vektorové pole \mathbf{a} a hovořit o jeho toku $\Delta\Phi = \mathbf{a} \cdot \Delta\mathbf{S}$.

24.3 TOK ELEKTRICKÉ INTENZITY

K definici toku elektrické intenzity uvažujme libovolnou (i nesymetrickou) Gaussovu plochu, nacházející se v nehomogenním elektrickém poli (obr. 24.3a). Rozdělme tuto plochu na plošky (např. čtverečky) $\Delta\mathcal{S}$ natolik malé, abychom mohli zanedbat jejich zakřivení a považovat je za rovinné. Každý z nich popíšeme vektorem $\Delta\mathbf{S}$, jehož velikost je rovna obsahu ΔS a jehož směr je ke čtverečku kolmý a je orientován ven z Gaussovy plochy. (Leží-li $\Delta\mathcal{S}$ na uzavřené ploše, orientujeme vektory $\Delta\mathbf{S}$ směrem ven.)

Protože čtverečky jsou libovolně malé, můžeme předpokládat, že elektrické pole \mathbf{E} na každém z nich je konstantní. Označme θ úhel, který spolu svírají vektory $\Delta\mathbf{S}$ a \mathbf{E} . Na obr. 24.3b jsme zvětšili tři ze čtverečků Gaussovy plochy (1, 2, 3) a vyznačili jsme u nich odpovídající úhel θ .



Obr. 24.3 (a) Gaussova plocha libovolného tvaru ležící v elektrickém poli. Plocha je rozdělena na malé čtverečky o obsahu ΔS . (b) Vektory elektrické intenzity \mathbf{E} a vektory $\Delta\mathbf{S}$ pro tři vyznačené čtverečky (1, 2, 3).

Tok elektrického pole Gaussovou plochou je součtem toků $\Delta\Phi_E$ jednotlivými čtverečky (obr. 24.3)

$$\Phi_E = \sum \Delta\Phi_E = \sum \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}. \quad (24.3)$$

Tato rovnice nám říká, že je třeba vzít každý čtvereček na Gaussově ploše, pro něj vyjádřit skalární součin obou vektorů $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}$ a algebraicky sečíst (s patřičnými znaménky) příspěvky od všech čtverečků, které tvoří Gaussovu plochu. Znaménko každého skalárního součinu určuje, zda je tok daným čtverečkem kladný, záporný, nebo nulový. Z tab. 24.1 plyne, že v případech typu 1, v nichž \mathbf{E} směřuje dovnitř plochy, je příspěvek k celkovému součtu vyjádřenému rov. (24.3) záporný. V případech typu 2, kdy \mathbf{E} leží v rovině čtverečku, je příspěvek nulový a v případech typu 3, kdy \mathbf{E} směřuje ven z plochy, je příspěvek kladný.

Definici toku elektrického pole uzavřenou plochou zpřesníme tím, že předpokládáme, že obsahy čtverečků v obr. 24.3a jsou stále menší. Vektor plošky se pak blíží v limitě k $d\mathbf{S}$. Suma v rov. (24.3) přechází v plošný integrál

Tabulka 24.1 Tři čtverečky na Gaussově ploše z obr. 24.3

Č.	θ	SMĚR \mathbf{E}	SOUČIN $\mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S}$
1	$> 90^\circ$	dovnitř plochy	záporný
2	$= 90^\circ$	rovnoběžně s plochou	nulový
3	$< 90^\circ$	ven z plochy	kladný

a tok intenzity elektrického pole definujeme vztahem

$$\Phi_E = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{tok elektrické intenzity Gaussovou plochou } \mathcal{S}). \quad (24.4)$$

Kroužek na integrálu znamená, že integrace probíhá přes uzavřenou plochu \mathcal{S} . Tok intenzity elektrického pole je skalární veličinou a jeho jednotkou v SI je $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$.

Rov. (24.4) je možné interpretovat ještě jinak, když použijeme hustotu elektrických siločár procházejících plochou jako míru intenzity elektrického pole \mathbf{E} na této ploše. Velikost E je pak úměrná počtu elektrických siločár připadajících na jednotkovou plochu. Skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ z rov. (24.4) je tedy úměrný počtu siločár, které procházejí plochou $d\mathcal{S}$. Protože integrace v rov. (24.4) probíhá přes celou uzavřenou Gaussovou plochu, vidíme odtud, že platí:

Tok Φ_E intenzity Gaussovou plochou je úměrný celkovému počtu siločár procházejících touto plochou.

PŘÍKLAD 24.1

Na obr. 24.4 je znázorněna Gaussova plocha tvořená povrchem válce o poloměru R , který se nachází v homogenním elektrickém poli \mathbf{E} . Osa válce je rovnoběžná se směrem pole. Jaký je tok Φ_E touto plochou?

ŘEŠENÍ: Tok je možno vyjádřit jako součet tří výrazů: toku levou podstavou a válce, pláštěm b válce a pravou podstavou c . Potom z rov. (24.4) plyne

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (24.5)$$

Pro všechny body na levé podstavě je úhel θ mezi \mathbf{E} a $d\mathbf{S}$ roven 180° a velikost intenzity E pole je konstantní. Je tedy

$$\begin{aligned} \int_a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \int_a E (\cos 180^\circ) dS = \\ &= -E \int_a dS = -ES, \end{aligned}$$

kde $\int dS = S$ je obsah podstavy πR^2 . Podobně pro pravou podstavu, kde $\theta = 0$:

$$\int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_c E (\cos 0^\circ) dS = ES.$$

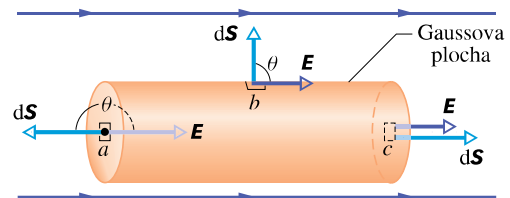
Konečně pro plášť válce, kde úhel $\theta = 90^\circ$ pro každý bod, je

$$\int_b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_b E (\cos 90^\circ) dS = 0.$$

Dosažením těchto výsledků do rov. (24.5) dostaneme

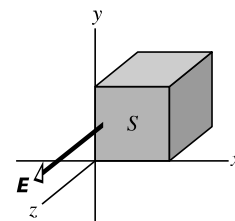
$$\Phi_E = -ES + 0 + ES = 0. \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výsledek nás zřejmě nepřekvapí, protože elektrické siločáry, které reprezentují elektrické pole, procházejí Gaussovou plochou tak, že vstupují do válce levou podstavou a vystupují z něj pravou podstavou; jejich celkový tok je tedy nulový.



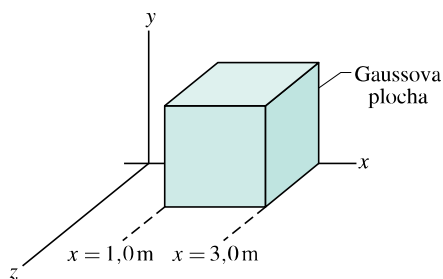
Obr. 24.4 Příklad 24.1. Gaussova plocha (plášť válce + podstavy) se nachází v homogenním elektrickém poli. Osa válce je rovnoběžná se směrem pole.

KONTROLA 1: Na obrázku je Gaussova plocha tvořená povrchem krychle, jejíž jedna stěna má obsah S . Krychle se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} , které směřuje v kladném směru osy z . Vyjádřete pomocí E a S tok (a) čelní stěnou (ležící v rovině xy), (b) zadní stěnou, (c) horní stěnou a (d) celým povrchem krychle.



PŘÍKLAD 24.2

Nehomogenní elektrické pole o intenzitě $\mathbf{E} = 3,0x\mathbf{i} + 4,0\mathbf{j}$ prochází Gaussovou plochou ve tvaru povrchu krychle podle obr. 24.5 (E je vyjádřeno v newtonech na coulomb a x v metrech). Jaký je tok intenzity elektrického pole pravou stěnou, levou stěnou a horní stěnou krychle?



Obr. 24.5 Příklad 24.2. Gaussova plocha ve tvaru povrchu krychle, jejíž jedna hrana leží na ose x , se nachází v nehomogenním elektrickém poli.

ŘEŠENÍ: *Pravá stěna:* Vektor plochy je vždy kolmý k této ploše a je orientován směrem ven z krychle (z Gaussovy plochy). To znamená, že vektor $d\mathbf{S}$ musí pro pravou stěnu směřovat vždy ve směru $+x$. Při použití jednotkových vektorů je

$$d\mathbf{S} = dS \mathbf{i}.$$

Z rov. (24.4) plyne, že tok $\Phi_{E,p}$ pravou stěnou je

$$\begin{aligned} \Phi_{E,p} &= \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \int (3,0x\mathbf{i} + 4,0\mathbf{j}) \cdot (dS \cdot \mathbf{i}) = \\ &= \int [(3,0x)(dS)\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (4,0)(dS)\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}] = \\ &= \int (3,0x dS + 0) = 3,0 \int x dS. \end{aligned}$$

Protože budeme integrovat přes pravou stěnu, pro niž je v každém bodě hodnota x konstantní ($x = 3,0$ m), platí

$$\Phi_{E,p} = 3,0 \int (3,0) dS = 9,0 \int dS.$$

Integrál vyjadřuje obsah pravé stěny $S = 4,0 \text{ m}^2$. Tedy

$$\begin{aligned} \Phi_{E,p} &= (9,0 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})(4,0 \text{ m}^2) = \\ &= 36,0 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Levá stěna: Postup výpočtu je stejný jako pro pravou stěnu. Při postupu je třeba brát v úvahu dvě odlišnosti. (1) Vektor $d\mathbf{S}$ plochy, přes niž integrujeme, směřuje ve směru osy $-x$, tedy $d\mathbf{S} = -dS \mathbf{i}$. (2) Výraz pro x je pro uvažovanou levou stěnu opět konstantní, je však $x = 1,0$ m. Vezmeme-li v úvahu tyto dva rozdíly, nalezneme tok $\Phi_{E,l}$ levou stěnou

$$\Phi_{E,l} = -12 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Horní stěna: Vektor plochy $d\mathbf{S}$, přes niž integrujeme, směřuje ve směru osy y , tedy $d\mathbf{S} = dS \mathbf{j}$. Tok $\Phi_{E,h}$ horní stěnou

je

$$\begin{aligned} \Phi_{E,h} &= \int (3,0x\mathbf{i} + 4,0\mathbf{j}) \cdot (dS \mathbf{j}) = \\ &= \int [(3,0x)(dS)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + (4,0)(dS)\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}] = \\ &= \int (0 + 4,0 dS) = 4,0 \int dS = \\ &= 16 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

24.4 GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY

Gaussův zákon vyjadřuje vztah mezi celkovým tokem Φ_E intenzity elektrického pole uzavřenou Gaussovou plochou a celkovým nábojem Q obklopeným touto plochou:

$$\epsilon_0 \Phi_E = Q \quad (\text{Gaussův zákon}). \quad (24.6)$$

Dosažením rov. (24.4), tj. definice toku elektrické intenzity, můžeme přepsat Gaussův zákon do tvaru

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (\text{Gaussův zákon}). \quad (24.7)$$

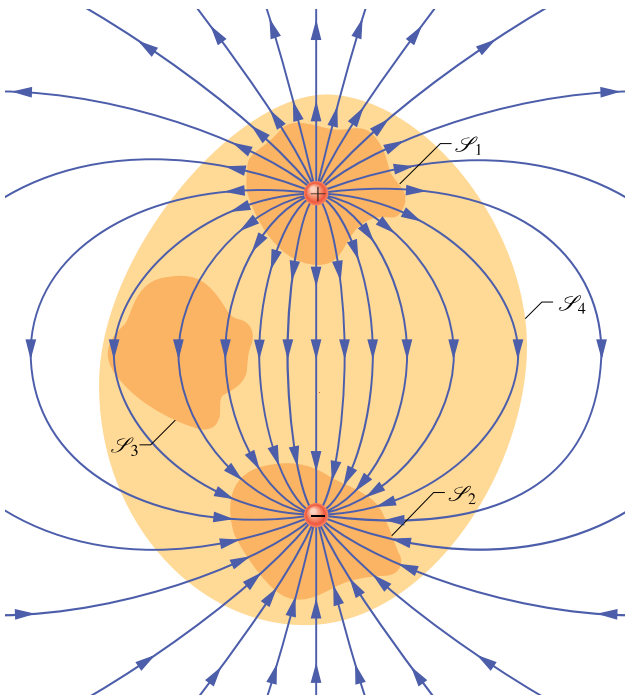
Zatím se budeme zabývat elektrickými náboji a elektrickým polem ve vakuu. V čl. 26.8 ukážeme, v jakém tvaru se zapisuje a používá Gaussův zákon v dielektrickém prostředí, jako jsou např. slída, olej nebo sklo.

V rov. (24.6) a (24.7) je celkový náboj $Q = \sum_k Q_k$ algebraickým součtem všech kladných i záporných nábojů obklopených Gaussovou plochou a může být tedy kladný, záporný, nebo nulový. Znaménko výsledného náboje, nacházejícího se uvnitř plochy, určuje znaménko toku elektrické intenzity Gaussovou plochou: je-li $Q > 0$, je celkový tok Φ_E kladný a intenzita \mathbf{E} směřuje převážně *ven z plochy*, je-li $Q < 0$, je celkový tok Φ_E záporný a intenzita \mathbf{E} směřuje převážně *dovnitř*.

Libovolně velký náboj ležící *vně* Gaussovy plochy, není v Gaussově zákonu zahrnut v Q . Také není rozhodující, jak jsou rozloženy jednotlivé náboje *uvnitř* Gaussovy plochy. Jediné, co je nutno uvažovat na pravé straně rov. (24.7), je velikost a znaménko celkového uzavřeného náboje. Intenzita elektrického pole \mathbf{E} na levé straně rov. (24.7) vyjadřuje intenzitu elektrického pole od *všech* nábojů, ať se nacházejí uvnitř či vně Gaussovy plochy. To se může jevit jako rozpor, ale lze dokázat (a ilustruje to př. 24.1), že elektrické pole od nábojů, které se nacházejí

vně Gaussovy plochy, nepřispívá k celkovému toku uzavřené plochou, protože počet siločár od těchto nábojů do plochy vstupujících se rovná počtu siločár z této plochy vystupujících.

Použijme nyní tyto úvahy na případ znázorněný na obr. 24.6, který ukazuje stejně velké, ale opačné náboje a siločáry, zobrazující elektrické pole jimi vytvořené. Na obrázku jsou v řezu vyznačeny čtyři Gaussovy plochy. Budeme je uvažovat jednu po druhé.



Obr. 24.6 Dva stejně velké bodové náboje opačného znaménka a siločáry elektrického pole jimi vytvořené. V řezu jsou znázorněny čtyři Gaussovy plochy. Plocha \mathcal{S}_1 obklopuje kladný náboj, plocha \mathcal{S}_2 záporný náboj, plocha \mathcal{S}_3 neobklopuje žádný náboj, plocha \mathcal{S}_4 obklopuje oba náboje, a celkový náboj uvnitř je tedy nulový.

Plocha \mathcal{S}_1 : Intenzita elektrického pole směřuje ve všech bodech této plochy směrem ven. Tok intenzity elektrického pole touto plochou je tedy kladný. Kladný je také celkový náboj uvnitř této plochy, jak to vyžaduje Gaussův zákon.

Plocha \mathcal{S}_2 : Intenzita elektrického pole směřuje dovnitř této plochy ve všech bodech plochy. Tok intenzity elektrického pole a celkový náboj uvnitř plochy jsou tedy záporné, jak to vyžaduje Gaussův zákon.

Plocha \mathcal{S}_3 : Tato plocha neobsahuje uvnitř žádné náboje, tedy $Q = 0$. Gaussův zákon vyžaduje, aby celkový tok intenzity elektrického pole touto plochou byl roven nule. To platí, protože všechny siločáry, které procházejí plochou,

do ní vstupují v horní části a vystupují z ní v její spodní části.

Plocha \mathcal{S}_4 : Tato plocha obklopuje celkový náboj nulový (kladný a záporný náboj jsou stejně velké). Z Gaussova zákona plyne, že celkový tok intenzity elektrického pole touto plochou je nulový. To je opět pravda, neboť stejný počet siločár, který z plochy \mathcal{S}_4 vystupuje, do ní na jiném místě vstupuje.

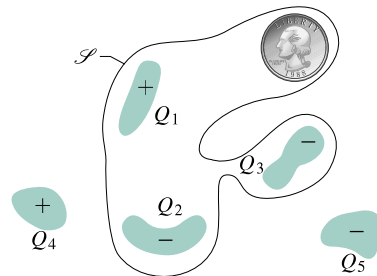
PŘÍKLAD 24.3

Na obr. 24.7 je nakresleno pět nabitých plastových tělísek a elektricky neutrální mince. Je vyznačen i řez jistou Gaussovou plochou \mathcal{S} . Určete tok intenzity elektrického pole plochou \mathcal{S} , jestliže $Q_1 = Q_4 = +3,1 \text{ nC}$, $Q_2 = Q_5 = -5,9 \text{ nC}$ a $Q_3 = -3,1 \text{ nC}$.

ŘEŠENÍ: Nenabitá mince nijak nepřispívá k celkovému náboji Q obklopenému plochou \mathcal{S} i přesto, že elektrické pole, v němž se mince nachází, v ní může polarizovat kladné a záporné náboje. Náboje Q_4 a Q_5 se nacházejí vně plochy \mathcal{S} a nepřispívají tedy k celkovému náboji Q . Je proto $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Z rov. (24.6) dostaneme

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\varepsilon_0} = \\ &= \frac{(+3,1 - 5,9 - 3,1) \cdot 10^{-9} \text{ C}}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})} = \\ &= -670 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

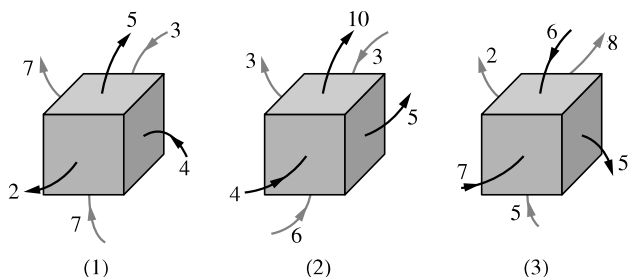
Záporné znaménko značí, že celkový náboj uvnitř uzavřené plochy \mathcal{S} je záporný. Celkový tok pole plochou \mathcal{S} je tedy také záporný.



Obr. 24.7 Příklad 24.3. Pět nabitých plastových tělísek a elektricky neutrální mince. Zvolená Gaussova plocha, znázorněná v řezu, obklopuje tři plastová tělíska a minci.

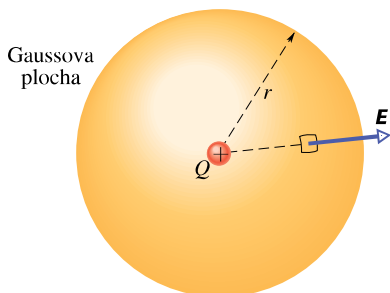
KONTROLA 2: Obrázek znázorňuje tři situace, v nichž se Gaussova plocha tvořená povrchem krychle nachází v elektrickém poli. Šipky ukazují směr intenzity \mathbf{E} a číslíčko vyjadřuje velikosti toků (v $\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$) stěnami

každé krychle. Určete, ve kterém případě krychle ohraničuje (a) celkový kladný náboj, (b) celkový záporný náboj, (c) nulový náboj.



24.5 GAUSSŮV ZÁKON A COULOMBŮV ZÁKON

Jsou-li Gaussův zákon a Coulombův zákon ekvivalentní, je možné odvodit jeden z druhého. Zde odvodíme Coulombův zákon ze zákona Gaussova s využitím symetrie v rozložení nábojů a jimi vytvořeného elektrického pole.



Obr. 24.8 Kulová Gaussova plocha, v jejímž středu leží bodový náboj Q .

Na obr. 24.8 je znázorněn bodový kladný náboj Q ležící ve středu Gaussovy kulové plochy o poloměru r . Představme si, že povrch koule rozdělíme na jednotlivé infinitezimální plošky o obsahu dS . Podle definice je vektor $d\mathbf{S}$ kolmý k ploše a směřuje z ní ven ve směru vnější normály. Ze symetrie plyne, že i vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} v každém bodě kulové plochy je kolmý k povrchu a směřuje ven z plochy ve směru vnější normály. Úhel θ , který svírají \mathbf{E} a $d\mathbf{S}$, je roven nule. Proto z Gaussova zákona plyne

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 \oint E dS = Q. \quad (24.8)$$

Protože velikost intenzity je na povrchu koule stejně velká, můžeme E vytknout před integrál. Dostáváme

$$\varepsilon_0 E \oint dS = Q. \quad (24.9)$$

Integrál je roven obsahu kulové plochy, tedy $4\pi r^2$. Dosažením do rov. (24.9) získáme

$$\varepsilon_0 E (4\pi r^2) = Q$$

neboli

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (24.10)$$

Odvozený vztah (24.10) má stejný tvar, jaký jsme získali z Coulombova zákona (23.3).

RADY A NÁMĚTY

Bod 24.1: Volba vhodné Gaussovy plochy

Odvození rov. (24.10) z Gaussova zákona bylo jen rozcvičkou pro určení intenzity elektrického pole vytvořeného jinými konfiguracemi nábojů. Vraťme se tedy kousek zpět. Začali jsme s daným kladným bodovým nábojem Q ; víme, že elektrické siločáry míří radiálně směrem od něj a pole je kulově symetrické.

Abychom pomocí Gaussova zákona (24.7) určili velikost intenzity elektrického pole E ve vzdálenosti r , zvolili jsme kulovou Gaussovu plochu se středem v náboji Q a o poloměru r . Potom jsme sčítali (pomocí integrace) skalární součiny $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ přes celou Gaussovu plochu. Aby byla tato integrace co nejjednodušší, zvolili jsme Gaussovu plochu ve tvaru povrchu koule; tím vystihujeme kulovou symetrii elektrického pole. Tato volba umožní trojí zjednodušení: (1) Skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ je jednoduchý, protože v každém bodě Gaussovy plochy je úhel mezi \mathbf{E} a $d\mathbf{S}$ roven nule. Skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ můžeme proto nahradit součinem skalárů $E dS$. (2) Velikost intenzity elektrického pole E je stejná ve všech bodech kulové Gaussovy plochy, takže při integraci je E konstantní a může se vytknout před integrál. (3) Ve výsledku je velmi jednoduchá integrace — jde pouze o součet obsahů všech infinitezimálních plošek tvořících povrch koule, což je celkový povrch $4\pi r^2$.

Připomeňme, že Gaussův zákon platí bez ohledu na tvar Gaussovy plochy, kterou jsme umístili kolem náboje Q . Kdybychom však např. zvolili Gaussovu plochu ve tvaru povrchu krychle, všechna tři zjednodušení by zmizela a integrace $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ přes plochu krychle by mohla být velmi obtížná. Proto je výhodné zvolit Gaussovu plochu takového tvaru, aby integrace v Gaussově zákoně byla co nejjednodušší.

KONTROLA 3: Gaussovou kulovou plochou o poloměru r , která obklopuje osamocenou nabitou částici, prochází určitý tok Φ_{E1} . Zaměňme tuto Gaussovu plochu za (a) kulovou plochu o větším poloměru, (b) povrch vepsané krychle, (c) povrch opsané krychle. Bude v těchto případech tok větší, menší, nebo stejný jako Φ_{E1} ?

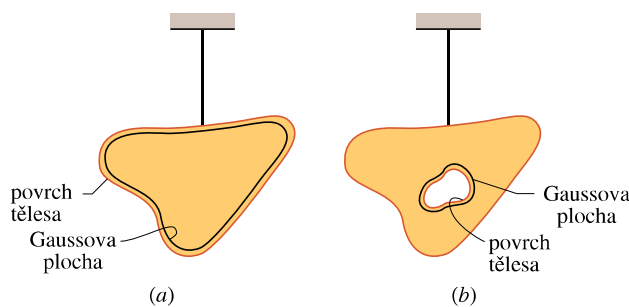
24.6 NABITÝ IZOLOVANÝ VODIČ

Gaussův zákon nám umožňuje dokázat důležitou větu o izolovaných vodičích:

Jestliže na izolovaný vodič přivedeme z vnějšku náboj, pak se všechnen rozmístí na vnějším povrchu vodiče. Uvnitř vodiče nezůstane žádný volný náboj.

To vypadá věrohodně, protože náboje stejného znaménka se vzájemně odpuzují. Můžeme si to představit tak, že při pohybu k povrchu se přivedené náboje dostanou tak daleko od sebe, jak je to jen možné. Není to však samozřejmé, protože kvůli každému novému náboji přenesenému na povrch se všechny dosavadní musí trochu „stěsnat“. Pro ověření této domněnky se opět vraťme ke Gaussovu zákonu.

Na obr. 24.9a je v řezu znázorněno na nevodivém vlákne zavěšené měděné těleso, na něž je přiveden náboj Q . Zvolme Gaussovu plochu těsně pod povrchem tělesa.



Obr. 24.9 (a) Měděné těleso nesoucí náboj Q je zavěšené na nevodivém vlákne. Gaussova plocha se nachází těsně pod povrchem tělesa. (b) V tělese je nyní vytvořena dutina. Gaussova plocha se nachází v tělese a těsně obepíná dutinu.

Elektrické pole uvnitř vodiče musí být nulové. Kdyby tomu tak nebylo, působilo by silou na volné (volné) elektrony ve vodiči a vyvolalo jejich pohyb a tím proud; náboj by se ve vodiči pohyboval z místa na místo. Ve vodiči v ustáleném stavu takové „věčné“ proudy neexistují, a proto intenzita elektrického pole uvnitř vodiče musí být nulová. (Detailní popis děje: přeneseme-li na vodič náboj, vytvoří se tím pole i uvnitř vodiče. To silově působí na volné náboje ve vodiči a pohybuje jimi tak dlouho, až celkové pole uvnitř vodiče vymizí a nastane elektrostatická rovnováha. Celý děj proběhne velice rychle.)

Je-li elektrická intenzita \mathbf{E} nulová kdekoli uvnitř vodiče, musí být také nulová ve všech bodech na Gaussově ploše, protože tato plocha, i když se nachází co nejtěsněji pod povrchem, je stále uvnitř vodiče. Z toho plyne, že tok elektrické intenzity Gaussovou plochou je nulový a podle

Gaussova zákona je nulový i celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy. Důsledkem tedy je, že přivedený náboj musí ležet na povrchu vodiče.

Izolovaný vodič s dutinou

Na obr. 24.9b je znázorněno totéž těleso, tentokrát s dutinou uvnitř. Můžeme oprávněně předpokládat, že když vyjmeme část materiálu, abychom vytvořili dutinu, nezměníme ani rozložení nábojů, ani tvar elektrického pole, které existovalo na obr. 24.9a. Opět můžeme použít Gaussův zákon, abychom provedli kvantitativní důkaz.

Vytvoříme nyní Gaussovu plochu v materiálu tak, aby těsně obklopovala dutinu. Protože uvnitř vodiče je $E = 0$, nepoteče touto novou Gaussovou plochou žádný tok. Dle Gaussova zákona nemůže být uvnitř plochy nenulový náboj. Z toho plyne, že na stěnách dutiny se nenachází žádný náboj; všechnen přivedený náboj je tedy rozložen na *vnějším* povrchu vodiče, stejně jako v případě na obr. 24.9a.

Kdyby vodič zmizel...

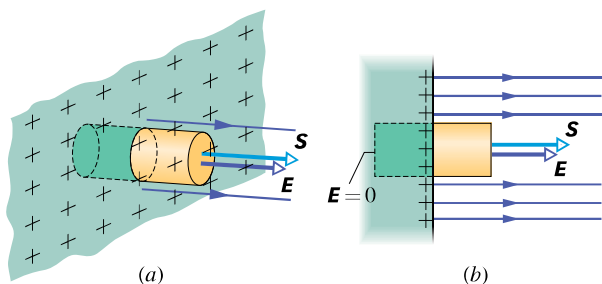
Předpokládejme, že pomocí nějakého kouzla můžeme „zmrazit“ náboj na povrchu vodiče, třeba tak, že jej vložíme do tenkého plastového pláště, a poté odstraníme vodič. To je ekvivalentní případu z obr. 24.9b, v němž rozšíříme dutinu na celý vodič, čímž vodič odstraníme a zůstanou nám pouze náboje. Elektrické pole a jeho intenzita se tím vůbec nezmění. Intenzita elektrického pole bude nulová uvnitř tenké vrstvy nábojů a nezměněná pro všechny vnější body. Odtud vyplývá, že elektrické pole je vytvořeno náboji a ne vodičem. Vodič pouze slouží jako „cesta“, aby náboje mohly zaujmout své polohy.

Vnější elektrické pole

Viděli jsme již, že se volný náboj na izolovaném vodiči přesouvá tak, aby se dostal na jeho povrch. Vyjma kulového vodiče se však náboj nerozdělí rovnoměrně. Plošná hustota náboje σ je obecně různá v různých bodech na povrchu vodiče. Je proto velmi obtížné určit elektrickou intenzitu obecně.

Elektrické pole těsně nad povrchem nabitého vodiče se však snadno určí pomocí Gaussova zákona. K tomu vybereme část povrchu tak malou, abychom mohli zanedbat její zakřivení a mohli ji pokládat za rovinnou. Poté uvažujeme Gaussovu plochu ve tvaru nízkého válečku. Jedna jeho základna je ve vodiči těsně pod povrchem, druhá těsně nad ním a plášť je orientován kolmo k povrchu vodiče (obr. 24.10).

Elektrická intenzita \mathbf{E} těsně nad povrchem vodiče musí být kolmá k povrchu vodiče. Kdyby tomu tak nebylo, měla



Obr. 24.10 (a) Prostorové znázornění, (b) řez částí velkého izolovaného vodiče nabitého přivedeným kladným nábojem. Gaussova plocha je uzavřená, obepíná jistý náboj a její plášť je kolmá k povrchu vodiče. Elektrické siločáry procházejí vnější podstavou válečku, ale neprocházejí vnitřní podstavou. Vnější podstava je popsána vektorem \mathbf{S} .

by složku ve směru povrchu a přesouvala by po povrchu náboj. Takový pohyb by byl ale v rozporu s naším předpokladem elektrostatické rovnováhy.

Vyjáďřeme nyní celkový tok Gaussovou plochou. Vnitřní podstavou neprochází žádný tok, protože uvnitř vodiče je elektrické pole nulové. Pláštěm válečku také neprochází žádný tok, protože uvnitř vodiče je elektrické pole nulové a mimo vodič je jeho intenzita rovnoběžná s pláštěm válečku. Jediný nenulový tok je tok podstavou mimo vodič; vektor \mathbf{E} je zde kolmý k podstavě válečku. Předpokládáme, že obsah podstavy je dosti malý, abychom na ní mohli považovat E za konstantní. Potom tok touto podstavou je ES , což představuje celkový tok Φ_E uvažovanou Gaussovou plochou.

Náboj Q , který je obklopen Gaussovou plochou, leží na povrchu vodiče na ploše o obsahu S . Je-li σ plošná hustota náboje, pak $Q = \sigma S$. Dosadíme-li σS za Q a ES za Φ_E , bude mít Gaussův zákon tvar

$$\epsilon_0 ES = \sigma S,$$

z něhož plyne

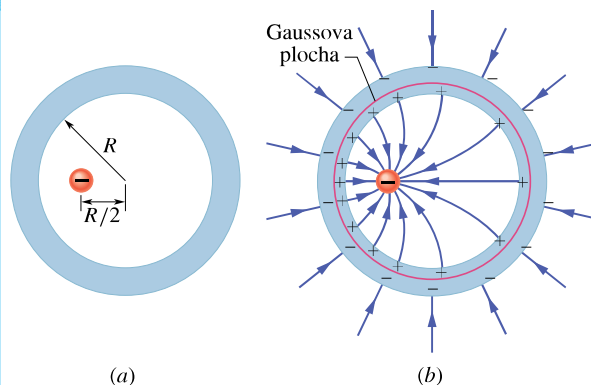
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{vodivý povrch}). \quad (24.11)$$

To znamená, že velikost elektrické intenzity v místě těsně nad povrchem vodiče je přímo úměrná plošné hustotě náboje v tomto místě na vodiči. Je-li vodič nabit kladně, směřují siločáry kolmo od vodiče (obr. 24.10), je-li nabit záporně, směřují kolmo k němu.

Siločáry v obr. 24.10 musí končit v nekonečnu nebo na záporných nábojích někde v okolí vodiče. Jestliže se tyto náboje nacházejí blízko vodiče, změní se plošná hustota náboje v daném místě vodiče, a tím i intenzita elektrického pole v tomto bodě. Mezi veličinami σ a E vztah (24.11) však platí stále.

PŘÍKLAD 24.4

Na obr. 24.11a je příčný řez kovovou kulovou vrstvou o vnitřním poloměru R . Bodový náboj $-5,0 \mu\text{C}$ se nachází ve vzdálenosti $R/2$ od jejího středu. Jaké náboje budou indukovány na její vnitřní a vnější stěně, je-li vrstva elektricky neutrální? Budou tyto náboje rozděleny rovnoměrně? Jak bude vypadat elektrické pole uvnitř a vně kulové vrstvy?



Obr. 24.11 Příklad 24.4. (a) Záporný bodový náboj se nachází uvnitř elektricky neutrální kulové kovové vrstvy. (b) Výsledkem je, že se kladný náboj nerovnoměrně rozloží na vnitřní stěně vrstvy a stejně velký záporný náboj se rovnoměrně rozloží na stěně vnější. Na obrázku je znázorněn i průběh elektrických siločár.

ŘEŠENÍ: Na obr. 24.11b je příčný řez kulovou Gaussovou plochou procházející vrstvou těsně nad její vnitřní stěnou. Protože uvnitř kovu musí být elektrické pole nulové (a tedy i na Gaussově ploše uvnitř kovu), musí být také tok elektrické intenzity Gaussovou plochou roven nule. Z Gaussova zákona plyne, že celkový náboj obklopený Gaussovou plochou musí být také v tomto případě nulový. Jestliže je uvnitř kulové vrstvy bodový náboj $-5,0 \mu\text{C}$, potom na vnitřní stěně vrstvy musí být náboj $+5,0 \mu\text{C}$.

Kdyby se bodový náboj nacházel ve středu kulové vrstvy, byl by náboj rozdělen rovnoměrně na vnitřní stěně vrstvy. Zde však náboj v jejím středu neleží, takže rozdělení indukovaného náboje bude nerovnoměrné (obr. 24.11b): kladný náboj bude přitahován k místům bližším vloženému zápornému náboji.

Poněvadž je vrstva elektricky neutrální, může její vnitřní stěna nést náboj $+5,0 \mu\text{C}$ pouze tehdy, když elektrony o celkovém náboji $-5,0 \mu\text{C}$ se přesunou na vnější stěnu. Na ní pak budou rozloženy rovnoměrně (obr. 24.11b), protože vrstva je kulová. Rovnoměrnost rozložení náboje na vnějším povrchu nemůže být „porušena“ nerovnoměrností na vnitřním povrchu, protože mezi nimi leží vodič — a v něm je elektrické pole nulové.

Přibližný průběh elektrických siločár uvnitř a vně kulové vrstvy je znázorněn na obr. 24.11b. Všechny siločáry jsou ke kulové vrstvě kolmé. Z vnitřního povrchu vrstvy vystupují dovnitř a zakřivují se k náboji v dutině. Uvnitř kovové ku-

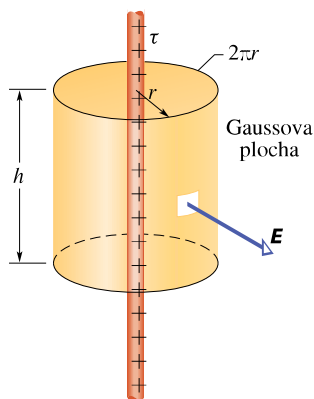
lové vrstvy je pole nulové. Vně kulové vrstvy je průběh elektrických siločar stejný, jako by šlo o pole bodového náboje umístěného ve středu koule a kulová vrstva by neexistovala. Tak je tomu, ať je náboj umístěn uvnitř koule kdekoli.

KONTROLA 4: Náboj $-50e$ leží ve středu duté kulové kovové vrstvy, která je nabitá nábojem $-100e$. Jaký náboj se bude nacházet na (a) vnitřní, (b) vnější stěně vrstvy?

24.7 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: VÁLCOVÁ SYMETRIE

Na obr. 24.12 je znázorněna část nekonečně dlouhé válcové plastové tyčinky nabitá rovnoměrně kladným nábojem s délkovou hustotou τ . Chceme najít vztah pro elektrickou intenzitu \mathbf{E} ve vzdálenosti r od osy tyčinky.

Gaussovou plochu \mathcal{S} zvolíme tak, aby vystihovala symetrii problému, tedy jako povrch válce (o poloměru r a výšce h), jehož osa splývá s osou plastové tyčinky.



Obr. 24.12 Gaussova plocha ve tvaru povrchu válce obklopuje část velmi dlouhé rovnoměrně nabitě válcové plastové tyčinky.

Představme si nyní, že zatímco jsme se nedívali, někdo pootočil plastovou tyčinkou kolem její podélné osy nebo ji otočil tak, že zaměnil konce tyčinky. Když se znovu na tyčinku a její pole podíváme, nezjistíme žádnou změnu. Z toho plyne, že pole tyčinky má rotační neboli válcovou symetrii: vektor \mathbf{E} směřuje radiálně od osy válce (v případě, že tyčinka je kladně nabitá) a jeho velikost závisí pouze na vzdálenosti od osy válce. Proto je tok podstavami nulový (vektor \mathbf{E} je rovnoběžný s podstavami válce) a zůstává nenulový tok pláštěm válce. Poněvadž $2\pi r$ je obvod válce a h jeho výška, je obsah pláště válce $2\pi r h$. Tok intenzity

elektrického pole \mathbf{E} tímto pláštěm je

$$\Phi_E = ES \cos 0 = E(2\pi r h).$$

Náboj obepnutý plochou je $Q = \tau h$, takže Gaussův zákon

$$\epsilon_0 \Phi_E = Q$$

dává

$$\epsilon_0 E(2\pi r h) = \tau h.$$

Odtud

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{nabitě vlákno}), \quad (24.12)$$

což vyjadřuje velikost elektrické intenzity pole nekonečně dlouhého nabitěho vlákna ve vzdálenosti r od osy vlákna. Vektor \mathbf{E} směřuje radiálně od vlákna, je-li náboj kladný, a radiálně k němu, je-li záporný.

PŘÍKLAD 24.5

Viditelnému záblesku při úderu blesku předchází neviditelné stádium, v němž vznikne kanál elektronů sahající z mraků až k zemskému povrchu. Tyto elektrony pocházejí jednak z mraků, jednak z molekul tvořících vzduch, které jsou ionizovány v kanálu. Typická hodnota délkové hustoty náboje v kanálu je $\tau = -1 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$. Když blesk udeří na zem, elektrony v jeho vodivém kanálu rychle přecházejí do zemského povrchu. Při srážkách elektronů s molekulami vzduchu dochází k ionizaci, což se projeví jako jasné záblesky světla. Určete poloměr kanálu, jestliže se molekuly vzduchu ionizují, překročí-li elektrická intenzita hodnotu $3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$.

ŘEŠENÍ: I když kanál není ani přímý, ani nekonečně dlouhý, použijeme model lineárně rozloženého náboje (obr. 24.12). (Protože obsahuje záporný náboj, míří \mathbf{E} dovnitř sloupce.) Podle rov. (24.12) klesá velikost intenzity E elektrického pole s rostoucí vzdáleností od osy kanálu. Povrch kanálu je v takové vzdálenosti r , v níž má elektrická intenzita \mathbf{E} velikost $3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Molekuly vzduchu uvnitř kanálu jsou ionizovány, molekuly vzdálenější nikoli. Řešením rov. (24.12) dostáváme pro poloměr kanálu

$$\begin{aligned} r &= \frac{|\tau|}{2\pi\epsilon_0 |E|} = \\ &= \frac{(1 \cdot 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1})}{2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}) \cdot (3 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})} = \\ &= 6 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(Poloměr zářivé části blesku je však menší, přibližně jen 0,5 m. Představu o rozměrech blesku si můžete udělat dle obr. 24.13.) I když poloměr sloupce je jen 6 m, nemyslete si, že jste v bezpečí, nacházíte-li se trochu dál od místa dopadu

blesku na zem. Elektrony z blesku putují po zemském povrchu a takové *povrchové zemní proudy* jsou smrtelné. Na obr. 24.14 jsou patrné zřetelné stopy těchto proudů.



Obr. 24.13 Blesk udeřil do 20 m vysoké sekvoje. Protože byl strom mokrý, prošla většina z nábojů vodou po jeho povrchu a strom zůstal nepoškozen.



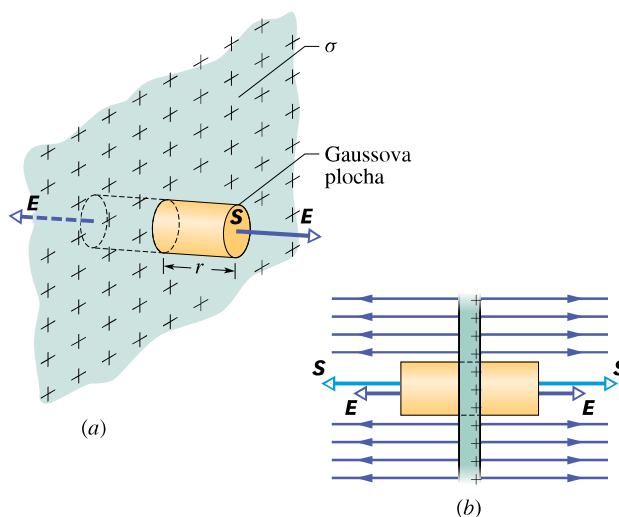
Obr. 24.14 Vypálené stopy zemních proudů blesku na trávníku golfového jamkoviště.

24.8 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: ROVINNÁ SYMETRIE

Nevodivá vrstva

Na obr. 24.15 je část tenké, nekonečně velké nevodivé vrstvy, na níž je rovnoměrně rozložen kladný náboj s plošnou hustotou σ . Za jednoduchý model nám může posloužit kus tenké plastové fólie. Naším úkolem je určit elektrickou intenzitu \mathbf{E} ve vzdálenosti r od vrstvy.

Vhodnou Gaussovou plochou je povrch válce s podstavami o obsahu S , jehož osa je kolmá k vrstvě (obr. 24.15). Z důvodů symetrie je intenzita \mathbf{E} kolmá k rovině vrstvy, tzn. i k ploše podstav. Pro kladný náboj směřuje \mathbf{E} od roviny a prochází tedy oběma podstavami Gaussovy plochy směrem ven z válce. Protože siločáry neprotínají plášť válce, neprochází touto částí Gaussovy plochy žádný tok.



Obr. 24.15 (a) Celkový pohled, (b) boční pohled na část tenké velmi velké plastové vrstvy, rovnoměrně nabitě na jedné straně nábojem s plošnou hustotou σ . Osa válcové Gaussovy plochy protíná kolmo vrstvu a je rovnoběžná se směrem pole.

Celkový tok je tedy roven součtu toků oběma podstavami válce; pro každou platí $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES$. Z Gaussova zákona plyne

$$\varepsilon_0(ES + ES) = \sigma S,$$

kde σS je náboj uzavřený v Gaussově ploše. Odtud dostaneme

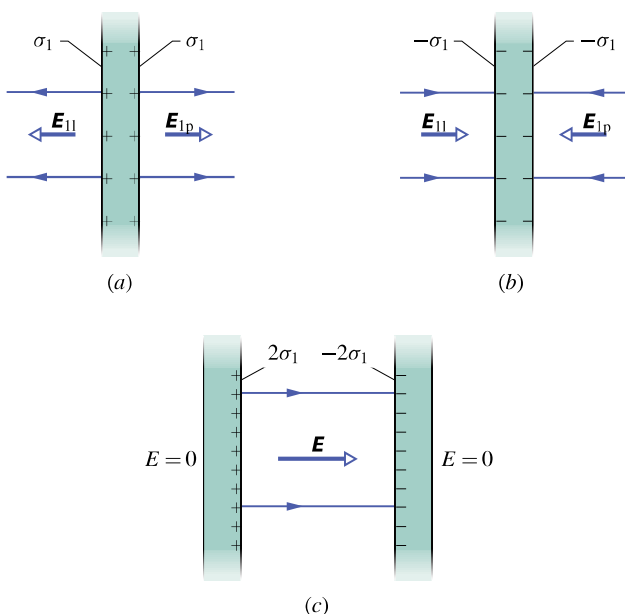
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (\text{nabitá plocha}). \quad (24.13)$$

Uvažovali jsme nekonečně velkou rovinu s konstantní plošnou hustotou náboje. Ve výsledku se nevyskytuje r , takže

intenzita má stejnou velikost v každém bodě prostoru. Rov. (24.13) odpovídá rov. (23.25), kterou jsme dostali integrací složek intenzity elektrického pole vyvolaného jednotlivými náboji. (Podívejte se, kolik bylo třeba integrování, a všimněte si, jak snadno lze dostat tentýž výsledek pomocí Gaussova zákona. To je jeden z důvodů, proč věnujeme celou kapitolu Gaussovu zákonu elektrostatiky: pro určitá symetrická rozložení náboje je opravdu mnohem výhodnější jej použít, než integrovat složky pole.)

Dvě vodivé desky

Na obr. 24.16a je řez tenkou, nekonečně velkou vodivou deskou, na níž byl přenesen kladný náboj. Z čl. 24.6 víme, že tento náboj leží na povrchu desky. Protože deska je tenká a velmi velká, můžeme předpokládat, že se v podstatě celý náboj nachází na obou stranách desky.



Obr. 24.16 (a) Tenká, velmi velká, kladně nabitá vodivá deska. (b) Stejná záporně nabitá deska. (c) Dvě desky rovnoběžné a blízko u sebe.

Jestliže není přítomen žádný vnější náboj, který by rozložení náboje ovlivnil, budou náboje rozloženy na obou stranách desky s konstantní plošnou hustotou σ_1 . Z rovnice (24.11) plyne, že těsně vedle desky má vzniklé pole intenzitu o velikosti $E_1 = \sigma_1/\epsilon_0$. Protože náboj je kladný, směřuje pole \mathbf{E}_1 od desky.

Na obr. 24.16b je znázorněna táž deska, ale záporně nabitá, mající stejnou velikost plošné hustoty náboje σ_1 . Jedinou změnou proti předchozí situaci je, že intenzita pole směřuje k desce.

Předpokládejme, že umístíme obě desky tak, aby byly rovnoběžné a blízko u sebe (obr. 24.16c). Protože desky jsou vodivé, začne náboj na jedné desce přitahovat náboj na druhé desce. Proto se všechny náboje přemístí na vnitřní stěny desek (obr. 24.16c). Na každé z vnitřních stěn desek bude nyní dvojnásobně velký náboj, takže nová plošná hustota náboje σ bude dvojnásobkem σ_1 . Elektrická intenzita v každém bodě mezi deskami bude mít velikost

$$E = \frac{2\sigma_1}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (24.14)$$

Toto pole směřuje od kladně nabitě desky k záporné. Protože na vnější stěny desek nebyl přiveden žádný náboj, bude elektrické pole vlevo i vpravo od desek rovno nule.

Může se vám zdát podivné, proč se zabýváme tak nepravděpodobnou situací, jako je pole buzené nekonečně dlouhou nabitou přímkou, nekonečnou rovinou či dvojicí nekonečných nabitých desek. Není to *jen* proto, abychom analyzovali takové situace pomocí Gaussova zákona (ačkoliv i to je pravda). Podstatnější je, že tyto analýzy případů, v nichž se vyskytují nekonečně velké rozměry, nám poslouží jako velmi dobrá aproximace reálných situací. Tak se např. dá velmi dobře použít rov. (24.13) pro nevodivou vrstvu konečných rozměrů, pokud zjišťujeme velikost pole v blízkosti vrstvy a dosti daleko od jejích okrajů. Podobně rov. (24.14) platí pro dvojici konečných vodivých desek, pokud opět nebereme v úvahu místa v blízkosti jejich hran.

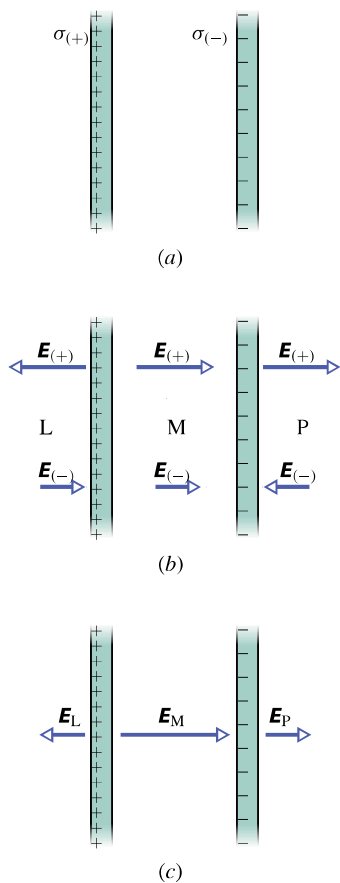
Potíže s okraji vrstev nebo desek a důvody, proč se k nim příliš nepřibližujeme, spočívají v tom, že v jejich blízkosti již není možné použít rovinnou symetrii při určování intenzity polí. Siločáry se zde zakřívují (vlivem okrajů) a detaily pole se pak velmi obtížně počítají.

Při řešení elektrostatických úloh s vodiči nemůžeme jednoduše rozdělit problém na několik úloh, každou s jedním vodičem, a pak sčítat jejich dílčí řešení. Princip superpozice sice platí i zde, ale musíme uvážit, že rozložení náboje na vodiči je výrazně ovlivněno přítomností dalších vodičů či nábojů v jeho okolí. Jinými slovy, kdybychom zmrazili rozložení nábojů na vodičích v soustavě a soustavu rozdělili na části, pak by opravdu pole soustavy bylo součtem polí těchto částí. Jakmile ovšem připustíme, že náboje na vodičích nejsou „zmrazeny“, mohou se pod vlivem ostatních částí přerozdělit jinak, než jak byly rozmístěny.

PŘÍKLAD 24.6

Na obr. 24.17a je znázorněna část dvou velkých rovnoběžných nevodivých desek, z nichž každá nese na jedné stěně rovnoměrně rozložený náboj. Plošné hustoty nábojů jsou $\sigma_{(+)} = 6,8 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ pro kladně nabitou desku a $\sigma_{(-)} = -4,3 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$ pro záporně nabitou desku.

Vyjádřete intenzitu elektrického pole \mathbf{E} (a) vlevo od desek, (b) mezi deskami, (c) vpravo od desek.



Obr. 24.17 Příklad 24.6.
(a) Dvě velké rovnoběžné desky rovnoměrně nabitě po jedné straně.
(b) Elektrická pole jednotlivých desek.
(c) Výsledné pole vytvořené superpozicí polí obou nabitých desek.

ŘEŠENÍ: Protože se náboje nemohou pohybovat, můžeme najít elektrické pole desek z obr. 24.17a tak, že (1) najdeme pole od každé desky samostatně, (2) sečteme pole od samostatných desek pomocí principu superpozice. Z rov. (24.13) plyne, že velikost intenzity elektrického pole $E_{(+)}$ od kladně nabitě desky je v libovolném bodě rovna

$$E_{(+)} = \frac{\sigma_{(+)}}{2\epsilon_0} = \frac{(6,8 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2})}{2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}.$$

Podobně pro záporně nabitou desku je

$$E_{(-)} = \frac{|\sigma_{(-)}|}{2\epsilon_0} = \frac{(4,3 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2})}{2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})} = 2,43 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}.$$

Na obr. 24.17b je konfigurace polí od jednotlivých desek vlevo od desek (L), mezi deskami (M) a vpravo od desek (P).

Výsledná pole v těchto oblastech získáme z principu superpozice. Vlevo od desek je velikost intenzity pole

$$E_L = E_{(+)} - E_{(-)} = (3,84 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) - (2,43 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) = 1,41 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Protože $E_{(+)}$ je větší než $E_{(-)}$, směřuje výsledná intenzita \mathbf{E}_L vlevo (obr. 24.17c). Vpravo od desek bude elektrické pole \mathbf{E}_P stejně velké, ale bude směřovat vpravo (obr. 24.17c). Mezi deskami mají obě pole stejný směr, a proto

$$E_M = E_{(+)} + E_{(-)} = (3,84 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) + (2,43 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}) = 6,27 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Výsledné pole \mathbf{E}_M míří vpravo.

Všimněme si, že vně desek je elektrické pole stejné, jako by pocházelo od jediné desky, jejíž plošná hustota náboje by byla $\sigma'_{(+)} = \sigma_{(+)} + \sigma_{(-)} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$.

24.9 POUŽITÍ GAUSSOVA ZÁKONA: KULOVÁ SYMETRIE

Nyní dokážeme pomocí Gaussova zákona oba slupkové teoremy, které jsme uvedli bez důkazu v čl. 22.4:

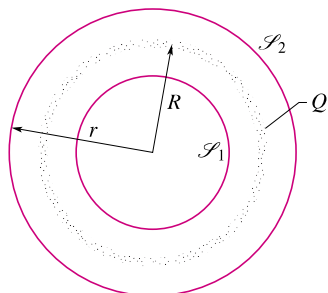
Rovnoměrně nabitá kulová vrstva (slupka) přitahuje, nebo odpuzuje nabitou částici *vně* této vrstvy stejnou silou, jako kdyby se celý náboj vrstvy nacházel v jejím středu.

Pro nabitou částici *uvnitř* (v dutině) této vrstvy je výsledná síla, kterou působí vrstva, rovna nule.

Na obr. 24.18 je znázorněna nabitá kulová vrstva o poloměru R , nesoucí celkový náboj Q , a dvě soustředné kulové Gaussovy plochy \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 . Pomocí postupu navrženého v čl. 24.5 a použitím Gaussova zákona na plochu \mathcal{S}_2 , pro niž platí $r > R$, zjistíme, že

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r > R). \quad (24.15)$$

Je to stejné pole, jaké by vytvořil bodový náboj, umístěný ve středu nabitě kulové vrstvy. Velikost síly, kterou působí kulová vrstva na nabitou částici ležící vně, je tedy stejná jako velikost síly v případě, že by vrstva byla nahrazena bodovým nábojem Q ležícím v jejím středu. Tím je dokázán první slupkový teorém.



Obr. 24.18 Řez tenkou kulovou vrstvou, nesoucí rovnoměrně rozložený náboj Q , a dvěma Gaussovými plochami \mathcal{S}_1 a \mathcal{S}_2 . Plocha \mathcal{S}_2 obklopuje kulovou vrstvu, plocha \mathcal{S}_1 obklopuje pouze prázdný prostor uvnitř vrstvy.

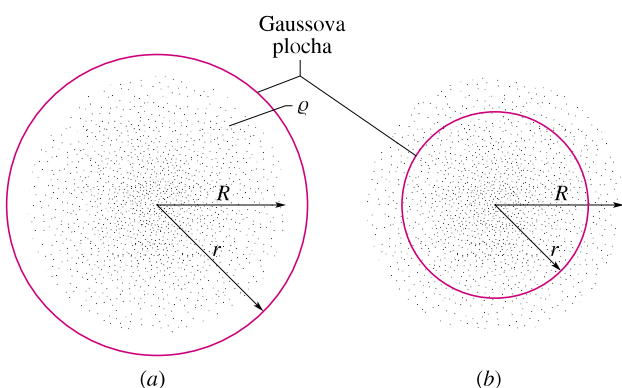
Použijeme-li Gaussův zákon na druhou plochu \mathcal{S}_1 , pro niž $r < R$, dostaneme

$$E = 0 \quad (\text{pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r < R), \quad (24.16)$$

protože tato Gaussova plocha neobepíná žádný náboj. Výsledná síla působící na náboj uvnitř rovnoměrně nabitě kulové vrstvy je tedy rovna nule, což vyjadřuje druhý slupkový teorém.

Libovolné kulově symetrické rozložení náboje, jako je např. na obr. 24.19, může být vytvořeno ze soustředných kulových vrstev. Abychom mohli použít slupkového teorému, musí být koule nabita po vrstvách homogenně; hustota náboje ρ je tedy funkcí pouze vzdálenosti r od středu koule. Pak můžeme zkoumat vliv rozložení náboje v jednotlivých vrstvách odděleně, vrstvu po vrstvě.

Na obr. 24.19a leží celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy tvaru povrchu koule o poloměru $r > R$. Tento náboj



Obr. 24.19 Tečky představují kulově symetrické rozložení náboje v kouli o poloměru R , jehož objemová hustota je funkcí pouze vzdálenosti od středu. Nabíená koule není vodič, takže se v ní náboj nemůže pohybovat. (a) Soustředná kulová Gaussova plocha o poloměru $r > R$. (b) Obdobná Gaussova plocha o poloměru $r < R$.

vytváří stejné elektrické pole na této Gaussově ploše jako stejně velký bodový náboj téhož znaménka, umístěný ve středu kulové plochy.

Na obr. 24.19b je znázorněna Gaussova plocha o poloměru $r < R$. Abychom určili velikost elektrického pole na této ploše, budeme rozlišovat nabitě kulové vrstvy uvnitř a vně Gaussovy plochy. Z rov. (24.16) plyne, že náboj ležící vně Gaussovy plochy na ní nevytváří žádné elektrické pole. Z rov. (24.15) plyne, že náboj obklopený uzavřenou plochou vytváří elektrické pole stejné, jako by tento náboj byl soustředěn ve středu kulové vrstvy. Nechť Q' je náboj obklopený uzavřenou plochou; pak podle rov. (24.15) platí

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2} \quad (\text{pole kulové vrstvy ve vzdálenosti } r < R). \quad (24.17)$$

PŘÍKLAD 24.7

Jádro atomu zlata má poloměr $R = 6,2 \cdot 10^{-15}$ m a nese kladný náboj $Q = Ze$, kde $Z = 79$ je atomové číslo zlata. Nakreslete průběh intenzity elektrického pole od středu jádra až do vzdálenosti $2R$. Předpokládejme, že jádro má kulový tvar s prostorově homogenním rozložením náboje.

ŘEŠENÍ: Celkový náboj jádra je

$$Q = Ze = 79(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}) = 1,264 \cdot 10^{-17} \text{ C}.$$

Pole vně jádra je popsáno rov. (24.15). Gaussovu plochu zvolíme podle obr. 24.19a. Pro bod na povrchu jádra je elektrická intenzita

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \\ &= \frac{(1,264 \cdot 10^{-17} \text{ C})}{4\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})(6,2 \cdot 10^{-15} \text{ m})^2} = \\ &= 3 \cdot 10^{21} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}. \end{aligned}$$

Pro výpočet pole uvnitř jádra použijeme rov. (24.17) a Gaussovu plochu podle obr. 24.19b. Nechť Q' je náboj obklopený kulovou Gaussovou plochou o poloměru $r < R$. Poněvadž je náboj rozložen v objemu jádra homogenně, je náboj uvnitř Gaussovy plochy úměrný objemu koule:

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad (24.18)$$

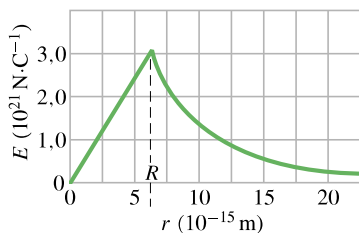
a odtud

$$Q' = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Dosažením tohoto výsledku do rov. (24.17) dostaneme

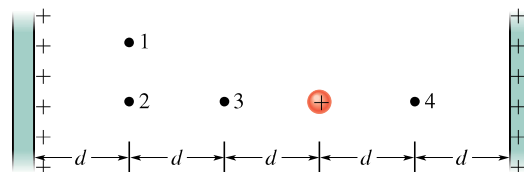
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (r < R). \quad (24.19)$$

Výraz v závorce je konstantní. Uvnitř jádra roste tedy elektrická intenzita přímo úměrně poloměru r , ve středu jádra je $E = 0$. Jak rov. (24.19) pro pole uvnitř jádra, tak i rov. (24.15) pro vnějšek dávají na hranici jádra (pro $r = R$) tutéž hodnotu $E = 3 \cdot 10^{21} \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Navazují tedy na hranici jádra spojitě. Na obr. 24.20 je celý výsledek vyjádřen graficky.



Obr. 24.20 Příklad 24.7. Závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti od středu jádra atomu zlata. Předpokládáme homogenní rozdělení kladného náboje v objemu jádra.

KONTROLA 5: Na obrázku jsou dvě rovnoběžné, velké, nevodivé vrstvy se stejnými plošnými hustotami kladného náboje a koule s homogenní objemovou hustotou kladného náboje. Určete intenzity elektrického pole v bodech 1 až 4 a seřadte tyto body sestupně podle velikosti intenzity.



PŘEHLED & SHRNU TÍ

Gaussův zákon elektrostatiky

Gaussův zákon a Coulombův zákon, ačkoli mají různé tvary, jsou ekvivalentní způsoby pro popis vztahu mezi nábojem a elektrickým polem v elektrostatice. Gaussův zákon zní

$$\epsilon_0 \Phi_E = Q \quad (\text{Gaussův zákon}), \quad (24.6)$$

kde Q je celkový náboj uvnitř pomyslné uzavřené plochy \mathcal{S} (Gaussovy plochy) a Φ_E je celkový tok vektoru elektrické intenzity touto plochou:

$$\Phi_E = \oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{tok elektrické intenzity Gaussovou plochou } \mathcal{S}). \quad (24.4)$$

Coulombův zákon lze snadno odvodit z Gaussova zákona.

Použití Gaussova zákona

Pomocí Gaussova zákona můžeme při využití podmínek symetrie odvodit některé důležité výsledky pro elektrostatiku. Mezi ně patří např. tyto:

1. Náboj na izolovaném vodiči se celý nachází na vnějším povrchu vodiče.

2. Elektrická intenzita vně nabitého vodiče v jeho těsné blízkosti je kolmá k povrchu vodiče a má velikost

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{vodivá plocha}). \quad (24.11)$$

Uvnitř vodiče je $E = 0$.

3. Elektrická intenzita pole buzeného dlouhým přímým vláknem s rovnoměrně rozloženým nábojem má radiální směr a velikost

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{nabitě vlákno}), \quad (24.12)$$

kde τ je délková hustota náboje a r je vzdálenost uvažovaného bodu od vlákna.

4. Elektrická intenzita pole nekonečně velké roviny s konstantní plošnou hustotou náboje σ je kolmá k této rovině a má velikost

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{nabitá plocha — vrstva nábojů}). \quad (24.13)$$

5. Elektrická intenzita vně rovnoměrně nabitě kulové vrstvy o poloměru R a celkovém náboji Q má radiální směr a velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{kulová vrstva, } r > R), \quad (24.15)$$

kde r je vzdálenost od středu kulové vrstvy k bodu, v němž určujeme \mathbf{E} . (Náboj se projevuje tak, jako by byl všechen soustředěn ve středu vrstvy.) Intenzita pole uvnitř rovnoměrně nabitě kulové vrstvy je rovna nule:

$$E = 0 \quad (\text{kulová vrstva, } r < R). \quad (24.16)$$

6. Elektrická intenzita uvnitř homogenně nabitě koule o poloměru R , $r < R$, má radiální směr a velikost

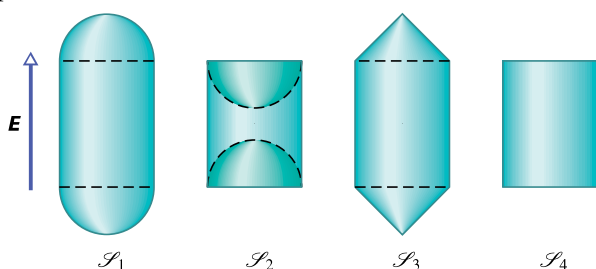
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r. \quad (24.19)$$

OTÁZKY

1. Plocha je charakterizována vektorem $\mathbf{S} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \text{ m}^2$. Jaký je tok intenzity elektrického pole touto plochou, je-li (a) $\mathbf{E} = 4\mathbf{i} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$, (b) $\mathbf{E} = 4\mathbf{k} \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$?

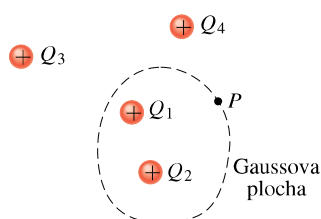
2. Určete $\int dS$ pro (a) čtvercovou plochu o straně a , (b) kruh o poloměru r , (c) plášť válce o výšce h a poloměru r .

3. Na obr. 24.21 jsou čtyři válcovité Gaussovy plochy se stejným pláštěm a podstavami různého tvaru. Tyto plochy se nacházejí v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} , která je rovnoběžná s osou válcových ploch. Podstavy \mathcal{S}_1 mají tvar povrchu konvexních polokoulí, podstavy \mathcal{S}_2 konkávních polokoulí, podstavy \mathcal{S}_3 kuželů a podstavy \mathcal{S}_4 tvar kruhů. Seřadte sestupně tyto plochy podle (a) velikosti celkového toku intenzity elektrického pole, (b) podle toku elektrické intenzity horními podstavami.



Obr. 24.21 Otázka 3

4. Na obr. 24.22 obepíná Gaussova plocha dvě ze čtyř kladně nabitých částic. (a) Určete, které částice přispívají k vytvoření elektrického pole v bodě P na Gaussově ploše. (b) Který z toků elektrické intenzity touto plochou je větší: tok pole buzeného náboji Q_1 a Q_2 , nebo tok pole buzeného všemi čtyřmi náboji?



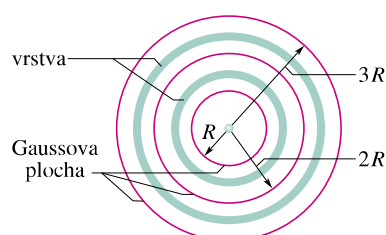
Obr. 24.22 Otázka 4

5. Mějme osm částic s náboji $+2Q, +3Q, +4Q, +5Q, -2Q, -3Q, -4Q, -5Q$. Zkuste vytvořit různé Gaussovy plochy obklopující jeden či více z těchto nábojů tak, aby celkový tok plochou byl $0, +Q/\epsilon_0, +2Q/\epsilon_0, \dots, +14Q/\epsilon_0$. Kterou z těchto hodnot není možné dosáhnout?

6. Tok elektrického pole kulovou Gaussovou plochou o poloměru r obklopující proton je Φ_E . Určete, ve které z následujících situací je tok menší, roven, či větší než Φ_E : (a) Proton se nachází vně plochy. (b) Uvnitř plochy jsou dva protony. (c) Jeden proton

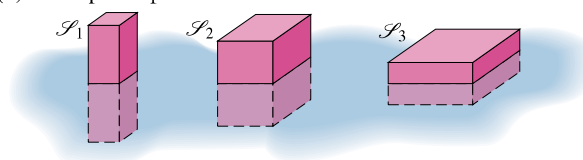
je uvnitř plochy, druhý je vně. (d) Jeden proton a jeden elektron leží uvnitř plochy.

7. Na obr. 24.23 jsou zobrazeny v řezu vnitřní kovová koule, dvě kovové kulové vrstvy a tři soustředné kulové Gaussovy plochy o poloměrech $R, 2R, 3R$. Na vnitřní kouli je náboj Q , na kulové vrstvě o menším poloměru je náboj $3Q$, na vrstvě o větším poloměru je náboj $5Q$. Seřadte Gaussovy plochy sestupně podle velikosti elektrické intenzity v libovolném bodě na jejich povrchu.



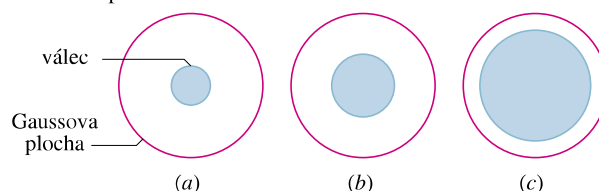
Obr. 24.23 Otázka 7

8. Na obr. 24.24 jsou tři Gaussovy plochy tvořené povrchy kvádrů, které jsou částečně zasunuté do velké tlusté kovové desky s konstantní plošnou hustotou náboje. \mathcal{S}_1 má největší výšku a nejmenší čtvercovou základnu, \mathcal{S}_3 má nejmenší výšku a největší čtvercovou základnu a rozměry \mathcal{S}_2 jsou mezi těmito hodnotami. Seřadte sestupně Gaussovy plochy podle velikosti (a) náboje, který obklopují, (b) elektrické intenzity na jejich horních podstavách, (c) toku elektrické intenzity horní podstavou, (d) toku spodní podstavou.



Obr. 24.24 Otázka 8

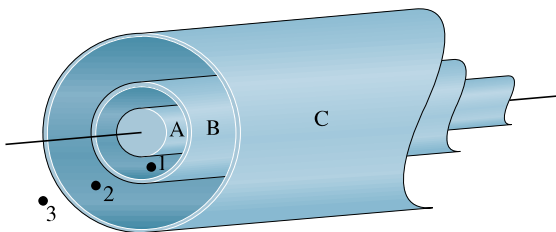
9. Na obr. 24.25 je znázorněn řez třemi válci, z nichž každý nese náboj Q . Gaussova plocha je tvořena povrchem sousého válce a má ve všech třech případech stejný poloměr. Seřadte v sestupném pořadí tyto případy podle velikosti elektrické intenzity na Gaussově ploše.



Obr. 24.25 Otázka 9

10. Na obr. 24.26 je řez třemi dlouhými sousými dutými válci, na nichž je rovnoměrně rozložen náboj. Na vnitřním válci A je

náboj $Q_A = +3Q_0$. Jaké náboje Q_B a Q_C musí být na válciích B a C, aby (je-li to vůbec možné) elektrická intenzita v bodech 1, 2, 3 byla nulová?



Obr. 24.26 Otázka 10

11. Tři nekonečně velké nevodivé vrstvy s konstantními plošnými hustotami náboje σ , 2σ , 3σ jsou umístěny rovnoběžně, obdobně jako dvě vrstvy na obr. 24.17a. Jaké musí být jejich uspořádání (zleva doprava), aby elektrická intenzita E byla nulová v jedné z oblastí a v jiné oblasti měla velikost $E = 2\sigma/\epsilon_0$?

12. Malá nabitá kulička leží uvnitř tenké kovové kulové vrstvy o poloměru R . Náboje kuličky a vrstvy jsou: (1) $+4Q$ a 0, (2) $-6Q$ a $+10Q$, (3) $+16Q$ a $-12Q$. Seřadte sestupně tyto případy podle velikosti náboje na (a) vnitřní, (b) vnější stěně vrstvy.

13. Seřadte sestupně situace z otázky 12 podle velikosti elektrické intenzity (a) v poloviční vzdálenosti (tj. $R/2$) od středu vrstvy, (b) ve vzdálenosti $2R$ od středu vrstvy.

14. V kontrole 4 určete velikost a směr elektrické intenzity v bodě ležícím ve vzdálenosti r od náboje, který leží ve středu kulové kovové vrstvy, jestliže se tento bod nachází (a) mezi nábojem a vrstvou, (b) v kovu (uvnitř vrstvy), (c) vně vrstvy.

15. Kulový nevodivý balon má na svém povrchu rovnoměrně rozložený kladný náboj. Určete, jak se mění při nafukování balonu velikost elektrické intenzity (zda klesá, roste, nebo zůstává stejná) v bodech, které (a) jsou uvnitř balonu, (b) jsou na povrchu balonu, (c) byly před nafukováním vně, nyní jsou uvnitř balonu, (d) byly a jsou stále vně balonu.

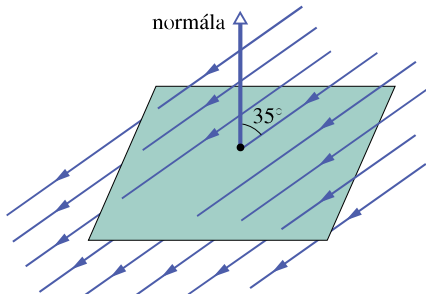
CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 24.2 Tok

1C. Voda v závlahovém kanálu šířky $d = 3,22$ m a hloubky $h = 1,04$ m teče rychlostí o velikosti $v = 0,207$ m·s⁻¹. Tok vody uvažovanou plochou je roven součinu hustoty vody ($1\,000$ kg·m⁻³) a jejího objemového toku touto plochou. Určete tok následujícími plochami: (a) plochou o obsahu hd , která je celá ponořená ve vodě a natočená kolmo k toku vody, (b) plochou $3hd/2$, z níž část hd je ve vodě, kolmo k toku, (c) plochou $hd/2$, která je pod hladinou, kolmo k toku, (d) plochou hd , z níž polovina je ve vodě, polovina nad vodou, kolmo k toku, (e) nakloněnou plochou hd , umístěnou ve vodě, přičemž její normála svírá se směrem toku úhel 34° .

ODST. 24.3 Tok elektrické intenzity

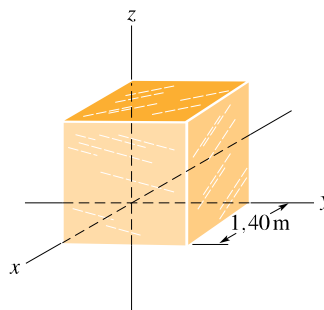
2C. Na obr. 24.27 je čtverec o straně $3,2$ mm, který se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě $1\,800$ N·C⁻¹. Siločáry pole svírají s normálou čtvercové plochy úhel 35° . Vypočítejte tok elektrické intenzity touto plochou.



Obr. 24.27 Cvičení 2

3C. V homogenním elektrickém poli je umístěna krychle o hraně $1,40$ m (obr. 24.28). Vypočítejte tok elektrické intenzity pravou stěnou krychle, je-li intenzita vyjádřena v N·C⁻¹:

(a) $6,00\mathbf{i}$, (b) $-2,00\mathbf{j}$, (c) $-3,00\mathbf{i} + 4,00\mathbf{k}$. (d) Jaký je celkový tok elektrické intenzity povrchem krychle pro každé z těchto polí?



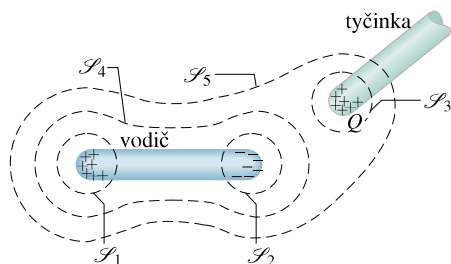
Obr. 24.28 Cvičení 3 a úloha 12

4Ú. V elektrickém poli o intenzitě $\mathbf{E} = 4\mathbf{i} - 3(y^2 + 2)\mathbf{j}$ (N·C⁻¹) je umístěna krychle (obr. 24.5). Vyjádřete tok intenzity (a) horní podstavou, (b) dolní podstavou, (c) levou stěnou, (d) zadní stěnou krychle. (e) Jaký je celkový tok intenzity všemi stěnami krychle?

ODST. 24.4 Gaussův zákon elektrostatiky

5C. Uvažujme čtyři náboje $2Q$, Q , $-Q$, $-2Q$. Popište, jak umístíte (je-li to vůbec možné) uzavřenou plochu tak, aby obklopovala v každém případě první z nábojů a aby jí procházel tok (a) 0, (b) $+3Q/\epsilon_0$, (c) $-2Q/\epsilon_0$.

6C. V obr. 24.29 je náboj izolovaného neutrálního vodiče polarizován kladně nabitou tyčinkou. Jaký je celkový tok každou z pěti Gaussových ploch \mathcal{S}_1 až \mathcal{S}_5 ? Předpokládejme, že náboje uvnitř ploch \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 , \mathcal{S}_3 jsou ve všech případech stejně velké.

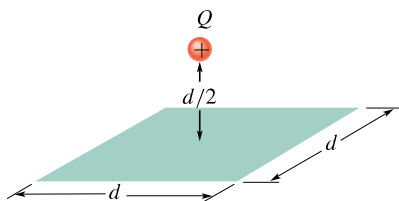


Obr. 24.29 Cvičení 6

7C. Bodový náboj $1,8\mu\text{C}$ se nachází uprostřed krychle o hraně 55 cm . Určete celkový tok elektrické intenzity povrchem krychle.

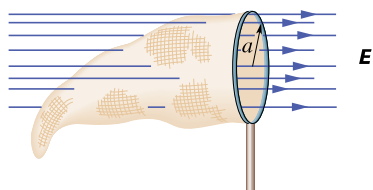
8C. Celkový tok intenzity každou stěnou hrací kostky (v jednotkách $10^3\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$) má velikost danou počtem N ok na stěně (tj. 1 až 6). Tok pro lichá čísla je záporný, pro sudá čísla je kladný. Určete celkový náboj, který se nachází uvnitř kostky.

9C. Na obr. 24.30 se bodový náboj $+Q$ nachází ve vzdálenosti $d/2$ přímo nad středem čtverce o straně d . Určete tok elektrické intenzity čtvercem. (Tip: Považujte čtverec za jednu stěnu krychle o hraně d .)



Obr. 24.30 Cvičení 9

10C. Síťka na motýly se nachází v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} (obr. 24.31). Její kruhový rám o poloměru a je kolmý ke směru pole. Určete tok elektrické intenzity sítkou.



Obr. 24.31 Cvičení 10

11C. Vypočítejte tok Φ_E elektrické intenzity (a) základnou, (b) kulovým povrchem polokoule o poloměru R . Elektrické pole \mathbf{E} je homogenní a je orientováno kolmo k základně polokoule, přičemž siločáry do ní vstupují její základnou.

12Ú. Vyjádřete celkový tok povrchem krychle ze cvičení 3 a obr. 24.28, jestliže elektrická intenzita je rovna (a) $\mathbf{E} = 3,00\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{E} = -4,00\mathbf{i} + (6,00 + 3,00\mathbf{j})$. Intenzita E je vyjádřena v $\text{N}\cdot\text{C}^{-1}$, souřadnice y v metrech. (c) Jak velký náboj se v obou případech nachází uvnitř krychle?

13Ú. Jaký celkový náboj se nachází uvnitř Gaussovy plochy tvořené povrchem krychle v úloze 4 (obr. 24.5)?

14Ú. Ve výšce 300 m byla naměřena intenzita elektrického pole o velikosti $60,0\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$, ve výšce 200 m pak $100\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. V obou případech směřovala elektrická intenzita svisle k Zemi. Stanovte celkový náboj uzavřený v krychli o hraně 100 m , jejíž spodní stěna leží ve výšce 200 m . Zakřivení Země zanedbejte.

15Ú. Bodový náboj Q se nachází v jednom rohu krychle o hraně a . Jaký je tok intenzity každou ze stěn krychle? (Tip: Použijte Gaussův zákon a využijte symetrie úlohy.)

16Ú. „Gaussův zákon pro gravitační pole“ má tvar:

$$\frac{1}{4\pi G} \Phi_g = \frac{1}{4\pi G} \oint \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} = -m,$$

kde G je gravitační konstanta a Φ_g je tok intenzity \mathbf{g} gravitačního pole Gaussovou plochou, která obklopuje hmotný bod o hmotnosti m . Intenzita pole \mathbf{g} je rovna zrychlení testovací částice, na kterou bodové těleso o hmotnosti m působí gravitační silou. Odvoďte z uvedeného vztahu Newtonův gravitační zákon. Jaký je význam znaménka minus?

ODST. 24.6 Nabitý izolovaný vodič

17C. Intenzita elektrického pole těsně nad povrchem nabitého válce fotokopírky má velikost $E = 2,3\cdot 10^5\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. Jaká je plošná hustota náboje na válci za předpokladu, že válec je vodič?

18C. Rovnoměrně nabitá vodivá koule o průměru $1,2\text{ m}$ má plošnou hustotu náboje $8,1\mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. (a) Určete celkový náboj na jejím povrchu. (b) Jaký je celkový tok intenzity povrchem koule?

19C. Na povrch družic, které prolétají radiálními pásy Země, dopadá značné množství elektronů. Výsledný nahromaděný náboj může poškodit elektronické součástky a rušit jejich činnost. Předpokládejme, že kovová družice ve tvaru koule o průměru $1,3\text{ m}$ nashromáždí při jednom obletu Země náboj $2,4\mu\text{C}$. (a) Určete výslednou plošnou hustotu náboje na povrchu družice. (b) Jaká je těsně nad povrchem družice intenzita pole, které je vytvořeno povrchovým nábojem?

20C. Vodivá koule nesoucí kladný náboj Q je obklopena kulovou vodivou vrstvou. (a) Jak velký náboj je na vnitřní stěně vrstvy? (b) Další kladný náboj Q_1 je umístěn vně vrstvy. Jaký bude nyní náboj na vnitřní stěně vrstvy? (c) Jaký bude náboj na vnitřní stěně vrstvy, jestliže se nyní náboj Q_1 nachází mezi kulovou vrstvou a koulí? (d) Zůstávají naše odpovědi platné, i kdyby koule a kulová vrstva nebyly soustředné?

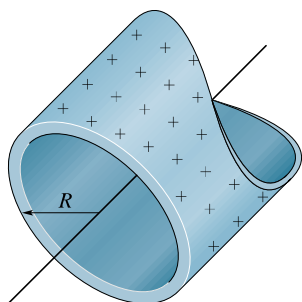
21Ú. Izolovaný vodič libovolného tvaru nese kladný náboj $10\cdot 10^{-6}\text{ C}$. Uvnitř vodiče je dutina, v níž se nachází bodový náboj $Q = 3,0\cdot 10^{-6}\text{ C}$. Určete velikost náboje indukovaného (a) na stěnách dutiny, (b) na vnější stěně vodiče.

ODST. 24.7 Použití Gaussova zákona: válcová symetrie

22C. Náboj nekonečně dlouhého vlákna vytváří ve vzdálenosti 2 m elektrostatické pole o intenzitě velikosti $4,5\cdot 10^4\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. Vypočítejte délkovou hustotu náboje na vlákně.

23C. (a) Válec kopírky ze cvič. 17 má délku 42 cm a průměr 12 cm. Jaký celkový náboj nese? (b) Výrobce si přeje vytvořit deskopovou verzi kopírky. To vyžaduje, aby se zmenšily rozměry válce na délku 28 cm a průměr 8 cm. Přitom se nesmí změnit elektrické pole povrchu válce. Jaký náboj ponese nový válec?

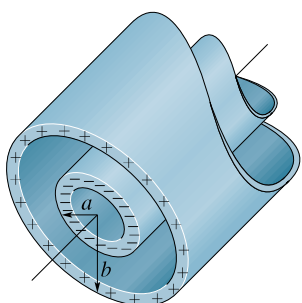
24Ú. Na obr. 24.32 je řez dlouhou tenkostěnnou kovovou trubkou o poloměru R , která nese na povrchu náboj s délkovou hustotou τ . Vyjádřete velikost intenzity E jako funkci vzdálenosti r od osy trubky pro (a) $r > R$, (b) $r < R$. Nakreslete graf této funkce v intervalu od $r = 0$ do $r = 5,0$ cm, jestliže $\tau = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$ a $R = 3,0$ cm. (Tip: Použijte válcovou Gaussovu plochu, sousou s kovovou trubkou.)



Obr. 24.32 Úloha 24

25Ú. Na obr. 24.33 je řez dvěma dlouhými sousými válci o poloměrech a , b , kde $a < b$. Válce nesou stejně velké, ale opačné náboje rozložené s konstantní délkovou hustotou τ . Užitím Gaussova zákona dokažte, že (a) pro $r < a$ je $E = 0$, (b) mezi válci, tj. pro $a < r < b$, je

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}.$$

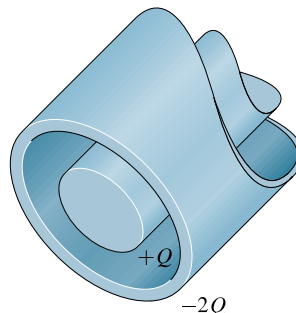


Obr. 24.33 Úloha 25

26Ú. Dlouhý přímý drát nese záporný náboj s délkovou hustotou $\tau = 3,6 \text{ nC} \cdot \text{m}^{-1}$. Drát je obklopen sousým nevodivým dutým válcem o vnějším poloměru 1,5 cm. Válec má mít přitom na své vnější stěně kladný náboj s plošnou hustotou σ takovou, aby celkové vnější pole bylo nulové. Vypočítejte potřebnou hodnotu σ .

27Ú. Velmi dlouhá vodivá válcová tyčinka délky L nesoucí náboj $+Q$ se nachází uvnitř vodivé válcové trubky (rovněž

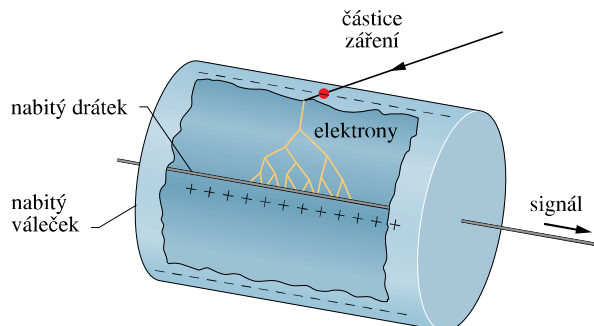
délky L), která má náboj $-2Q$ (obr. 24.34). Použitím Gaussova zákona najděte (a) elektrickou intenzitu pole v bodech vně vodivé trubky, (b) rozložení náboje na vodivé trubce, (c) elektrickou intenzitu pole mezi tyčinkou a trubkou.



Obr. 24.34 Úloha 27

28Ú. Dva dlouhé nabitě sousé válce mají poloměry 3,0 cm a 6,0 cm. Délková hustota náboje na vnitřním válci je $+5,0 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$, na vnějším válci $-7,0 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$. Určete elektrickou intenzitu ve vzdálenosti (a) $r = 4,0$ cm, (b) $r = 8,0$ cm od osy válců.

29Ú. Na obr. 24.35 je princip Geigerova čítače pro detekci ionizujícího záření. Jeho součástí je tenký, kladně nabitý drátek, kolem něhož je soustředný dutý vodivý váleček nesoucí stejně velký záporný náboj. Tím se uvnitř válečku vytvoří silné radiální



Obr. 24.35 Úloha 29

pole. Uvnitř válečku je inertní plyn pod nízkým tlakem. Vnikne-li záření dovnitř válečku, ionizuje několik atomů plynu. Vzniklé volné elektrony jsou přitahovány směrem ke kladně nabitému drátku. Elektrické pole je tak intenzivní, že volné elektrony získají mezi srážkami s jinými atomy plynu energii dostatečnou pro další ionizaci. Tím narůstá počet volných elektronů a proces se opakuje, dokud elektrony nedorazí k drátku. Výsledná „lavina“ elektronů dopadá na drátek a vytváří signál, který indikuje průchod původní částice záření. Předpokládejte, že drátek má poloměr $25 \mu\text{m}$, váleček má poloměr 1,4 cm a délku 16 cm. Určete celkový náboj drátku, je-li intenzita elektrického pole na vnitřní stěně válečku $2,9 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$.

30Ú. Pozitron s nábojem $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ obíhá po kruhové dráze o poloměru r mezi válci z úlohy 25. Určete jeho kinetickou

energii v elektronvoltech. Předpokládejte, že $a = 2,0 \text{ cm}$, $b = 3,0 \text{ cm}$, $\tau = 30 \text{ nC}\cdot\text{m}^{-1}$.

31C. Náboj je rovnoměrně rozložen v objemu nekonečně dlouhého válce o poloměru R . (a) Dokažte, že ve vzdálenosti r od osy válce ($r < R$) platí

$$E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0},$$

kde ρ je objemová hustota náboje. (b) Napište výraz pro E , jestliže $r > R$.

ODST. 24.8 Použití Gaussova zákona: rovinná symetrie

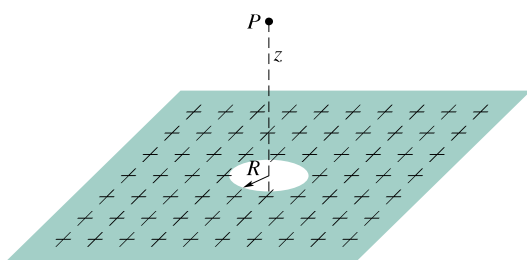
32C. Na obr. 24.36 je řez dvěma velkými, rovnoběžnými nevodivými deskami, na nichž je rovnoměrně rozložen kladný náboj s plošnou hustotou σ . Určete E v bodech (a) nad vrstvami, (b) mezi nimi, (c) pod nimi.



Obr. 24.36 Cvičení 32

33C. Čtvercová kovová deska zanedbatelné tloušťky o straně $8,0 \text{ cm}$ nese celkový náboj $6,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}$. (a) Určete velikost intenzity elektrického pole těsně nad středem desky (např. ve výšce $0,50 \text{ mm}$), je-li náboj rozdělen rovnoměrně po obou stěnách desky. (b) Určete E ve vzdálenosti 30 m , můžeme-li z této vzdálenosti považovat desku za bodový náboj.

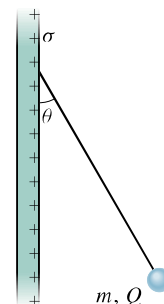
34C. Ve středu velké rovinné nevodivé plochy s plošnou hustotou náboje σ je vyražen malý kruhový otvor o poloměru R (obr. 24.37). Zanedbejte zakřivení siločár kolem okrajů a vypočítejte elektrickou intenzitu v bodě P na ose otvoru ve vzdálenosti z od jeho středu. (Tip: Rov. (23.24) a princip superpozice.)



Obr. 24.37 Cvičení 34

35Ú. Na obr. 24.38 je nevodivá kulička o hmotnosti $m = 1,0 \text{ mg}$ nesoucí náboj $Q = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ rovnoměrně rozložený v celém objemu. Kulička je upevněna na nevodivém závěsu, který svírá úhel $\theta = 30^\circ$ se svislou rovnoměrně nabitou nevodivou deskou. Vypočítejte plošnou hustotu náboje σ na desce, přičemž berte v úvahu hmotnost kuličky a předpokládejte, že deska není prostorově ohraničená.

36Ú. Dvě velké, tenké a rovnoběžné kovové desky leží blízko sebe (obr. 24.16c); levá deska je záporně nabitá. Desky mají na



Obr. 24.38 Úloha 35

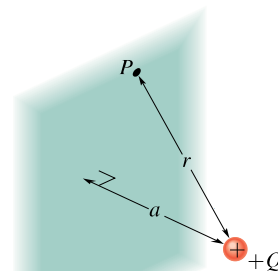
vnitřních stěnách náboje opačných znamének s plošnou hustotou $\sigma = 7,0 \cdot 10^{-22} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$. Určete velikost a směr elektrické intenzity E (a) vlevo od desek, (b) vpravo od nich, (c) mezi nimi.

37Ú. Elektron je vystřelen kolmo k velké kovové desce, která nese záporný náboj s plošnou hustotou $2,0 \cdot 10^{-6} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$. Počáteční kinetická energie elektronu je 100 eV . V důsledku odpuzivých sil se elektron zastaví právě v okamžiku, kdy se dotkne desky. Určete vzdálenost, ze které byl vystřelen.

38Ú. Dvě rovnoběžné kovové desky o ploše $1,0 \text{ m}^2$ jsou od sebe vzdáleny 5 cm a nesou na vnitřních stěnách stejně velké opačné náboje. Jak velký je náboj na deskách, je-li velikost intenzity elektrostatičké pole mezi deskami rovna $55 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$? Neuvažujte změny pole v blízkosti hran desek.

39Ú. Při laboratorním pokusu je tíhová síla elektronu právě vyvážena silou, kterou na něj působí elektrostatičké pole vytvořené dvěma velkými, rovnoběžnými nevodivými opačně nabitými deskami vzdálenými od sebe $2,3 \text{ cm}$. Určete (a) velikost plošné hustoty náboje na deskách (za předpokladu, že je homogenní), (b) směr intenzity pole.

40Ú*. Kladný náboj Q , který se nachází ve vzdálenosti a od nekonečně velké vodivé roviny, indukuje na této rovině záporný náboj s plošnou hustotou $\sigma = -Qa/(2\pi r^3)$, kde r je vzdálenost bodu P od náboje $+Q$ na rovině (obr. 24.39). Určete (a) velikost



Obr. 24.39 Úloha 40

složky elektrické intenzity E kolmé k vodivé rovině pocházející od indukovaného náboje, (b) celkový záporný náboj indukovaný na této rovině. (c) Jaká je elektrostatičká síla mezi nábojem $+Q$ a nábojem indukovaným na vodivé rovině? Je přitažlivá, nebo

odpudivá? (d) Jaký náboj, umístěný ve stejné vzdálenosti, ale na opačné straně roviny, by vytvořil tutéž sílu?

41Ú* Rovinná vrstva tloušťky d je rovnoměrně nabitá s objemovou hustotou náboje ρ . Určete velikost elektrické intenzity pole v bodech (a) uvnitř, (b) vně vrstvy, a to jako funkci x , tj. kolmé vzdálenosti měřené od střední roviny vrstvy.

ODST. 24.9 Použití Gaussova zákona: kulová symetrie

42C. Vodivá koule o poloměru 10 cm nese neznámý náboj. Intenzita elektrostatického pole ve vzdálenosti 15 cm od středu koule má velikost $3,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$ a směřuje ke středu koule. Určete náboj na povrchu koule.

43C. Bodový náboj způsobí tok intenzity elektrického pole $-750 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$ kulovou Gaussovou plochou o poloměru 10,0 cm se středem v tomto náboji. (a) Určete, jak velký je tok elektrické intenzity Gaussovou plochou, zvětší-li se její poloměr dvakrát. (b) Určete velikost bodového náboje.

44C. Tenkostěnná kovová koule o poloměru 25 cm nese náboj $2,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$. Určete velikost E pro bod (a) uvnitř koule, (b) těsně nad povrchem koule, (c) ve vzdálenosti 3,0 m od středu koule.

45C. Bodový náboj $Q = 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ C}$ je umístěn ve středu kulové dutiny o poloměru 3,0 cm, která je vytvořena v kovovém bloku. Pomocí Gaussova zákona elektrostatiky vyjádřete velikost elektrické intenzity v bodě (a) P_1 , který je v poloviční vzdálenosti mezi nábojem a stěnou dutiny, (b) P_2 uvnitř kovu.

46C. Dvě nabitě soustředné kulové plochy mají poloměry 10,0 cm a 15,0 cm. Náboj na vnitřní z nich je $4,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ a náboj na vnější je $2,00 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Určete velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti (a) $r = 12,0 \text{ cm}$, (b) $r = 20,0 \text{ cm}$ od jejich středu.

47C. Tenká kovová kulová vrstva o poloměru a nese náboj Q_a . S ní soustředná tenká kulová vrstva o poloměru b ($b > a$) nese náboj Q_b . Vypočítejte velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti r od středu, je-li (a) $r < a$, (b) $a < r < b$, (c) $r > b$. (d) Jaké jsou náboje na vnitřních i vnějších stěnách obou vrstev?

48C. V článku z r. 1911 Ernest Rutherford napsal: Abychom si vytvořili určitou představu o silách, které by mohly letící částici α vychýlit, uvažujme atom, který má uprostřed bodový kladný náboj Ze , kolem něhož jsou rovnoměrně rozloženy záporné náboje $-Ze$ v kouli o poloměru R . Elektrická intenzita E ve vzdálenosti r od středu má v bodě nacházejícím se uvnitř atomu velikost

$$E = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3} \right).$$

Ověřte tuto rovnici (tzv. *Rutherfordův vztah*).

49C. Rov. (24.11) $E = \sigma/\epsilon_0$ vyjadřuje elektrickou intenzitu v bodě, který se nachází v blízkosti nabitě vodivé plochy. Použijte tuto rovnici na nabitou kouli o poloměru r nesoucí náboj Q a dokažte, že elektrické pole vně koule je stejné jako pole bodového náboje, umístěného ve středu koule.

50Ú. Proton obíhá po kružnici rychlostí $v = 3 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ těsně nad nabitou koulí o poloměru $r = 1,00 \text{ cm}$. Určete náboj koule.

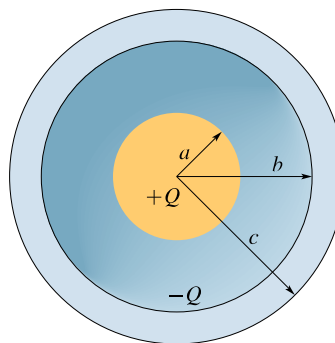
51Ú. Bodový náboj $+Q$ se nachází ve středu elektricky neutrální duté vodivé koule o vnitřním poloměru a a vnějším poloměru b . Jaký náboj se objeví (a) na vnitřní stěně, (b) na vnější stěně koule? Najděte výrazy pro celkovou intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti r od středu koule, jestliže (c) $r < a$, (d) $b > r > a$, (e) $r > b$. Nakreslete siločáry pro tyto tři oblasti. Pro případ $r > b$ určete intenzitu elektrického pole pocházející (f) od středového bodového náboje a náboje vnitřní stěny, (g) od vnější nabitě stěny.

Nyní umístěte vně duté koule další bodový náboj $-Q$. Změní tento náboj rozložení nábojů na (h) vnější ploše, (i) vnitřní ploše? Nakreslete pro tyto případy elektrické siločáry. (j) Zjistěte, zda působí na druhý bodový náboj nějaká elektrostatická síla. (k) Působí nějaká další elektrostatická síla na první bodový náboj? (l) Odporuje tato situace třetímu Newtonovu zákonu?

52Ú. V plně nevodivé kouli o poloměru R je nerovnoměrně rozložen náboj s objemovou hustotou $\rho = \rho_0 r/R$, kde ρ_0 je konstanta a r je vzdálenost od středu koule. Dokažte, že (a) celkový náboj na kouli je $Q = \pi \rho_0 R^3$, (b) intenzita elektrického pole uvnitř koule má velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^4} r^2.$$

53Ú. Na obr. 24.40 je koule o poloměru a a s ní soustředná kulová vodivá vrstva o vnitřním poloměru b a vnějším poloměru c . Koule má náboj $+Q$, který je rovnoměrně rozložen v jejím objemu a vodivá kulová vrstva má náboj $-Q$. Vyjádřete závislost elektrické intenzity na poloměru r (a) uvnitř koule ($r < a$), (b) mezi koulí a vrstvou ($a < r < b$), (c) uvnitř vrstvy ($b < r < c$), (d) vně vrstvy ($r > c$). (e) Jak velký náboj se nachází na vnitřní a vnější stěně vrstvy?

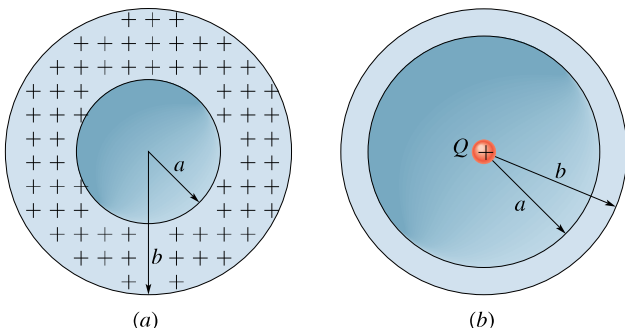


Obr. 24.40 Úloha 53

54Ú. Na obr. 24.41a je znázorněna nabitá kulová vrstva (vnitřní poloměr $a = 10 \text{ cm}$, vnější poloměr $b = 20 \text{ cm}$) s objemovou hustotou náboje $\rho = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$. Nakreslete závislost velikosti E na vzdálenosti r pro r od 0 do 30 cm.

55Ú. Na obr. 24.41b je nevodivá kulová vrstva o vnitřním poloměru a , vnějším poloměru b s objemovou hustotou náboje $\rho = A/r$ (uvnitř vrstvy), kde A je konstanta a r je vzdálenost od středu kulové vrstvy. Do středu systému umístěte bodový náboj Q . Jaká by měla být velikost A , aby pole ve vrstvě

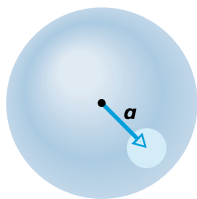
($a \leq r \leq b$) bylo homogenní? (Tip: Konstanta A závisí na a , ale ne na b .)



Obr. 24.41 Úlohy 54 a 55

56Ú. Atom vodíku můžeme považovat za soustavu, kterou tvoří proton s kladným nábojem $+e$ a obíhající elektron, jehož náboj $-e$ je rozložen kolem protonu s objemovou hustotou $\rho = Ae^{-2r/a_0}$, kde A je konstanta, $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m je Bohrov poloměr a r je vzdálenost od středu atomu. (a) Atom vodíku je elektricky neutrální. Stanovte konstantu A . (b) Poté určete velikost intenzity elektrického pole atomu pro Bohrov poloměr.

57Ú*. V nevodivé kouli je rovnoměrně rozložen náboj s objemovou hustotou ρ . Nechť \mathbf{r} je polohový vektor obecného bodu P uvnitř koule vzhledem k jejímu středu. (a) Dokažte, že intenzita elektrického pole v bodě P je $\mathbf{E} = \rho\mathbf{r}/(3\epsilon_0)$. (Všimněte si, že tento výsledek nezávisí na poloměru koule.) (b) Do koule vyvrtáme nesoustřednou kulovou dutinu (obr. 24.42). Pomocí principu superpozice ukažte, že intenzita elektrického pole v každém bodě dutiny je $\mathbf{E} = \rho\mathbf{a}/(3\epsilon_0)$ (je tedy homogenní), kde \mathbf{a} je polohový vektor středu dutiny. (Všimněte si, že výsledek nezávisí ani na poloměru koule, ani na poloměru dutiny.)



Obr. 24.42 Úloha 57

58Ú*. Kulově symetrické, ale nehomogenní rozložení nábojů vytváří elektrické pole o intenzitě $E(r) = Kr^4$, které směřuje radiálně od středu koule, přičemž r je vzdálenost od středu. Jaká je objemová hustota nábojů?

PRO POČÍTAČ

59Ú. V Rutherfordově vztahu (cvič. 48) pro velikost elektrické intenzity E uvnitř atomu položte $r = \alpha R$ a nakreslete závislost E na α v intervalu $0 < \alpha < 1$. Nakreslete také závislost E' na α pro případ, kdy elektrické pole je vytvořeno pouze samotným nukleonem. Z těchto dvou křivek určete hodnotu α , pro niž $E = 0,500E'$.

60Ú. Počítačem lze snadno ověřit Gaussův zákon ve všech situacích, nejen v takových, kde lze tok elektrické intenzity snadno určit z vhodné symetrie v rozložení nábojů a podle toho vhodné zvolené Gaussovy plochy. Ukažme to na poli bodového náboje a Gaussově ploše tvaru povrchu krychle. Délku její hrany zvolíme $d = 1,000$ m, střed soustavy souřadnic umístíme do středu krychle a osy orientujeme ve směru jejích hran. Na osu y' umístíme do polohy y' náboj $1,00 \mu\text{C}$.

Rozdělte každou stěnu krychle na malé čtverečky, pokládejte \mathbf{E} na celém čtverečku za konstantní, vypočítejte dílčí tok každým tímto čtverečkem a toky sečtěte; tím dostanete tok každou stěnou krychle. Na závěr sečtěte toky všemi stěnami; tím dostanete celkový tok Gaussovou plochou. Porovnejte získaný výsledek s výrazem Q/ϵ_0 podle Gaussova zákona, v němž Q je celkový náboj uvnitř krychle. Čím menší čtverečky použijete pro výpočet, tím přesnější výsledek můžete očekávat, protože tím výstižněji lze považovat \mathbf{E} za konstantní na celém čtverečku. Pro výpočet na tři platná místa stačí rozdělit povrch krychle na čtverečky o straně rovné jedné třicetině hrany krychle. Elektrická intenzita v bodě (x, y, z) má složky

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3}, \quad E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - y'}{r^3}, \quad E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r^3},$$

kde $r = \sqrt{x^2 + (y - y')^2 + z^2}$. Polohu y' náboje zvolte takto: (a) $y' = 0$ (náboj ve středu krychle), (b) $y' = 0,200$ m (náboj uvnitř krychle), (c) $y' = 0,400$ m (náboj uvnitř krychle), (d) $y' = 0,600$ m (náboj vně krychle).

25

Elektrický potenciál



Blesk zabíjel... Když se na vyhlídkové plošině tato žena těšila z pohledu na okolí, zjistila, že jí na hlavě stojí vlasy. Její bratr ji tak vyfotografoval. Pět minut po jejich odchodu udeřil do plošiny blesk, zabil jednu osobu a sedm dalších zranil. Proč se ženě zježily vlasy? Z jejího pohledu lze soudit, že to nebyl strach — i když k němu byl pádný důvod.

25.1 ELEKTRICKÁ POTENCIÁLNÍ ENERGIE

Newtonův zákon pro gravitační sílu a Coulombův zákon pro elektrostatickou sílu mají stejný matematický tvar, takže některé obecné závěry týkající se gravitační síly, ke kterým jsme došli v kap. 14, mohou být zřejmě použity i pro sílu elektrostatickou. Především je zřejmé, že elektrostatická síla je *silou konzervativní*. Systému složenému ze dvou nebo více nabitých částic lze tedy přiřadit potenciální energii E_p , kterou nazýváme **elektrostatickou** nebo též **elektrickou**. Změní-li se v takovém systému poloha částic z počáteční konfigurace \mathcal{K}_i do koncové \mathcal{K}_f , pak elektrostatická síla vykoná na částicích práci W . Z rov. (8.1) plyne, že odpovídající změna ΔE_p potenciální energie systému je

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = -W. \quad (25.1)$$

Pro elektrostatickou sílu platí stejně jako pro jiné konzervativní síly, že práce touto silou vykonaná *nezávisí na trajektorii*. Předpokládejme, že se jedna z nabitých částic patřících do systému přesune z počáteční polohy \mathbf{r}_i do koncové polohy \mathbf{r}_f vlivem elektrostatické síly od ostatních nabitých částic. Za předpokladu, že se polohy ostatních částic nemění, je práce vykonaná touto silou stejná při libovolném tvaru (tedy i délce) trajektorie částice mezi body s polohovými vektory \mathbf{r}_i a \mathbf{r}_f (dále jen mezi body (i) a (f)).

Za *vztažnou (referenční) konfiguraci* dané soustavy nabitých částic je vhodné zvolit takové vzájemné rozmístění částic, při němž jsou částice „v nekonečnu“, tedy tak daleko od sebe, že jejich vzájemné působení můžeme zanedbat. *Potenciální energie*, která takovéto konfiguraci částic odpovídá, se obvykle volí rovna nule. Předpokládejme, že několik nabitých částic přejde z počátečního stavu s nekonečně velkými rozestupy (konfigurace \mathcal{K}_i) do nového stavu a vytvoří tak uvažovaný systém částic (v konfiguraci \mathcal{K}_f). Nechť počáteční potenciální energie částic $E_{p,i}$ je nulová a nechť symbol W_∞ představuje práci vykonanou elektrostatickými silami působícími mezi částicemi při jejich přesunu z nekonečna do poloh v konfiguraci \mathcal{K}_f .* Pak podle rov. (25.1) potenciální energie E_p systému částic v koncové konfiguraci \mathcal{K}_f je

$$E_p = -W_\infty. \quad (25.2)$$

Elektrickou potenciální energii považujeme stejně jako jiné druhy potenciální energie za jednu z forem energie.

* Abychom mohli elektrické síly považovat za elektrostatické, musí se částice pohybovat natolik pomalu, aby se neuplatnily jevy spjaté s pohybem náboje, např. elektrický proud.

Připomeňme z kap. 8, že (mechanická) energie izolovaného systému se zachovává, pokud v systému působí pouze konzervativní síly. Tento fakt náležitě využijeme v další části této kapitoly.

RADY A NÁMĚTY

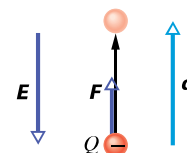
Bod 25.1: *Elektrická potenciální energie. Práce vykonaná elektrickým polem*

Elektrickou potenciální energii spojujeme se systémem částic jako s celkem. Setkáme se však i s výroky (poprvé u př. 25.1), v nichž je tato energie přiřazena pouze jediné částici systému. Například čteme „elektron v elektrickém poli má elektrickou potenciální energii 10^{-7} J.“ I takové výroky jsou přijatelné, ale vždy si musíme uvědomit, že ve skutečnosti je potenciální energie vlastností celého systému — v uvedeném příkladu celé konfigurace elektron + nabitá částice, které vytvářejí elektrické pole. Přiřazujeme-li potenciální energii jen jediné částici z celého systému, říkáme často, že práce vykonaná na částici je vykonána *elektrickým polem*. Tím rozumíme, že práci na částici vykoná výsledná síla vyvolaná ostatními částicemi systému prostřednictvím jejich společného elektrického pole.

Zapamatujte si také, že přiřadit hodnotu potenciální energie částici nebo systému částic (jako v uvedeném příkladu hodnotu 10^{-7} J) má smysl *jen* tehdy, zadáme-li hodnotu potenciální energie ve vhodném referenčním stavu.

PŘÍKLAD 25.1

Elektrony se uvolňují náhodnými srážkami molekul vzduchu s částicemi kosmického záření přicházejícího z vesmíru. Uvolněný elektron podléhá působení elektrostatické síly \mathbf{F} vyvolané elektrickým polem o intenzitě \mathbf{E} , které je v atmosféře vytvořeno nabitými částicemi nacházejícími se vždy v nějakém množství na zemském povrchu. Blízko zemského povrchu má elektrická intenzita velikost $E \doteq 150 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$ a směřuje k zemi. Jaká je změna ΔE_p elektrické potenciální energie uvolněného elektronu, jestliže se působením elektrostatické síly posunul vzhůru po svislé dráze délky $d = 520 \text{ m}$ (obr. 25.1)?



Obr. 25.1 Příklad 25.1. Elektron v atmosféře se přemísťuje svisle vzhůru do vzdálenosti d vlivem elektrostatické síly $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$.

ŘEŠENÍ: Rov. (25.1) uvádí do vzájemného vztahu změnu elektrické potenciální energie elektronu ΔE_p a práci W vykonanou na elektronu elektrickým polem. Podle kap. 7 je práce

vykonaná konstantní silou \mathbf{F} , působící na částici a vyvolávající posunutí \mathbf{d} částice, rovna

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \quad (25.3)$$

Podle rov. (23.28) platí $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$. Připomeňme, že znaménko náboje Q je do této vektorové rovnice zahrnuto a že Q je náboj elektronu ($Q = -e \doteq -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Do rov. (25.3) dosadíme za sílu \mathbf{F} , čímž dostaneme

$$W = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{d} = QEd \cos \theta, \quad (25.4)$$

kde θ je úhel mezi směry vektorů \mathbf{E} a \mathbf{d} . Intenzita \mathbf{E} směřuje k zemskému povrchu a posunutí \mathbf{d} má směr svise vzhůru. Proto $\theta = 180^\circ$. Dosadíme-li tuto hodnotu spolu s ostatními hodnotami do rov. (25.4), dostaneme

$$\begin{aligned} W &= (-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(150 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1})(520 \text{ m}) \cdot (-1) = \\ &= 1,20 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \end{aligned}$$

Podle rov. (25.1) pak je

$$\Delta E_p = -W = -1,20 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \quad (\text{Odpověď})$$

To znamená, že během 520 m dlouhého výstupu klesne elektrická potenciální energie elektronu o $1,20 \cdot 10^{-14} \text{ J}$.

KONTROLA 1: Na obrázku znázorněný proton se pohybuje ve směru šipky v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} z bodu (i) do (f). (a) Koná elektrické pole působící na proton kladnou, nebo zápornou práci? (b) Roste, nebo klesá elektrická potenciální energie protonu při jeho pohybu?



25.2 ELEKTRICKÝ POTENCIÁL, NAPĚTÍ

Z př. 25.1 je vidět, že elektrická potenciální energie nabitě částice v elektrickém poli závisí na velikosti jejího náboje. Avšak potenciální energie vztahovaná na *jednotkový náboj* má jednoznačnou hodnotu, závislou už jen na poloze v elektrickém poli.

Předpokládejme například, že jsme za testovací částici zvolili proton s kladným nábojem $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ a umístili ho do pole v bodě, v němž má tato částice potenciální energii

$2,40 \cdot 10^{-17} \text{ J}$. Potenciální energie připadající na jednotkový náboj je tedy

$$\frac{2,40 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 150 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}.$$

Dále předpokládejme, že proton nahradíme α -částicí, která má dvakrát větší kladný náboj, tedy $3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Zjistili bychom, že α částice má energii dvakrát větší než proton, tj. $4,80 \cdot 10^{-17} \text{ J}$. Energie připadající na jednotkový náboj však zůstává stejná ($150 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}$). Energií připadající na jednotkový náboj můžeme zapsat podílem E_p/Q . Je nezávislá na náboji Q částice, kterou jsme k testování použili, a *charakterizuje pouze elektrické pole*, které v bodě s polohovým vektorem \mathbf{r} vyšetřujeme. Nazýváme ji **elektrický potenciál** φ (neboli potenciál elektrického pole; v dalším píšeme též jen potenciál, pokud nehrozí záměna s potenciály polí jiných sil — gravitační, pružnosti, ...):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{E_p}{Q} \quad (\text{definice potenciálu}). \quad (25.5)$$

Poznamenejme, že potenciál je *skalární* veličina, nikoli vektorová.

Rozdíl hodnot potenciálu $\Delta\varphi$ mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) elektrického pole je roven rozdílu hodnot potenciální energie jednotkového náboje v těchto bodech:

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = \frac{E_{p,f}}{Q} - \frac{E_{p,i}}{Q} = \frac{\Delta E_p}{Q} \quad (25.6)$$

a nazýváme ho (**elektrické**) **napětí** U mezi těmito body. Přívlastek „elektrický“ budeme používat tehdy, pokud by hrozilo nedorozumění, např. záměna s *mechanickým* napětím $\tau = F/S$ z kap. 13. Dosadíme-li rov. (25.1) do (25.6), dostaneme

$$U = \Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = -\frac{W}{Q} \quad (\text{definice napětí}). \quad (25.7)$$

Napětí mezi dvěma body elektrického pole je tedy rovno záporně vzaté práci vykonané elektrostatickou silou při přemístění náboje jednotkové velikosti mezi těmito body. Může být kladné, záporné, nebo nulové; to závisí na znaménkách náboje Q a práce W . Jestliže za referenční (vztažnou) hodnotu elektrické potenciální energie zvolíme $E_{p,i} = 0$ v nekonečnu, pak podle rov. (25.5) bude hodnota potenciálu φ v nekonečnu také nulová. Elektrický potenciál φ_f v libovolném bodě (f) elektrického pole je podle rov. (25.7) dán vztahem

$$\varphi_f = -\frac{W_\infty}{Q}, \quad (25.8)$$

kde W_∞ je práce vykonaná elektrickým polem při přemístění částice s nábojem Q z nekonečna do uvažovaného bodu (f). Potenciál tedy může být kladný, záporný, nebo nulový. Z rov. (25.8) vyplývá, že jednotkou pro elektrický potenciál i pro napětí v soustavě SI je $\text{J}\cdot\text{C}^{-1}$. Tato jednotka se vyskytuje tak často, že pro ni byl zavedený samostatný název *volt* (značka V). Platí tedy

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ joule na } 1 \text{ coulomb.} \quad (25.9)$$

Tato jednotka pro potenciál umožňuje zavést vhodnější jednotku pro intenzitu elektrického pole \mathbf{E} , kterou jsme až dosud vyjadřovali v newtonech na coulomb. Přihlédneme-li ke vztahům (25.4) a (25.6), dostaneme

$$\begin{aligned} 1 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1} &= (1 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1})(1 \text{ V}\cdot\text{C}\cdot\text{J}^{-1})(1 \text{ J}\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}) = \\ &= 1 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}. \end{aligned} \quad (25.10)$$

V dalším budeme dávat přednost jednotce $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ před dosavadní jednotkou $1 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$.

Nyní můžeme stanovit velikost jednotky energie nazvané **elektronvolt**, která byla zavedena v čl. 7.1 pro měření energie v atomovém a subatomovém světě. Jeden elektronvolt (značka eV) je energie, která se rovná práci nutné k přemístění jednoho elementárního náboje e (tj. náboje velikosti např. jednoho elektronu nebo protonu) mezi dvěma místy elektrického pole, mezi nimiž je napětí jednoho voltu. Z rov. (25.7) vyplývá, že tato práce je určena výrazem $Q\Delta\varphi$, takže

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= e(1 \text{ V}) \doteq \\ &\doteq (1,60\cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ J}\cdot\text{C}^{-1}) \doteq 1,60\cdot 10^{-19} \text{ J}. \end{aligned}$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 25.2: Potenciál a potenciální energie

Elektrický potenciál φ a elektrická potenciální energie E_p jsou rozdílné veličiny a nesmíme je zaměňovat.

Elektrický potenciál charakterizuje elektrické pole jako takové. Hodnota potenciálu se vyjadřuje v joulech na coulomb neboli ve voltech.

Elektrická potenciální energie je energie nabitěho tělesa umístěného do vnějšího elektrického pole (nebo přesněji, je to energie systému sestávajícího z nabitěho tělesa a vnějšího elektrického pole); vyjadřuje se v joulech.

Práce vykonaná v elektrickém poli vnější silou

Předpokládejme, že se v elektrickém poli vlivem vnější síly přemísťuje částice s nábojem Q z bodu (i) do bodu (f).

Při takovém přemístění částice koná vnější síla práci W_{ext} a elektrické pole koná práci W . Podle rov. (7.15) je změna kinetické energie ΔE_k částice rovna

$$\Delta E_k = E_{k,f} - E_{k,i} = W_{\text{ext}} + W. \quad (25.11)$$

Předpokládejme, že částice byla před přemístěním v klidu a po něm bude rovněž v klidu. Pak $E_{k,f} = E_{k,i} = 0$ a rov. (25.11) se zjednoduší:

$$W_{\text{ext}} = -W. \quad (25.12)$$

Slovy: práce W_{ext} vykonaná vnější (neboli externí) silou během přemístění částice je rovna záporně vzaté práci W vykonané elektrickým polem.

Dosaďme-li rov. (25.12) do (25.1), dostaneme vztah mezi prací vnější síly a změnou elektrické potenciální energie částice během jejího pohybu:

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = W_{\text{ext}}. \quad (25.13)$$

Podobně dosažením rov. (25.12) do rov. (25.7) dostaneme vztah mezi prací vnější síly W_{ext} a potenciálovým rozdílem $\Delta\varphi$ mezi body v počáteční a výsledné poloze částice:

$$W_{\text{ext}} = Q\Delta\varphi. \quad (25.14)$$

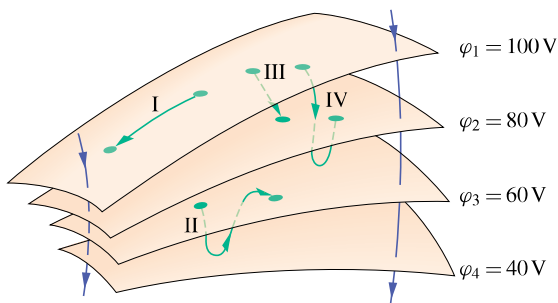
Práce W_{ext} může zřejmě být také kladná, záporná, nebo nulová. Je to práce, kterou musíme vykonat, abychom přemístili částici s nábojem Q mezi dvěma body, mezi nimiž je napětí $U = \Delta\varphi$, aniž se přitom změní kinetická energie částice.

KONTROLA 2: Na obrázku v kontrole 1 přemísťujeme proton z bodu (i) do bodu (f) v homogenním elektrickém poli naznačeného směru. (a) Koná vnější síla kladnou, nebo zápornou práci? (b) Pohybuje se přitom proton směrem k vyšším, nebo k nižším hodnotám potenciálu?

25.3 EKVIPOENCIÁLNÍ PLOCHY

Body, ve kterých má elektrický potenciál stejnou hodnotu, tvoří **ekvipotenciální plochu**. Ta může být reálná — fyzická (např. povrch nějakého tělesa) anebo jen myšlená (např. jeho rovina symetrie). Při přemístění částice mezi body (i) a (f), které leží na téže ekvipotenciální ploše, nevykoná elektrické pole žádnou úhrnnou práci. To vyplývá z rov. (25.7): jestliže platí $\varphi_i = \varphi_f$, pak $W = 0$. Protože práce elektrostatické síly je nezávislá na trajektorii, je vykonaná práce nulová, a to pro *libovolnou trajektorii* spojující

body (i) a (f), bez ohledu na to, zda celá trajektorie leží, či neleží na ekvipotenciální ploše.



Obr. 25.2 Části čtyř ekvipotenciálních ploch. Jsou zobrazeny čtyři trajektorie, po nichž se může pohybovat testovací nabitá částice. Dále jsou naznačeny dvě elektrické siločáry.

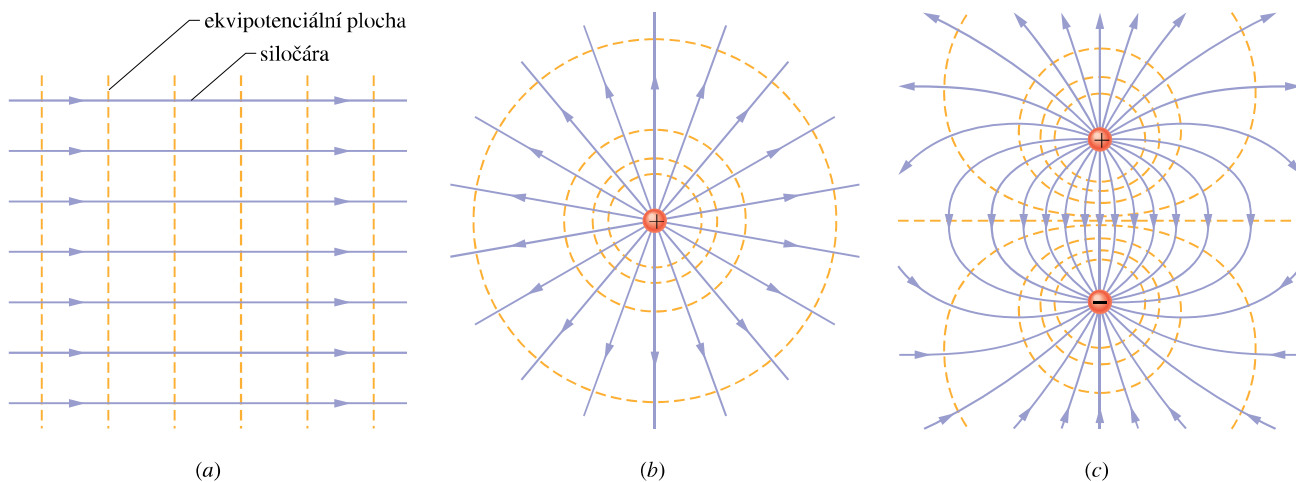
Obr. 25.2 ukazuje svazek ekvipotenciálních ploch v elektrostatickém poli. Práce vykonaná silou tohoto pole při přemístění nabitě částice z počátečního do koncového bodu v případě trajektorie I nebo trajektorie II je nulová, protože každá z nich začíná a končí na téže ekvipotenciální ploše. Práce vykonaná při přesunu nabitě částice z počátečního bodu do koncového bodu podél trajektorie III i trajektorie IV je nenulová a v obou případech stejně velká, protože potenciál má v počátečních bodech obou trajektorií stejnou hodnotu a rovněž v koncových bodech má stejnou hodnotu. (Trajektorie III a IV spojují stejnou dvojici ekvipotenciálních ploch.)

V elektrickém poli bodového náboje stejně jako v poli náboje rozloženého středově symetricky jsou ekvipotenciálními plochami soustředné kulové plochy. Ekvipotenciální plochy v homogenním poli tvoří svazek vzájemně

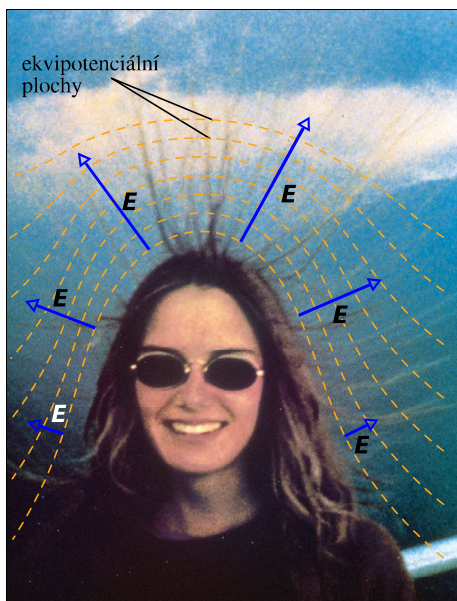
rovnoběžných rovin kolmých k siločárám (obr. 25.3). Ekvipotenciální plochy jsou vždy kolmé k siločárám, a tedy také k elektrické intenzitě \mathbf{E} (protože její směr je dán tečnou k elektrickým siločárám). Kdyby totiž vektor \mathbf{E} nebyl kolmý k příslušné ekvipotenciální ploše, měla by jeho složka ve směru tečném k této ploše nenulovou hodnotu. Tato složka by konala práci na nabitě částici při jejím pohybu po ekvipotenciální ploše. Avšak podle rov. (25.7) při posunutí nabitě částice po ekvipotenciální ploše nekonají elektrické síly práci. Z toho plyne jediný možný závěr, že vektor \mathbf{E} musí být v každém bodě ekvipotenciální plochy k ní kolmý. Obr. 25.3 ukazuje elektrické siločáry a příčné řezy ekvipotenciálních ploch (a) homogenního elektrického pole, (b) pole bodového náboje a (c) pole elektrického dipólu.

Nyní obrátíme svou pozornost k fotografii ženy, uvedené na začátku této kapitoly. Protože žena stála na plošině, která byla vodivě spojena s horským svahem, byla přibližně na stejném potenciálu jako tento svah. Elektricky vysoce nabitý mrak vytvořil elektrostatickou indukci silné elektrické pole kolem ženy a kolem horského svahu s intenzitou \mathbf{E} směřující kolmo k povrchu od ní a od svahu. Elektrostatické síly tohoto pole přinutily některé volné elektrony v těle ženy k pohybu směrem dolů, ponechávající prameny jejích vlasů kladně nabitě. Intenzita pole byla zřejmě vysoká, ale menší než asi $3 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, protože ta by vyvolala elektrický průraz molekulami vzduchu. (A k průrazu skutečně o něco později došlo: do plošiny udeřil blesk.)

Ekvipotenciální plochy obklopující ženu stojící na horské plošině lze odhadnout podle jejích vlasů, které jsou nataženy ve směrech vektoru \mathbf{E} , a jsou tedy kolmé k ekvipotenciálním plochám, jak je znázorněno na obr. 25.4.



Obr. 25.3 Elektrické siločáry (fialově) a příčné řezy ekvipotenciálních ploch (zlatě) (a) v homogenním elektrickém poli, (b) v elektrickém poli bodového náboje, (c) v poli elektrického dipólu.



Obr. 25.4 Schématem doplněná fotografie z úvodní strany této kapitoly ukazuje důsledek působení nabitého mraku, který vytvořil silné elektrické pole o intenzitě \mathbf{E} blízko hlavy ženy. Mnohé prameny jejích vlasů se natáhly podél směru elektrického pole, které je vždy kolmé k ekvipotenciálním plochám a silnější je tam, kde jsou tyto ekvipotenciální plochy těsněji u sebe, tj. v tomto případě nad temenem hlavy ženy.

Pole bylo zřejmě nejsilnější právě nad hlavou ženy, protože zde jsou její vlasy nataženy více než po stranách hlavy (proto jsou ekvipotenciální plochy nad hlavou ženy blíže u sebe).

Poučení je jednoduché. Jestliže vám vlivem vnějšího elektrického pole vstanou vlasy na hlavě, běžte raději do úkrytu a nepožujte pro fotografický snímek.

25.4 VÝPOČET POTENCIÁLU ZE ZADANÉ INTENZITY ELEKTRICKÉHO POLE

Potenciálový rozdíl neboli napětí mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) v elektrickém poli můžeme vypočítat, známe-li vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} v každém bodě libovolné spojnice těchto dvou bodů. K výpočtu je třeba určit práci vykonanou elektrickým polem při přemístění kladného testovacího náboje z bodu (i) do bodu (f) a pak použít rov. (25.7).

Uvažujme libovolné elektrické pole, např. pole zobrazené siločárami na obr. 25.5, a kladný testovací náboj Q_0 , který se pohybuje podél znázorněné trajektorie z bodu (i) do bodu (f). Pole působí na částici v každém bodě její

trajektorie silou $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$ a tato síla koná práci.* Z kap. 7 víme, že elementární práce, kterou vykoná síla \mathbf{F} při posunutí částice o $d\mathbf{r}$, je rovna

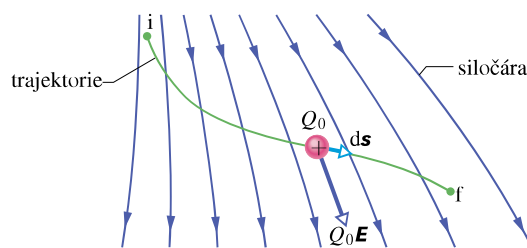
$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (25.15)$$

V našem případě je $\mathbf{F} = Q_0\mathbf{E}$ a posunutí $d\mathbf{r}$ označíme $d\mathbf{s}$ (obr. 25.5). Rov. (25.15) pak má tvar

$$dW = Q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.16)$$

Vyjádřit celkovou práci W vykonanou elektrostatickou silou, působící na nabitou částici, která se vlivem tohoto působení pohybuje z bodu (i) do bodu (f), vyžaduje sečíst všechny dílčí práce vykonané při infinitezimálních posunutích $d\mathbf{s}$ podél celé trajektorie \mathcal{C} částice:

$$W = Q_0 \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.17)$$



Obr. 25.5 Testovací částice s kladným nábojem Q_0 se pohybuje (posunutí $d\mathbf{s}$) v nehomogenním elektrickém poli \mathbf{E} z bodu (i) do bodu (f) podél trajektorie \mathcal{C} . Působí na ni elektrostatická síla $Q_0\mathbf{E}$ ve směru tečny k siločáře; síla koná práci $dW = Q_0\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$.

Protože elektrostatická síla je konzervativní, vedou všechny integrační cesty (jednoduché i jakkoli složité) spojující tutéž dvojici bodů ke stejnému výsledku. Proto není nutné u křivkového integrálu v rov. (25.17) pro výpočet práce vyznačovat trajektorii \mathcal{C} , stačí uvést jen počáteční a koncový bod. Jestliže práci W z rov. (25.17) dosadíme do rov. (25.7), dostaneme

$$\varphi_f - \varphi_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.18)$$

Rozdíl potenciálů ($\varphi_f - \varphi_i$) mezi dvěma libovolnými body (i) a (f) elektrického pole je tedy roven záporné hodnotě

* K tomu, aby se částice pohybovala po znázorněné trajektorii, musí na ni zřejmě působit kromě \mathbf{F} ještě i jiná síla \mathbf{F}' (např. vazební). Práci této síly neuvažujeme; víme ostatně z čl. 8.2, že vazební síla je vždy k trajektorii kolmá, a práci tedy nekoná.

křivkového integrálu od (i) do (f). Všimněme si, že tento výsledek je nezávislý na velikosti náboje Q_0 testovací částice, kterou jsme použili k určení rozdílu potenciálů (tj. napětí) v elektrickém poli. Je-li intenzita pole v určité části prostoru známa, pak rov. (25.18) umožňuje vypočítat napětí mezi dvěma libovolnými body pole v této části prostoru. Zvolíme-li potenciál φ_i v bodě (i) roven nule, pak rov. (25.18) dává

$$\varphi_f = \varphi = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.19)$$

V rov. (25.19) už nepíšeme index (f) u potenciálu φ_f . Rov. (25.19) určuje hodnotu elektrického potenciálu φ v libovolném bodě (f) vzhledem k nulové hodnotě potenciálu v bodě (i). Nulovou hodnotu potenciálu volíme zpravidla v nekonečnu nebo na některé v daném případě důležité vodivé ploše.

PŘÍKLAD 25.2

(a) Na obr. 25.6a vidíme dva body (i) a (f) v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} . Oba body leží na téže elektrické siločáře (která není znázorněna) ve vzdálenosti d . Určete potenciálový rozdíl ($\varphi_f - \varphi_i$) pomocí kladně nabitě testovací částice s nábojem Q_0 , pohybující se z bodu (i) do bodu (f) po trajektorii rovnoběžné se směrem pole.

ŘEŠENÍ: Protože se testovací částice pohybuje z bodu (i) do bodu (f) (obr. 25.6a), má vektor jejího infinitesimálního posunutí $d\mathbf{s}$ směr stejný jako intenzita \mathbf{E} . Úhel θ mezi směry těchto dvou vektorů je roven nule, takže rov. (25.18) dává

$$\begin{aligned} \varphi_f - \varphi_i &= - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_i^f E (\cos 0) ds = \\ &= - \int_i^f E ds. \end{aligned}$$

Protože pole je homogenní, je vektor intenzity \mathbf{E} konstantní (má konstantní velikost i směr) ve všech bodech integrační cesty a jeho velikost lze vytknout před integrál

$$\varphi_f - \varphi_i = -E \int_i^f ds = -Ed. \quad (\text{Odpověď})$$

V tomto vztahu je integrál roven délce d trajektorie částice. Záporné znaménko ve výsledku znamená, že elektrický potenciál v bodě (f) má menší hodnotu než v bodě (i). Tento výsledek potvrzuje, že elektrický potenciál klesá ve směru elektrických siločár.

(b) Nyní určíme rozdíl potenciálů ($\varphi_f - \varphi_i$) sledováním pohybu stejné testovací částice, která se však pohybuje z bodu (i) do bodu (f) přes bod (c) podle obr. 25.6b.

ŘEŠENÍ: Ve všech bodech spojnice bodů (i) a (c) jsou vektory \mathbf{E} a $d\mathbf{s}$ vzájemně kolmé. Proto platí $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ ve všech bodech této části integrační cesty. Podle rov. (25.18) mají body (i) a (c) stejnou hodnotu elektrického potenciálu. Jinými slovy, body (i) a (c) leží na stejné ekvipotenciální ploše.

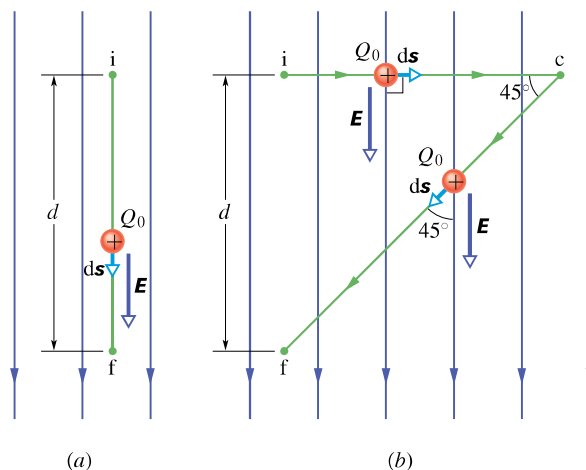
Ve všech bodech spojnice bodů (c) a (f) je $\theta = 45^\circ$, a proto podle rov. (25.18) je

$$\begin{aligned} \varphi_f - \varphi_c &= - \int_c^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_c^f E (\cos 45^\circ) ds = \\ &= - \frac{E}{\sqrt{2}} \int_c^f ds. \end{aligned}$$

Integrál v této rovnici je roven délce spojnice bodů (c) a (f), a má tedy hodnotu $d / \sin 45^\circ = \sqrt{2}d$. Proto

$$\varphi_f - \varphi_c = - \frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{2}d = -Ed. \quad (\text{Odpověď})$$

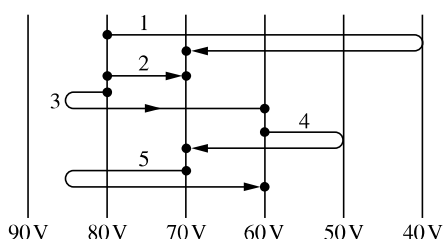
Poněvadž $\varphi_c = \varphi_i$, dostali jsme stejný výsledek jako v otázce (a) tohoto příkladu. Tím je opět ověřeno, že napětí mezi dvěma body nezávisí na volbě trajektorie, po které přejdeme od jednoho bodu ke druhému. Poučení: hledáme-li napětí mezi dvěma body elektrického pole pomocí testovací částice pohybující se mezi nimi, pak lze volit takovou trajektorii, pro kterou bude výpočet integrálu v rov. (25.18) co nejjednodušší.



Obr. 25.6 Příklad 25.2. (a) Testovací částice s nábojem Q_0 se pohybuje po přímé dráze z bodu (i) do bodu (f) ve směru intenzity homogenního elektrického pole. (b) Táž částice se pohybuje ve stejném elektrickém poli podél spojnice bodů (i), (c), (f).

KONTROLA 3: Obrázek znázorňuje několik vzájemně rovnoběžných ekvipotenciálních ploch (v příčném řezu) a pět trajektorií, po kterých budeme přemísťovat elektron z jedné plochy na druhou. (a) Jaký je směr vektoru intenzity elektrického pole, které je těmito

ekvipotenciálními plochami zobrazeno? (b) U každé znázorněné trajektorie určete, zda práce námi vykonaná po této trajektorii je kladná, záporná, nebo nulová. (c) Uvedené trajektorie seřadte sestupně podle práce na nich vykonané.



25.5 POTENCIÁL BODOVÉHO NÁBOJE

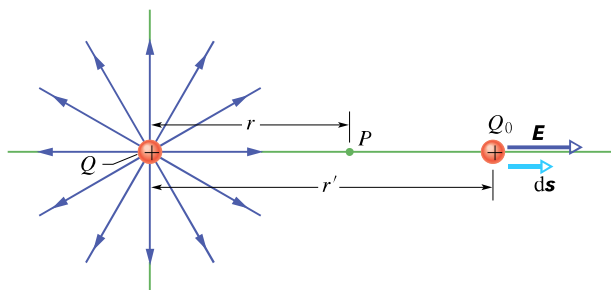
Rov. (25.18) nyní použijeme pro odvození vztahu pro potenciál φ pole bodového náboje. Uvažujme bod P ve vzdálenosti r od pevného kladného bodového náboje Q (obr. 25.7). Představme si, že se kladně nabitá testovací částice Q_0 pohybuje z bodu P do nekonečna. Protože nezáleží na trajektorii, po které se testovací částice pohybuje, zvolíme tu nejjednodušší: vybereme trajektorii směřující z bodu P do nekonečna podél paprsku vycházejícího z bodového náboje Q .

Pole bodového náboje je radiální a pro $Q > 0$ směřuje od něj. Z obr. 25.7 je vidět, že vektory \mathbf{E} a $d\mathbf{s}$ jsou souhlasné rovnoběžné, a také, že $d\mathbf{s} = d\mathbf{r}'$. Proto

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E(ds)(\cos 0^\circ) = E ds = E dr', \quad (25.20)$$

Dosadíme tuto rovnici do rov. (25.18), přičemž položíme $r_i = r$ a $r_f = \infty$, dostaneme:

$$\varphi_f - \varphi_i = \varphi(\infty) - \varphi(r) = - \int_r^\infty E dr'. \quad (25.21)$$



Obr. 25.7 Kladný bodový náboj Q vyvolává v bodě P elektrické pole o intenzitě \mathbf{E} a potenciálu φ . Potenciál v bodě P určujeme s pomocí testovací částice s nábojem Q_0 , kterou přemísťujeme z bodu P do nekonečna. Je znázorněno infinitezimální posunutí částice o $d\mathbf{s}$ ve vzdálenosti r' od bodového náboje.

Velikost intenzity elektrického pole v místě testovací částice je dána rov. (23.3) a má hodnotu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (25.22)$$

Dosazením tohoto výsledku do rov. (25.21) a integrováním dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi(\infty) - \varphi(r) &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{1}{r'^2} dr' = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r'} \right]_r^\infty = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-0 - \left(-\frac{1}{r} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \end{aligned} \quad (25.23)$$

Nulovou hladinu potenciálu zvolíme v nekonečnu, tedy $\varphi(\infty) = 0$. Potom potenciál φ kladného bodového náboje Q v bodě P je vyjádřen vztahem

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{pro kladný bodový náboj } +Q), \quad (25.24)$$

kde r je vzdálenost bodu P od náboje Q . To znamená, že potenciál φ v libovolném bodě elektrického pole kladného bodového náboje je kladný vzhledem k nulové hodnotě potenciálu v nekonečnu.

Dosud jsme uvažovali kladný náboj Q . Nyní jej nahradíme nábojem záporným $-Q$. V tomto případě vektor intenzity \mathbf{E} elektrického pole směřuje k náboji $-Q$, a proto jsou vektory \mathbf{E} a $d\mathbf{s}$ orientovány nesouhlasně. Potom $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -E dr'$ a znaménko před integrálem v rov. (25.21) je kladné. Pro potenciál tedy dostaneme

$$\varphi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{pro záporný bodový náboj } -Q). \quad (25.25)$$

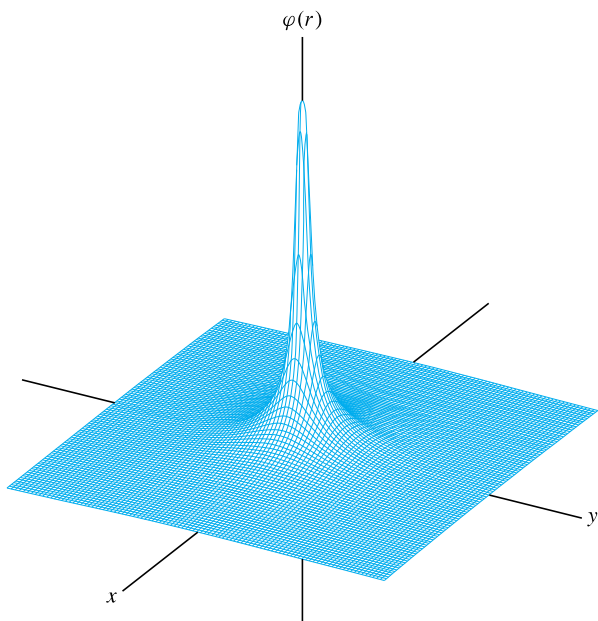
Potenciál φ v libovolném bodě elektrického pole buzeného záporným nábojem je záporný vzhledem k nulové hodnotě potenciálu v nekonečnu.

Pokud symbol Q chápeme tak, že reprezentuje nejen velikost elektrického náboje, ale i jeho znaménko, lze rov. (25.24) a (25.25) pro potenciál bodového náboje ve vzdálenosti r od něj zapsat jedinou rovnicí

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (\text{pro kladný i záporný bodový náboj } Q). \quad (25.26)$$

Znaménko potenciálu φ je tedy stejné jako znaménko elektrického náboje Q , který pole vytváří.

Obr. 25.8 ukazuje počítačem vytvořený prostorový graf závislosti φ na vzdálenosti r od kladného bodového náboje podle rov. (25.26). Povšimněme si, že velikost φ vzrůstá, jestliže $r \rightarrow 0$. Vskutku, podle rov. (25.26) potenciál φ elektrického pole bodového náboje má v bodě $r = 0$ nekonečně velkou hodnotu (i když na obr. 25.8 je graf v tomto bodě pochopitelně ukončen nějakou hodnotou konečnou).



Obr. 25.8 Počítačem vytvořený prostorový diagram průběhu elektrického potenciálu φ v bodech roviny $z = 0$ v závislosti na vzdálenosti r od kladného bodového náboje v počátku roviny xy . Hodnoty potenciálu v bodech této roviny jsou vyneseny svisle. Nekonečná hodnota potenciálu φ , vyplývající z rov. (25.26) pro $r = 0$, není samozřejmě zobrazena.

Rov. (25.26) vyjadřuje také elektrický potenciál kulové vrstvy (slupky) s kulově symetricky rozloženým nábojem, a to na jejím vnějším povrchu i vně této vrstvy. Lze to dokázat s použitím jednoho ze „slupkových teorémů“ uvedených v čl. 22.4 a 24.9 myšleným stažením celkového náboje do středu koule. Rov. (25.26) ovšem nevyjadřuje potenciál ani ve vrstvě, ani v její dutině.

RADY A NÁMĚTY

Bod 25.3: Určení napětí (neboli potenciálového rozdílu)

Napětí $\Delta\varphi$ mezi libovolnými dvěma body v elektrickém poli bodového náboje lze určit pomocí rov. (25.26). Nejprve vypočítáme hodnoty potenciálu v obou bodech a poté je od sebe odečteme. Je zřejmé, že hodnota rozdílu $\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i$ bude stejná při kterékoli volbě referenční potenciální energie.

PŘÍKLAD 25.3

(a) Jaký je potenciál φ elektrického pole jádra vodíkového atomu ve vzdálenosti $r = 2,12 \cdot 10^{-10}$ m od jeho středu? (Jádro vodíku tvoří jediný proton.)

ŘEŠENÍ: Dosazením do rov. (25.26) dostaneme

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} = \\ &= \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})}{(2,12 \cdot 10^{-10} \text{ m})} = \\ &= 6,78 \text{ V.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

(b) Jakou potenciální energii E_p (v elektronvoltech) má elektron v této vzdálenosti? (Tato potenciální energie je energií systému elektron + proton, tj. vodíkového atomu.)

ŘEŠENÍ: Dosazením potenciálu $\varphi = 6,78$ V a náboje elektronu do rov. (25.5) dostaneme

$$\begin{aligned}E_p &= Q\varphi = -e\varphi = (-1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(6,78 \text{ V}) = \\ &= -1,09 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -6,78 \text{ eV.} \quad (\text{Odpověď})\end{aligned}$$

(c) Kdyby se elektron přiblížil k jádru, zvětšila by se, nebo zmenšila jeho potenciální energie?

ŘEŠENÍ: Potenciál φ elektrického pole protonu je vyšší blíže protonu. Podle výsledku části (b) tohoto příkladu tedy energie E_p klesne do větších záporných hodnot. Jinými slovy, přiblížením k jádru potenciální energie E_p elektronu klesne (tím klesne i energie celého systému čili celého atomu).

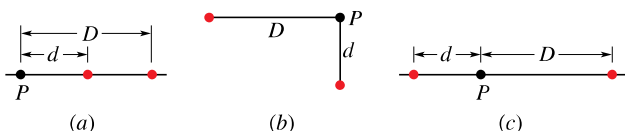
25.6 POTENCIÁL SOUSTAVY BODOVÝCH NÁBOJŮ

Potenciál v libovolném bodě elektrického pole soustavy bodových elektrických nábojů určíme pomocí principu superpozice. Nejprve vypočítáme podle rov. (25.26) potenciály elektrických polí jednotlivých nábojů, samozřejmě s přihlédnutím ke znaménkům nábojů. Potom tyto potenciály sečteme. Soustava n bodových nábojů má potenciál

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i} \quad (n \text{ bodových nábojů}). \quad (25.27)$$

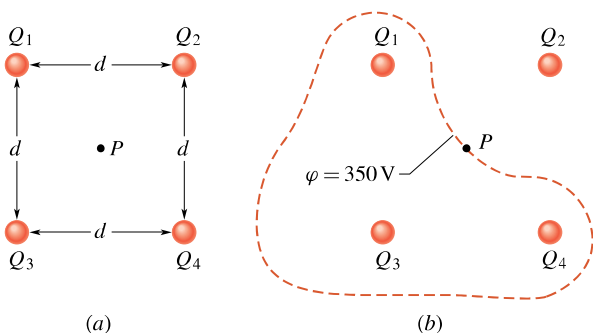
Symbol Q_i zde znamená hodnotu i -tého bodového náboje a r_i jeho vzdálenost od bodu, v němž potenciál určujeme. Součet v rov. (25.27) je *součet algebraický*, nikoli vektorový jako v případě výpočtu intenzity pole soustavy nábojů. V tom spočívá výhoda potenciálu před intenzitou: je mnohem snazší sčítat skaláry než vektory.

KONTROLA 4: Obrázek znázorňuje tři různá uspořádání dvou protonů. Seřadte tato uspořádání sestupně podle velikosti potenciálu v bodě P jejich elektrického pole.



PŘÍKLAD 25.4

Jaký je potenciál v bodě P uprostřed čtverce, v jehož rozích se nacházejí bodové elektrické náboje (obr. 25.9a)? Délka strany čtverce je $d = 1,3$ m a náboje mají velikosti $Q_1 = +12$ nC, $Q_2 = -24$ nC, $Q_3 = +31$ nC, $Q_4 = +17$ nC.



Obr. 25.9 Příklad 25.4. (a) Čtyři bodové náboje leží v rozích čtverce. (b) Uzavřená křivka je průsečnicí roviny čtverce a ekvipotenciální plochy, která prochází bodem P .

ŘEŠENÍ: Bod P leží ve stejné vzdálenosti r od každého bodového náboje, takže podle rov. (25.27) dostaneme:

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{r}.$$

Protože $r = d/\sqrt{2} \doteq 0,919$ m a součet nábojů je

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = (12 - 24 + 31 + 17) \cdot 10^{-9} \text{ C} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ C},$$

dostaneme

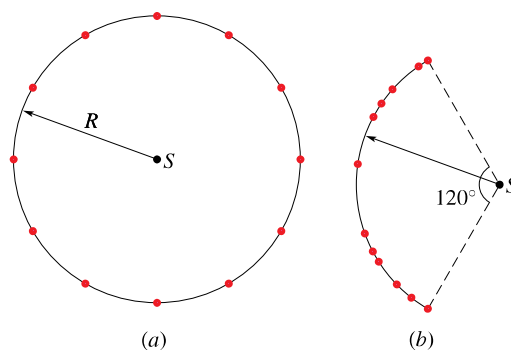
$$\varphi = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2})(36 \cdot 10^{-9} \text{ C})}{(0,919 \text{ m})} \doteq 350 \text{ V}. \quad (\text{Odpověď})$$

Poznámka: Uvážíme-li pouze tři kladné bodové náboje v obr. 25.9a, bude mít potenciál jejich společného elektrického pole kladné hodnoty. Uvážíme-li pouze jediný záporný

náboj, bude mít potenciál jeho elektrického pole záporné hodnoty. Proto v rovině uvedeného čtverce musí existovat body, v nichž má potenciál stejnou hodnotu jako v bodě P . Křivka na obr. 25.9b ukazuje průsečnici roviny čtverce a ekvipotenciální plochy procházející bodem P . Libovolný bod této průsečnice má stejnou hodnotu potenciálu jako bod P .

PŘÍKLAD 25.5

(a) Dvanáct elektronů na obr. 25.10a (s náboji $-e$) je rovnoměrně rozloženo na kružnici o poloměru R . Jaká je hodnota elektrického potenciálu a intenzity elektrického pole ve středu S kružnice, je-li referenční hodnota potenciálu $\varphi = 0$ zvolena v nekonečnu?



Obr. 25.10 Příklad 25.5. (a) Dvanáct elektronů rovnoměrně rozmístěných na kružnici. (b) Tytéž elektrony jsou nyní nepravidelně rozmístěny na oblouku původní kružnice.

ŘEŠENÍ: Jelikož všechny elektrony mají stejný (záporný) náboj a jsou ve stejné vzdálenosti R od bodu S , bude podle rov. (25.27) platit

$$\varphi = -12 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{R}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (25.28)$$

Protože potenciál je veličina skalární, není orientace polohových vektorů nábojů vzhledem k bodu S pro výpočet potenciálu φ podstatná. Intenzita elektrického pole je však veličina vektorová, proto orientace polohových vektorů elektrických nábojů pro výpočet \mathbf{E} podstatná je. Protože elektrony jsou na kružnici rozloženy symetricky, je v bodě S vektor intenzity elektrického pole libovolného elektronu vykompenzován vektorem intenzity elektrického pole toho elektronu, který je umístěn symetricky vzhledem ke středu kružnice. Proto v bodě S je

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (\text{Odpověď})$$

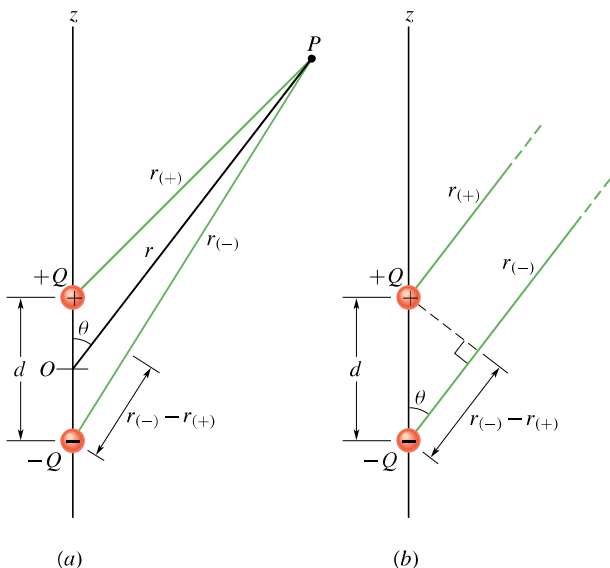
(b) Jak se změní (změní-li se vůbec) potenciál a intenzita v bodě S , jestliže elektrony rozmístíme nerovnoměrně na oblouku kružnice se středovým úhlem 120° podle obr. 25.10b?

ŘEŠENÍ: Potenciál je i zde dán rov. (25.28), protože vzdálenosti mezi bodem S a každým elektronem se nezmění, a orientace polohových vektorů elektronů je pro potenciál bezvýznamná. Avšak intenzita je nyní nenulová, protože uspořádání elektronů již není symetrické. Výsledná intenzita směřuje k oblouku s náboji.

25.7 POTENCIÁL ELEKTRICKÉHO POLE DIPÓLU

Použijme rov. (25.27), abychom našli potenciál dipólu v bodě P podle obr. 25.11a. Podle rov. (25.26) kladný náboj buď ve vzdálenosti $r_{(+)}$ potenciál $\varphi_{(+)}$, záporný náboj ve vzdálenosti $r_{(-)}$ buď potenciál $\varphi_{(-)}$. Výsledný potenciál je podle rov. (25.27) součtem:

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_{i=1}^2 \varphi_i = \varphi_{(+)} + \varphi_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_{(+)}} + \frac{-Q}{r_{(-)}} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}.\end{aligned}\quad (25.29)$$



Obr. 25.11 (a) Bod P je ve vzdálenosti r od středu O elektrického dipólu. Úsečka OP svírá s osou dipólu úhel θ . (b) Je-li bod P velmi daleko od dipólu, jsou úsečky $r_{(+)}$ a $r_{(-)}$ přibližně rovnoběžné s úsečkou OP a čárkovaná černá úsečka je přibližně kolmá k úsečce $r_{(-)}$.

Často se zajímáme o pole dipólu ve vzdálenosti r mnohem větší než délka d dipólu, tj. $r \gg d$. (Pak mluvíme o elementárním dipólu; to je např. polární molekula, pro

kerou platí prakticky vždy $r \gg d$.) Pak podle obr. 25.11b platí: $r_{(-)} - r_{(+)} \doteq d \cos \theta$ a $r_{(-)}r_{(+)} \doteq r^2$. Po dosazení do rov. (25.29) dostaneme pro potenciál φ pole dipólu

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2},$$

kde θ je úhel měřený od osy dipólu (obr. 25.11a). Je tedy

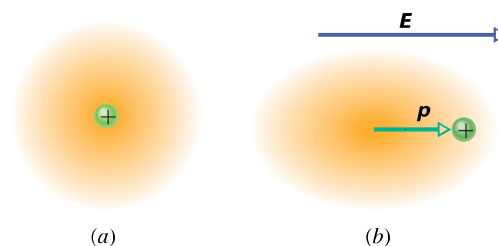
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} \quad (\text{elektrický dipól}), \quad (25.30)$$

kde p je velikost dipólového momentu $\mathbf{p} = Q\mathbf{d}$ definovaného v čl. 23.5. Připomeňme, že vektor \mathbf{p} leží na ose dipólu a je orientován od záporného ke kladnému pólu a úhel θ měříme od směru \mathbf{p} .

KONTROLA 5: Předpokládejme, že tři body jsou rozmístěny ve stejných (velkých) vzdálenostech r od středu dipólu (obr. 25.11): bod A leží na ose dipólu nad jeho kladným nábojem, bod B leží na ose dipólu pod záporným nábojem a bod C leží na kolmici k ose dipólu procházející středem O dipólu. Seřadte tyto body sestupně podle velikosti jejich elektrického potenciálu.

Indukovaný dipólový moment

Mnohé molekuly, např. molekuly vody, jsou *polární*, tj. mají *permanентní* (trvalé) elektrické dipólové momenty. U molekul *nepolárních* a také v každém atomu splývá střed všech kladných nábojů se středem nábojů záporných (obr. 25.12a). Proto elektrický dipólový moment takových molekul a atomů je nulový.



Obr. 25.12 (a) Atom s kladně nabitým jádrem (zeleně) a záporně nabitými elektrony (zlatě stínované). Střed kladného náboje jádra splývá se středem záporně nabitého elektronového obalu atomu. (b) Je-li atom umístěn do vnějšího elektrického pole, jsou elektronové orbity deformovány a tím se středy kladného a záporného náboje oddálí. Atom tak získá elektrický dipólový moment. Deformace elektronových drah je značně přehněná.

Umístíme-li však atom nebo nepolární molekulu do vnějšího elektrického pole, deformují se vlivem elektrických sil elektronové orbity, a tím se střed všech záporných

nábojů nepatrně posune vůči středu všech kladných nábojů (obr. 25.12b). Protože elektrony jsou záporně nabité, posunou se proti směru vektoru intenzity vnějšího elektrického pole. Tím vznikne dipól, jehož dipólový moment \mathbf{p} má směr souhlasný s vnějším elektrickým polem. Říkáme, že takový dipólový moment je *indukovaný* elektrickým polem a atom nebo molekula je tímto polem *polarizována* (získá kladný a záporný pól). Je-li vnější elektrické pole odstraněno, indukovaný dipólový moment a polarizace zanikají.

25.8 POTENCIÁL SPOJITĚ ROZLOŽENÉHO NÁBOJE

Je-li náboj Q rozložen spojitě (např. na vodivé tyči, disku apod.), je nutno pro výpočet elektrického potenciálu φ v rov. (25.27) sčítání nahradit integrací. Zvolíme infinitesimální elementy dQ náboje, vyjádříme v bodě P jejich potenciály $d\varphi$, a poté integrujeme přes celý spojitě rozložený náboj.

Infinitesimální náboj dQ považujeme vždy za bodový. Zvolíme-li nulovou hodnotu potenciálu v nekonečnu, je podle rov. (25.26) potenciál jeho pole v bodě P dán vztahem

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r}, \quad (25.31)$$

kde r je vzdálenost bodu P od náboje dQ . Abychom určili celkový potenciál φ v bodě P , musíme integrovat přes všechny spojitě rozložený náboj:

$$\varphi = \int d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r}. \quad (25.32)$$

Dále vyšetříme dva případy spojitě rozloženého náboje: na úsečce a na disku.

Náboj spojitě rozložený na úsečce

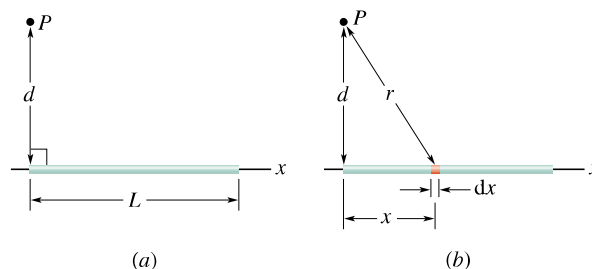
Na obr. 25.13a je tenká nevodivá tyč délky L , rovnoměrně nabitá kladným elektrickým nábojem o délkové hustotě náboje $\tau = \text{konst.}$ Určíme potenciál φ elektrického pole buzeného v bodě P nábojem na tyči. Bod P se nachází v kolmé vzdálenosti d od levého konce tyče.

Infinitesimální délkový element dx tyče (obr. 25.13b) nese infinitesimální náboj

$$dQ = \tau dx. \quad (25.33)$$

Tento náboj budí v bodě P (který leží ve vzdálenosti $r = \sqrt{x^2 + d^2}$ od dQ) elektrické pole o potenciálu $d\varphi$. Určíme jej podle rov. (25.31):

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dx}{\sqrt{x^2 + d^2}}, \quad (25.34)$$



Obr. 25.13 (a) Tenká, rovnoměrně nabitá tyč budí v bodě P elektrické pole o potenciálu φ . (b) Element náboje dQ vyvolává v bodě P pole o potenciálu $d\varphi$.

Jelikož náboj tyče je kladný a nulová hodnota potenciálu byla zvolena v nekonečnu, je podle čl. 25.5 potenciál φ v rov. (25.34) také kladný.

Potenciál φ elektrického pole buzeného nábojem celé tyče dostaneme integrací rov. (25.34) přes celou délku tyče, od $x = 0$ do $x = L$. Dostaneme tak (dodatek E)

$$\begin{aligned} \varphi &= \int d\varphi = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{\sqrt{x^2 + d^2}} dx = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(x + \sqrt{x^2 + d^2}) \right]_0^L = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(L + \sqrt{L^2 + d^2}) - \ln d \right]. \end{aligned}$$

Protože platí $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$, je

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{d} \right). \quad (25.35)$$

Protože argument funkce logaritmus je větší než 1, je logaritmus kladný, a potenciál φ je také kladný, jak bylo možné očekávat.

Rovnoměrně nabitý disk

V čl. 23.7 jsme počítali velikost intenzity elektrického pole v bodech na ose nevodivého disku o poloměru R , který je rovnoměrně nabit nábojem s plošnou hustotou σ . Nyní odvodíme výraz pro potenciál $\varphi(z)$ elektrického pole v libovolném bodě na ose tohoto disku.

Nejprve uvažujme plošný element tvaru nekonečně tenkého mezikruží poloměru R' a radiální šířky dR' (obr. 25.14). Náboj na něm má velikost

$$dQ = \sigma (2\pi R') (dR'),$$

kde $(2\pi R') (dR')$ je obsah mezikruží. Všechny body tohoto mezikruží jsou ve stejné vzdálenosti r od bodu P na ose

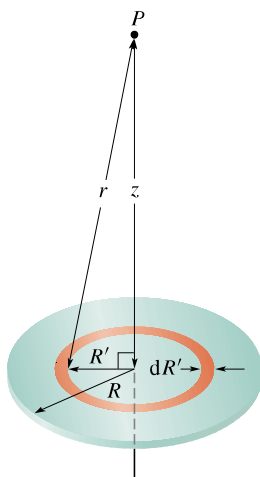
disku, a proto příspěvek náboje na tomto mezikruží k celkové hodnotě elektrického potenciálu v bodě P můžeme vyjádřit vztahem

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(2\pi R')(dR')}{\sqrt{z^2 + R'^2}}. \quad (25.36)$$

Potenciál elektrického pole buzeného v bodě P všemi náboji na disku vypočítáme integrací příspěvků od všech proužků mezikruží s poloměry od $R' = 0$ do $R' = R$:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int d\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{R' dR'}{\sqrt{z^2 + R'^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z). \end{aligned} \quad (25.37)$$

Povšimněme si, že proměnnou ve druhém integrálu rovnice (25.37) je R' , a nikoli vzdálenost z , která zůstává konstantní v průběhu integrace přes plochu disku. (Poznamenejme, že při výpočtu integrálu jsme předpokládali, že $z \geq 0$.)



Obr. 25.14 Nevodivý disk poloměru R je na horní ploše rovnoměrně nabit elektrickým nábojem s plošnou hustotou náboje σ . Hledáme potenciál φ elektrického pole v bodě P na ose disku.

PŘÍKLAD 25.6

Potenciál ve středu rovnoměrně nabitého kruhového disku o poloměru $R = 3,5$ cm je $\varphi_0 = 550$ V.

(a) Jak velký je celkový náboj Q na disku?

ŘEŠENÍ: Ve středu disku je $z = 0$, a proto se rov. (25.37) redukuje na

$$\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0},$$

z čehož plyne

$$\sigma = \frac{2\epsilon_0\varphi_0}{R}. \quad (25.38)$$

Protože σ je plošná hustota náboje, je celkový náboj na disku $\sigma\pi R^2$. Použijeme-li rov. (25.38), dostaneme

$$\begin{aligned} Q &= \sigma\pi R^2 = 2\pi\epsilon_0 R\varphi_0 = \\ &= 2\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})(0,035 \text{ m})(550 \text{ V}) = \\ &= 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 1,1 \text{ nC}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Při úpravě jednotek ve výsledku jsme použili rov. (25.9), tj. $1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{C}^{-1}$.

(b) Jaký potenciál je na ose disku ve vzdálenosti $z = 5,0R$ od disku?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (25.37) je

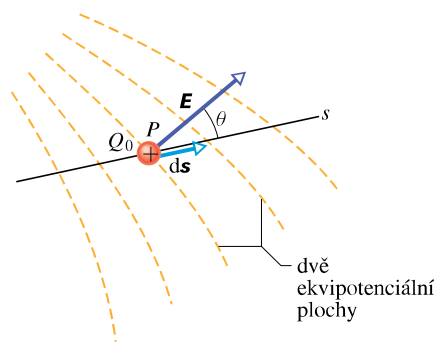
$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{(5,0R)^2 + R^2} - 5,0R).$$

Dosazením za σ z rov. (25.38) dostaneme

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\varphi_0}{R} (\sqrt{26R^2} - 5,0R) = \varphi_0 (\sqrt{26} - 5,0) = \\ &= (550 \text{ V})(0,099) = 54 \text{ V}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

25.9 VÝPOČET INTENZITY ZE ZADANÉHO POTENCIÁLU

V čl. 25.4 jsme se seznámili s tím, jak určit elektrický potenciál, jestliže známe intenzitu elektrického pole v každém bodě trajektorie spojující tento bod s referenčním bodem. V tomto článku budeme postupovat obráceně, tj. budeme hledat intenzitu elektrického pole pomocí známého potenciálu. Jak naznačuje obr. 25.3, grafické řešení tohoto problému je snadné: je-li znám potenciál φ všude v okolí nábojů, lze sestavit ekvipotenciální plochy. Elektrické siločáry, které vždy protínají ekvipotenciální plochy kolmo, pak naznačují průběh vektoru intenzity \mathbf{E} . Nyní najdeme k této grafické metodě její matematický ekvivalent.



Obr. 25.15 Testovací náboj Q_0 se posune o ds od jedné ekvipotenciální plochy ke druhé. Vektor posunutí ds svírá úhel θ se směrem vektoru intenzity elektrického pole \mathbf{E} .

Na obr. 25.15 je zachycen příčný řez soustavou ekvipotenciálních ploch. Potenciálový rozdíl mezi každou dvojicí sousedních ploch je $d\varphi$. Na obr. 25.15 je znázorněno, že vektor intenzity \mathbf{E} v libovolném bodě P je kolmý k ekvipotenciální ploše, která bodem P prochází.

Předpokládejme, že kladný testovací náboj Q_0 se posune o $d\mathbf{s}$ od jedné ekvipotenciální plochy k ploše sousední. Podle rov. (25.7) práce vykonaná elektrickým polem při posunutí testovacího náboje je $-Q_0 d\varphi$. Podle rov. (25.16) a obr. 25.15 práce vykonaná elektrickým polem může být vyjádřena také skalárním součinem $Q_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. Proto

$$-d\varphi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.39)$$

Vyjádříme-li skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ výrazem $E \cos \theta ds$, dostaneme z rov. (25.39)

$$-d\varphi = E \cos \theta ds.$$

Protože $E \cos \theta$ je složka vektoru \mathbf{E} ve směru posunutí $d\mathbf{s}$, lze tuto rovnici vyjádřit ve tvaru

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds}. \quad (25.40)$$

Rov. (25.40), která je v podstatě obráceným vztahem k rovnici (25.18), vyjadřuje:

Složka intenzity pole \mathbf{E} v libovolném směru je rovna poklesu potenciálu v tomto směru (tj. záporně vzatému přírůstku) připadajícímu na jednotkovou vzdálenost.

Za směr \mathbf{s} zvolíme postupně osy x , y a z . Dostaneme tak příslušné tři složky intenzity elektrického pole:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (25.41)$$

vektor \mathbf{E} elektrické intenzity pak můžeme vyjádřit vektorovým vztahem

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = \\ &= -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = -\mathbf{grad} \varphi. \end{aligned}$$

Známe-li tedy funkci $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ve všech bodech pole, pak lze určit složky E_x , E_y , E_z (a tím také vektor intenzity \mathbf{E}) v libovolném bodě pomocí uvedených parciálních derivací.

Máme tedy dva způsoby jak určit \mathbf{E} pro dané rozložení nábojů. V prvním z nich určíme přímo vektor \mathbf{E} tak, jak

bylo ukázáno v kap. 23. Ve druhém z nich nejprve určíme (skalární) potenciál $\varphi(x, y, z)$ a intenzitu elektrického pole určíme z rov. (25.41). Druhý způsob bývá zpravidla snazší.

V homogenním elektrickém poli (kde \mathbf{E} je vektor konstantní co do velikosti i co do směru), můžeme použít i konečná posunutí $\Delta \mathbf{s}$ a rov. (25.40) má tvar:

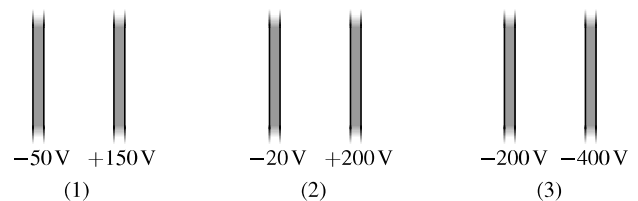
$$E_s = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta s}.$$

Volíme-li $\Delta \mathbf{s}$ kolmo k ekvipotenciální ploše ve směru poklesu potenciálu φ , je $\Delta \varphi < 0$ a dostáváme

$$E = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \quad (25.42)$$

pro velikost vektoru \mathbf{E} . Složka intenzity ve směru *rovnoběžném* s ekvipotenciální plochou je vždy nulová.

KONTROLA 6: Na obrázku jsou tři dvojice rovnoběžných desek stejně vzdálených. Každá deska má určitý elektrický potenciál. Elektrické pole mezi deskami je homogenní a vektor intenzity \mathbf{E} je kolmý k deskám. (a) Seřadte dvojice těchto desek sestupně podle velikosti intenzity elektrického pole mezi deskami. (b) Ve které dvojici desek směřuje vektor intenzity elektrického pole vpravo? (c) Co se stane, umístíme-li elektron doprostřed mezi třetí dvojice desek: zůstane na místě? Bude se pohybovat konstantní rychlostí vpravo, nebo vlevo? Bude se pohybovat zrychleně vpravo, nebo vlevo?



PŘÍKLAD 25.7

Elektrický potenciál v libovolném bodě na ose nabitého disku je určen rov. (25.37)

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{z^2 + R^2} - z).$$

Vyjďte z tohoto výrazu a odvoďte vztah pro intenzitu elektrického pole v libovolném bodě na ose disku.

ŘEŠENÍ: Vektor intenzity elektrického pole musí ležet v ose disku, protože rozložení náboje na disku je prostorově symetrické. Zvolíme-li směr \mathbf{s} tak, aby splýval s osou z , pak podle

rov. (25.40) dostaneme

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{dz}(\sqrt{z^2 + R^2} - z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right). \quad (\text{Odpověď})$$

Toto je stejný výraz jako výraz odvozený v čl. 23.7 integrací s použitím Coulombova zákona.

25.10 ELEKTRICKÁ POTENCIÁLNÍ ENERGIE SOUSTAVY BODOVÝCH NÁBOJŮ

V čl. 25.1 jsme se zabývali potenciální energií testovacího náboje jako funkcí jeho polohy ve *vnějším* elektrickém poli. Předpokládali jsme, že náboje, které elektrické pole vyvolávají, mají pevné polohy, neovlivněné přítomností testovacího náboje. V tomto článku vyšetříme jinou situaci; najdeme vztah pro konfigurační potenciální energii *soustavy* nábojů v poli vytvořeném *těmito* náboji.

Uvedme jednoduchý příklad. Jestliže k sobě přiblížíme dvě nabitá tělesa s náboji stejného znaménka, pak práce, kterou přitom musíme vykonat (tj. vynaložit na překonání odpuzivých elektrických sil), se přemění v potenciální energii soustavy dvou nabitých těles (za předpokladu, že se jejich kinetická energie nemění). Jestliže poté tělesa uvolníme, začnou se pohybovat a nahromaděnou elektrickou potenciální energii můžeme získat zpět jako kinetickou energii nabitých těles (vzdalujících se od sebe).

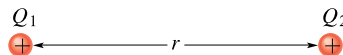
Elektrickou potenciální energii *soustavy elektrických nábojů* zaujímajících určité polohy, tedy energii určité konfigurace nábojů, definujeme takto:

Potenciální energie soustavy nábojů je rovna práci W_{ext} , kterou musela vykonat vnější síla proti silám pole při sestavování této konfigurace nábojů, tj. při přemístění každého náboje „z nekonečna“ do jeho polohy v dané konfiguraci.

Přitom předpokládáme, že náboje jsou ve výchozí i v koncové poloze v klidu. Formulací „náboje v nekonečnu“ myslíme, stejně jako v čl. 25.1, náboje umístěné tak daleko od sebe, abychom jejich vzájemné působení mohli v dané úloze zanedbat.

Obr. 25.16 znázorňuje dva bodové náboje Q_1 a Q_2 , ve vzdálenosti r . Představme si, že ve snaze najít elektrickou potenciální energii tohoto systému dvou nábojů uskutečníme následující proces. Předpokládejme, že oba náboje

jsou nejprve nekonečně vzdálené a v klidu. Přeneseme-li náboj Q_1 z nekonečna do jeho koncové polohy, nekonáme práci, protože nemusíme překonávat žádnou elektrostatickou sílu. Vezmeme-li však další náboj Q_2 a přeneseme-li ho do daného místa, práci již konáme, protože přítomnost náboje Q_1 se projevuje elektrostatickou silou působící na náboj Q_2 během jeho přemísťování.



Obr. 25.16 Dva náboje držené v neměnné vzdálenosti r . Jaká je elektrická potenciální energie této konfigurace?

Práci při tomto procesu námi vykonanou (tj. vnější silou) určíme podle rov. (25.8) a (25.12). Označíme-li přenášený náboj jako Q_2 , bude tato práce rovna $Q_2\varphi$, kde φ je potenciál elektrického pole vyvolaného nábojem Q_1 v bodě, do kterého byl náboj Q_2 přemístěn. Podle rov. (25.26) má tento potenciál hodnotu

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r}.$$

Dvojice bodových elektrických nábojů má tedy elektrickou potenciální energii

$$E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (25.43)$$

Mají-li oba náboje stejná znaménka, pak při jejich vzájemném přiblížování se překonává odpuzivá síla mezi nimi působící a práce námi vykonaná je kladná. Potenciální energie systému je pak kladná, což je zřejmé i z rov. (25.43), a vzájemným přiblížováním obou nábojů se zvyšuje. Mají-li náboje opačná znaménka, musíme vykonat stejně velkou, ale zápornou práci proti vzájemné přitažlivé síle působící mezi náboji. Potenciální energie takového systému dvou nábojů se jejich vzájemným přiblížováním snižuje. V př. 25.8 je naznačeno, jak tento postup výpočtu rozšířit na soustavu libovolného počtu nábojů.

PŘÍKLAD 25.8

Obr. 25.17 ukazuje tři náboje držené v pevných polohách silami, které na obrázku nejsou znázorněné. Jaká je elektrická potenciální energie této soustavy nábojů? Je dána vzdálenost $d = 12$ cm a náboje $Q_1 = +Q$, $Q_2 = -4Q$, $Q_3 = +2Q$, kde $Q = 150$ nC.

ŘEŠENÍ: Představme si, že soustavu tří nábojů na obr. 25.17 teprve sestavujeme. Dejme tomu, že na začátku je již na svém místě jeden z nábojů, řekněme Q_1 , a ostatní dva jsou ještě v nekonečnu. Nyní přeneseme další náboj, třeba Q_2 , z nekonečna na jeho místo v soustavě. Dosadíme-li d místo r

do rov. (25.43), dostaneme potenciální energii $E_{p,12}$ dvojice nábojů Q_1 a Q_2

$$E_{p,12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d}.$$

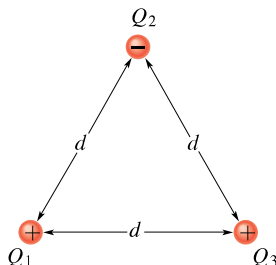
Nakonec přemístíme třetí (poslední) náboj Q_3 z nekonečna na jeho místo v soustavě. Práce, kterou musíme vykonat v tomto posledním kroku, je rovna součtu dvou prací: práce $W_{\text{ext},13}$, kterou musíme vykonat, abychom náboj Q_3 přiblížili z nekonečna k náboji Q_1 , a práce $W_{\text{ext},23}$, kterou musíme vykonat, abychom náboj Q_3 současně přiblížili k náboji Q_2 . Práce, kterou vykonáme při přemístění náboje Q_3 , je tedy

$$\begin{aligned} W_{\text{ext},13} + W_{\text{ext},23} &= E_{p,13} + E_{p,23} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_3}{d} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2 Q_3}{d}. \end{aligned}$$

Celková elektrická potenciální energie soustavy tří nábojů je rovna součtu potenciálních energií tří dvojic nábojů, které lze z nábojů vytvořit. Tento součet (který je nezávislý na pořadí nábojů ve dvojicích) je roven

$$\begin{aligned} E_p &= E_{p,12} + E_{p,13} + E_{p,23} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q(-4Q)}{d} + \frac{Q(2Q)}{d} + \frac{(-4Q)(2Q)}{d} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{10Q^2}{d} = \\ &= -\frac{(8,99 \cdot 10^9 \cdot \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}) \cdot 10 \cdot (150 \cdot 10^{-9} \cdot \text{C})^2}{(0,12 \text{ m})} = \\ &= -1,7 \cdot 10^{-2} \text{ J}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

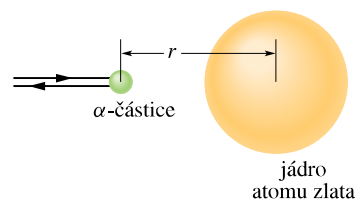
Energie je záporná, tzn., že je záporná i celková práce vynaložená na přemístění těchto tří nábojů z nekonečna do poloh podle obr. 25.17. A obráceně, abychom úplně rozrušili tuto strukturu a vzdálili náboje od sebe do nekonečna, musíme vykonat práci 17 mJ, ta je rovna vazební energii soustavy.



Obr. 25.17 Příklad 25.8. Tři náboje jsou umístěny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Jaká je jejich potenciální energie?

PŘÍKLAD 25.9

Částice α (která se skládá ze dvou protonů a dvou neutronů) letí z velké dálky k atomu zlata, prolétá jeho elektronovým obalem a míří přímo na jeho jádro, které je tvořeno 79 protony a 118 neutrony. Zpomaluje se, až se zastaví ve vzdálenosti $r = 9,23$ fm od středu atomového jádra* a pak se vrací zpět po původní dráze (obr. 25.18). Jaká byla její počáteční kinetická energie E_k ? (Protože jádro atomu zlata je mnohem hmotnější než α -částice, můžeme předpokládat, že poloha jádra se při této interakci prakticky nezmění.) Uvažujte pouze elektrickou interakci, vliv silné jaderné interakce vzhledem k uvedené vzdálenosti zanedbejte.



Obr. 25.18 Příklad 25.9. Částice α , pohybující se přímo na střed jádra atomu zlata, se zastavila v okamžiku, kdy se její kinetická energie celá přeměnila v elektrickou potenciální energii.

ŘEŠENÍ: Během celého procesu se zachovává mechanická energie systému α -částice + atom zlata. Pokud je α -částice vně atomu, je elektrická potenciální energie systému nulová, protože atom má stejný počet elektronů jako protonů, a je tedy navenek elektricky neutrální, nevytváří vnější elektrické pole. Jakmile však α -částice pronikne elektronovým obalem atomu, působí již jen odpudivá elektrostatická síla, zpočátku slabá, ale rychle se zesilující se zmenšující se vzdáleností středů částice a jádra atomu. Je vyvolána odpuzováním protonů α -částice protony atomového jádra. (Neutrony, které jsou elektricky neutrální, k této odpudivé síle nepřispívají a jejich silnou interakci lze vzhledem k uvedené vzdálenosti zanedbat. Elektrony, nyní vně oblasti výskytu α -částice, působí jako homogenně nabitá kulová vrstva, jejíž pole uvnitř je nulové.)

Vlivem odpudivé síly se α -částice zpomaluje a její kinetická energie se přeměňuje v elektrickou potenciální energii celého systému. Tato přeměna je ukončena v okamžiku, kdy rychlost α -částice klesne na nulu. Ze zákona zachování mechanické energie plyne, že počáteční kinetická energie E_k částice α se musí rovnat elektrické potenciální energii E_p systému v okamžiku, kdy se α -částice zastaví:

$$E_k = E_p, \quad (25.44)$$

kde E_p je dáno rov. (25.43). Dosazením $Q_1 = 2e$, $Q_2 = 79e$ (kde e je elementární náboj, jehož velikost je $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)

* Můžeme také říci, že se v této vzdálenosti částice odrazila od jádra.

a $r = 9,23$ fm dostaneme

$$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(79e)}{(9,23 \text{ fm})} = \frac{(8,99 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2})(158)(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(9,23 \cdot 10^{-15} \text{ m})} = 3,94 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 24,6 \text{ MeV.} \quad (\text{Odpověď})$$

KONTROLA 7: Zaměňme v př. 25.9 částici α jedním protonem se stejnou kinetickou energií. Odrazí se tento proton od jádra ve stejné vzdálenosti jako α -částice (tj. 9,23 fm od jádra atomu zlata), dále od něho, nebo blíž k němu?

25.11 POTENCIÁL NABITÉHO VODIČE

V čl. 24.6 jsme došli k závěru, že ve všech vnitřních bodech izolovaného vodiče je $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Pomocí Gaussova zákona elektrostatiky jsme dokázali, že volný náboj je rozložen na jeho vnějším povrchu. (To platí i v případě, že vodič má uvnitř prázdnou dutinu.) Z toho, že $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ve všech vnitřních bodech vodiče, odvodíme další poznatek:

Volný náboj na izolovaném vodiči se samovolně rozprostře po vnějším povrchu vodiče tak, že všechny body vodiče — a je jedno zda na povrchu nebo uvnitř — mají stejný potenciál. To platí bez ohledu na to, zda vodič má či nemá dutinu.

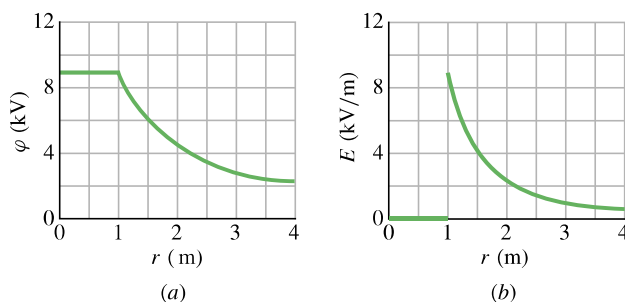
Důkaz vyplývá přímo z rov. (25.18), tj. ze vztahu

$$\varphi_f - \varphi_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$

Jelikož $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ ve všech bodech ve vodiči, vyplývá odtud, že $\varphi_f = \varphi_i$ pro všechny možné dvojice bodů (i) a (f) vodiče.

Obr. 25.19a ukazuje závislost potenciálu na vzdálenosti r od středu izolované kulové vodivé plochy o poloměru 1,0 m mající náboj $1,0 \mu\text{C}$. V bodech vně koule můžeme potenciál $\varphi(r)$ vypočítat z rov. (25.26), protože vzhledem k nim se celkový náboj projevuje jako bodový, umístěný ve středu koule. Tato rovnice platí i pro body na povrchu koule. Nyní vsuňme malý testovací náboj malým otvorem dovnitř koule. Přitom nekonáme práci, protože na testovací náboj uvnitř vodivé koule elektrická síla nepůsobí. Potenciál ve všech bodech uvnitř koule má tedy stejnou hodnotu jako v bodech na povrchu, jak ukazuje obr. 25.19a.

Obr. 25.19b ukazuje průběh závislosti velikosti elektrické intenzity E téže nabitě koule na vzdálenosti r od



Obr. 25.19 (a) Průběh potenciálu $\varphi(r)$ nabitě kulové plochy. (b) Průběh velikosti intenzity elektrického pole $E(r)$ stejné kulové plochy. Na povrchu koule je intenzita nespojitá.

jejího středu. Všimněme si, že uvnitř koule platí $E = 0$. Křivku na obr. 25.19b lze odvodit derivováním funkce z obr. 25.19a podle r , viz rov. (25.40). Naopak křivka na obr. 25.19a může být odvozena integrováním funkce z obr. 25.19b přes proměnnou r podle rov. (25.19).

Na povrchu vodičů, které nejsou kulově symetrické, se náboj nerozdělí rovnoměrně. Hustota náboje roste se zakřivením, takže na hrotech a hranách může hustota náboje — a tím i intenzita vnějšího elektrického pole, která je jí úměrná — dosahovat velmi vysokých hodnot. Vzduch se může kolem takových hrotů ionizovat a vytvořit koronový výboj; ten mohou vidět při blížících se letních bouřkách např. hráči golfu na koncích golfových holí, horolezci na koncích svých cepínů a na skalních útesech, turisté např. na koncích větví keřů. Takové koronové výboje, vypadající jako zježené vlasy, jsou často předzvěstí úderu blesku. Za takových okolností je rozumné schovat se v dutině nějakého vodivého předmětu, kde je intenzita elektrického pole zaručeně nulová. Auto se svou kovovou karoserií (obr. 25.20) je k tomu téměř ideální (pokud nejde o auto se skládací střechou).

Je-li izolovaný vodič vložen do *vnějšího elektrického pole* (obr. 25.21), pak bude ve všech jeho bodech stejný potenciál bez ohledu na to, zda vodič je či není nabit. Volné vodivostní elektrony se totiž rozdělí po povrchu vodiče takovým způsobem, že elektrické pole, které vyvolají, zruší ve vnitřních bodech vodiče to elektrické pole, které do vodiče proniklo z vnějšku (a které by tam jinak zůstalo nezrušeno, kdyby ve vodiči nebyly volné náboje). Rozložení elektronů po povrchu vodiče také způsobí, že siločáry výsledného pole budou v každém bodě povrchu vodiče k němu kolmé. Kdybychom mohli vodič na obr. 25.21 z vnějšího elektrického pole vyjmout tak, aby jeho povrchové náboje zůstaly fixovány na svých místech, zůstalo by elektrické pole vně i uvnitř vodiče zcela nezměněné (a tedy i průběh siločár by zůstal stejný).



Obr. 25.20 Do karosérie auta udeřila mohutná elektrická jiskra a pak přeskočila přes izolující levou přední pneumatiku do země (všimněme si záblesku v tomto místě), aniž zranila osobu uvnitř auta.

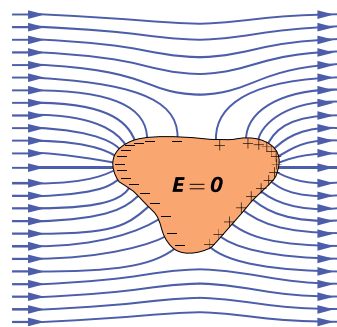
Určení intenzity \mathbf{E} , potenciálu φ a plošné hustoty náboje σ na nabitých vodivých plochách obecného tvaru není jednoduché a vymyká se našemu rozsahu látky. Zpravidla je nutno použít počítače a vhodné numerické metody. Obecně lze říci:

(a) Povrch vodiče je vždy ekvipotenciální plochou, tj. každý bod na povrchu vodiče (i uvnitř vodiče) má též potenciál φ . Ten je úměrný úhrnnému náboji Q tohoto vodiče, konstanta úměrnosti

však závisí nejen na tvaru vodiče, ale i na tvaru a vzájemné poloze všech vodičů v jeho okolí.

(b) Veškerý náboj Q vodiče se nachází pouze na jeho vnějším povrchu S , a to s proměnnou plošnou hustotou náboje $\sigma(\mathbf{r})$. Platí $Q = \oint \sigma dS$. Hustota σ závisí na zakřivení vodiče, v místech s velkou křivostí (hrany, hroty) je zvláště vysoká.

(c) Intenzita $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ elektrického pole je uvnitř vodiče nulová, vně vodiče se spojitě mění a na povrchu se její normálová složka E_n mění skokem (tečná složka E_t zůstává spojitá). Platí zde $E_{n1} - E_{n2} = \sigma/\epsilon_0$, $E_{t1} - E_{t2} = 0$. Poblíž hrotů a hran nabitého vodiče je proto intenzita elektrického pole velmi vysoká.



Obr. 25.21 Nenabitý vodič je vsunut do vnějšího elektrického pole. Volné elektrony vodiče se rozdělí po jeho povrchu tak, jak je naznačeno, a zcela zruší elektrické pole uvnitř vodiče. Siločáry výsledného pole těsně nad povrchem vodiče jsou kolmé k jeho povrchu.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Elektrická potenciální energie

Přemístí-li se bodový elektrický náboj v elektrickém poli z bodu (i) do libovolného bodu (f), je změna ΔE_p jeho potenciální energie rovna

$$\Delta E_p = E_{p,f} - E_{p,i} = -W, \quad (25.1)$$

kde W je práce vykonaná polem při přemístění náboje z bodu (i) do bodu (f). Jestliže nulovou hodnotu potenciální energie zvolíme v nekonečnu, pak *elektrická potenciální energie* E_p náboje v uvažovaném bodě pole bude rovna

$$E_p = -W_\infty. \quad (25.2)$$

Veličina W_∞ znamená práci vykonanou elektrickým polem při přemístění bodového náboje z nekonečna do daného bodu.

Napětí a potenciál

Napětí U neboli rozdíl potenciálů $\Delta\varphi$ mezi dvěma body pole je definováno vztahem

$$U = \Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = -\frac{W}{Q}, \quad (25.7)$$

kde Q je náboj testovací částice, při jejímž přemístění vykoná elektrické pole práci W . *Elektrický potenciál* v libovolném bodě pole je roven

$$\varphi = -\frac{W_\infty}{Q}. \quad (25.8)$$

V soustavě SI je jednotka potenciálu i napětí *volt*: $1 \text{ V} = 1 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1}$.

Potenciál a napětí mohou být vyjádřeny také pomocí potenciální energie E_p , kterou by měla částice s nábojem Q v uvažovaném místě elektrického pole:

$$\varphi = \frac{E_p}{Q}, \quad (25.5)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_i = \frac{E_{p,f}}{Q} - \frac{E_{p,i}}{Q} = \frac{\Delta E_p}{Q}. \quad (25.6)$$

Ekvipotenciální plochy

Všechny body na *ekvipotenciální ploše* mají stejný potenciál. Ani práce W_{ext} vykonaná vnější silou, ani práce W vykonaná elektrickým polem při přemístění testovací částice s nábojem Q z jedné ekvipotenciální plochy na jinou není závislá na poloze

počátečního ani koncového bodu na těchto plochách, ani na trajektorii (tj. na její délce a tvaru) spojující počáteční a koncový bod a je rovna $W_{\text{ext}} = -W = Q(\varphi_f - \varphi_i)$. Intenzita \mathbf{E} je vždy kolmá k ekvipotenciálním plochám.

Výpočet potenciálu φ ze zadané intenzity pole \mathbf{E}

Rozdíl hodnot potenciálů (tj. napětí) mezi libovolnými dvěma body je určen vztahem

$$\varphi_f - \varphi_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad (25.18)$$

v němž křivkový integrál počítáme podél libovolné křivky spojující oba zmíněné body. Jestliže zvolíme $\varphi_i = 0$, dostaneme vztah pro potenciál v bodě (f)

$$\varphi = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (25.19)$$

Potenciál soustavy bodových nábojů

Elektrický potenciál bodového náboje Q ve vzdálenosti r od něj je roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (25.26)$$

Potenciál φ má stejné znaménko jako náboj Q . Potenciál pole vyvolaného soustavou nábojů je součtem potenciálů dílčích polí:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}. \quad (25.27)$$

Potenciál elektrického dipólu

Ve velké vzdálenosti $r \gg d$ od dipólu s dipólovým momentem $p = Qd$ je potenciál roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}. \quad (25.30)$$

Význam úhlu θ je zřejmý z obr. 25.11.

Potenciál spojitě rozloženého náboje

Při spojitě rozloženém náboji má rov. (25.27) tvar

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{r}. \quad (25.32)$$

Integrál v této rovnici zahrnuje všechny náboje dané soustavy.

Výpočet intenzity pole \mathbf{E} ze zadaného potenciálu φ

Složka E_s vektoru intenzity \mathbf{E} v libovolném směru \mathbf{s} je rovna

$$E_s = - \frac{d\varphi}{ds}. \quad (25.40)$$

Pravoúhlé složky vektoru intenzity E_x, E_y, E_z můžeme vypočítat takto:

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (25.41)$$

Je-li elektrické pole homogenní, lze rov. (25.40) použít i pro změny konečné. Volíme-li $\Delta \mathbf{s}$ kolmo k ekvipotenciální ploše ve směru poklesu potenciálu φ , platí

$$E = - \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \quad (25.42)$$

pro velikost vektoru \mathbf{E} . Intenzita pole je k ekvipotenciální ploše kolmá; její složka rovnoběžná s ekvipotenciální plochou je tedy nulová.

Potenciální energie soustavy bodových nábojů

Potenciální energie soustavy bodových nábojů se rovná práci potřebné na vytvoření této konfigurace nábojů z nábojů, které byly původně v nekonečnu (tj. v klidu a tak daleko od sebe, abychom mohli jejich vzájemné působení zanedbat). Pro dva náboje ve vzájemné vzdálenosti r je potenciální energie rovna

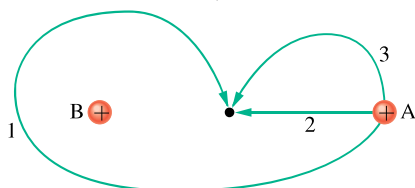
$$E_p = W_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}. \quad (25.43)$$

Potenciál nabitého vodiče

Elektrický náboj přenesený na vodič bude v rovnovážném stavu rozložen výhradně po povrchu vodiče s proměnnou plošnou hustotou. Rozloží se tak, že celý vodič (povrch i vnitřek) má týž potenciál. Plošná hustota náboje je největší v místech s velkým zakřivením (hrany, hroty). Elektrická intenzita vně vodiče je v těchto místech rovněž největší, uvnitř vodiče je nulová.

OTÁZKY

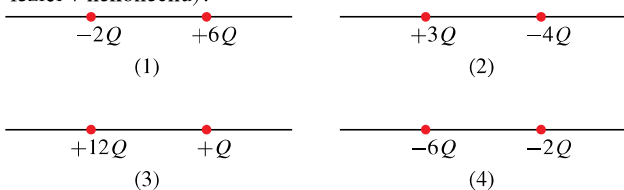
1. Obr. 25.22 znázorňuje tři trajektorie, po kterých můžeme přemístit kladně nabitou kouli A blíž k nepohyblivé kladně nabitě kouli B. (a) Bude koule A přemístěna na místo s vyšším, nebo nižším potenciálem? Je práce vykonaná (b) naší (tj. vnější) silou, (c) silou elektrického pole (vyvolaného nabitou koulí B) kladná, záporná, nebo nulová? (d) Seřadte znázorněné trajektorie sestupně podle velikosti práce vykonané naší silou.



Obr. 25.22 Otázka 1

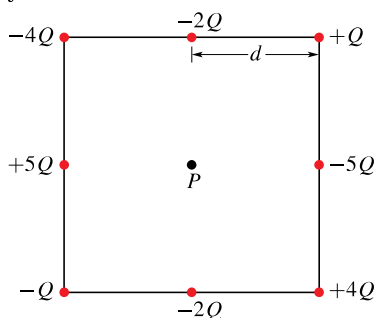
2. (a) Stoupá hodnota potenciálu elektrického pole, které je znázorněné na obr. 25.3a, směrem vpravo, nebo směrem vlevo? (b) Určete potenciál levé krajní plochy, jestliže se sousední znázorněné ekvipotenciální plochy liší o 10 V a pravá krajní plocha má potenciál -100 V. Jestliže přemístíme elektron směrem vpravo, je práce takto vykonaná (c) naší silou, (d) silou elektrického pole, kladná, nebo záporná?

3. Obr. 25.23 zobrazuje čtyři dvojice nabitých částic. Nechť $\varphi = 0$ v nekonečnu. Pro které dvojice těchto částic má jejich potenciál rovněž nulovou hodnotu v některých jiných bodech na jejich spojnici, a to (a) mezi částicemi, (b) vpravo od nich? (c) Jestliže takový bod existuje, má v něm intenzita pole také nulovou hodnotu? (d) Pro kterou dvojici nabitých částic existují body ležící mimo osu, v nichž je $\varphi = 0$ (samozřejmě mimo body ležící v nekonečnu)?



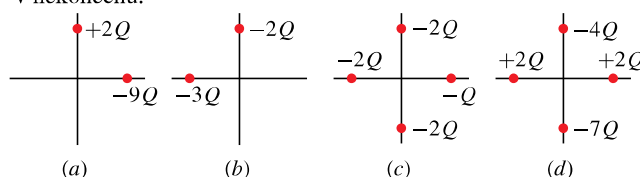
Obr. 25.23 Otázky 3 a 14

4. Obr. 25.24 ukazuje nabitě částice na obvodu čtverce. Vzdá-

Obr. 25.24
Otázka 4

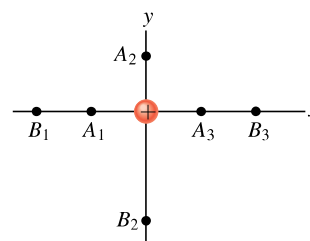
lenost mezi sousedními částicemi je d . Jaký je potenciál ve středu P čtverce, jestliže nulovou hodnotu potenciálu jsme zvolili v nekonečnu?

5. Obr. 25.25 znázorňuje čtyři různé konfigurace nabitých částic, přičemž všechny částice jsou stejně daleko od počátku souřadnic. Seřadte tyto konfigurace sestupně podle hodnoty potenciálu v počátku souřadnic. Nulovou hodnotu potenciálu zvolte v nekonečnu.



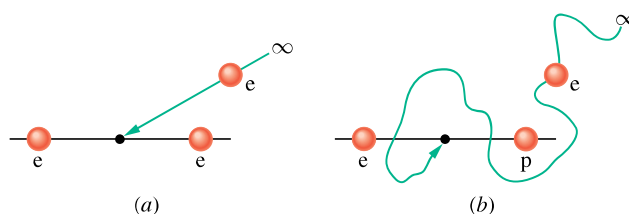
Obr. 25.25 Otázka 5

6. Na obr. 25.26 je zobrazen proton, nacházející se v počátku souřadnic, a tři možné polohy bodu A ve vzdálenosti r od počátku a tři možné polohy bodu B ve vzdálenosti $2r$ od počátku. Existuje devět různých způsobů, jak vybrat dvojici bodů A a B. Seřadte těchto devět možných výběrů sestupně podle rozdílu potenciálů $\varphi_A - \varphi_B$ mezi body A a B.



Obr. 25.26 Otázka 6

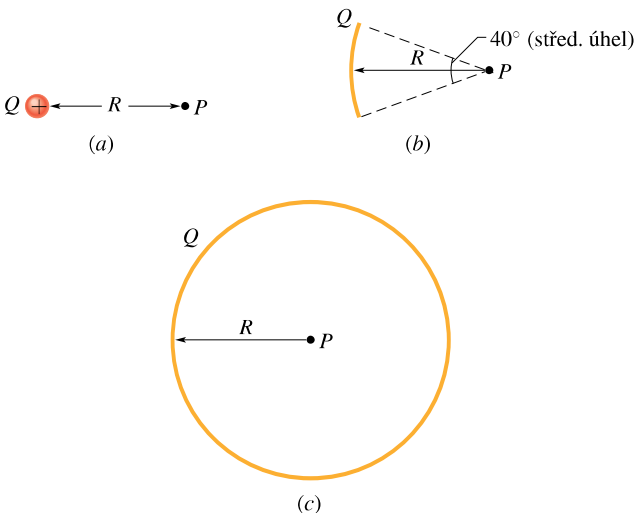
7. Obr. 25.27 znázorňuje dvě situace, v nichž přemísťujeme elektron z nekonečné vzdálenosti do bodu uprostřed spojnice dvou nepohyblivých nabitých částic (mezi dva elektrony, resp. mezi elektron a proton). V obou případech určete, zda práce vykonaná při přemístění elektronu silou elektrického pole nepohyblivých částic je kladná, záporná, nebo nulová.



Obr. 25.27 Otázka 7

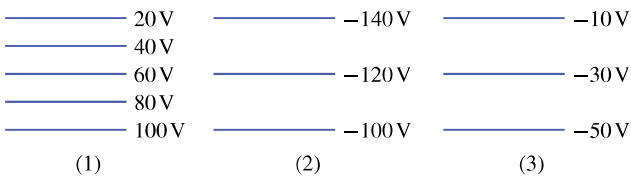
8. (a) Určete potenciál v bodě P elektrického pole buzeného bodovým nábojem Q umístěným ve vzdálenosti R od bodu P

(obr. 25.28a). Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu. (b) Na obr. 25.28b je tentýž náboj Q rovnoměrně rozložen na kruhovém oblouku o poloměru R se středovým úhlem 40° . Vypočítejte hodnotu elektrického potenciálu v bodě P , tj. ve středu kruhového oblouku. (c) Na obr. 25.28c je tentýž náboj Q rovnoměrně rozložen na kružnici o poloměru R . Jaká je hodnota elektrického potenciálu v bodě P ve středu kružnice? (d) Seřaďte tyto tři situace sestupně podle velikosti intenzity elektrického pole v bodě P .



Obr. 25.28 Otázka 8

9. Obr. 25.29 ukazuje tři skupiny ekvipotenciálních ploch v příčném řezu. Všechny tři řezy pokrývají prostorově stejně velikou oblast. (a) Seřaďte uvedené skupiny sestupně podle velikostí intenzit elektrických polí. (b) Ve kterém poli směřuje vektor intenzity dolů?



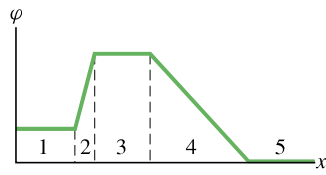
Obr. 25.29 Otázka 9

10. Potenciál elektrického pole je určen (v jednotkách SI) vztahem $\varphi = 2x - 3y + 4z$. Seřaďte složky vektoru intenzity elektrického pole E_x, E_y, E_z v bodě o souřadnicích $x = 2 \text{ m}, y = 0,5 \text{ m}, z = 0,2 \text{ m}$ sestupně podle jejich velikostí.

11. Je velikost intenzity E elektrického pole znázorněného na obr. 25.2 větší na levé, či pravé straně?

12. Obr. 25.30 znázorňuje průběh elektrického potenciálu jako funkci vzdálenosti v pěti intervalech na ose x . (a) Seřaďte tyto intervaly sestupně podle velikosti x -ové složky elektrické intenzity v příslušném intervalu. Jaký je směr intenzity (b) v intervalu 2 a (c) v intervalu 4?

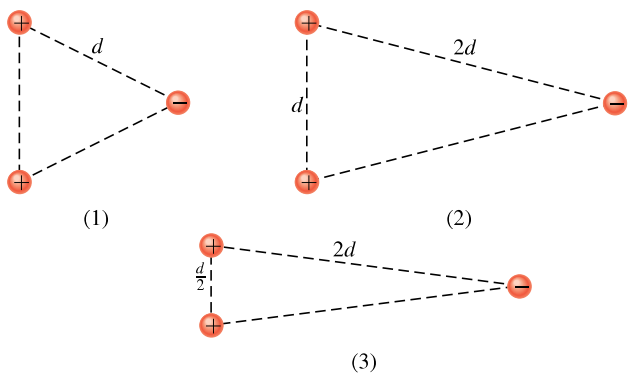
13. Seřaďte uspořádání v kontrole 4 sestupně podle velikosti elektrické potenciální energie systému.



Obr. 25.30 Otázka 12

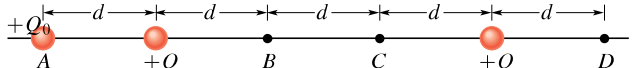
14. Obr. 25.23 ukazuje čtyři páry nabitých částic ve stejných vzájemných vzdálenostech. (a) Seřaďte tyto páry sestupně podle velikosti jejich potenciální energie. (b) U každé dvojice určete, zda její potenciální energie stoupne, nebo klesne, když vzdálenost mezi částicemi vzroste.

15. Obr. 25.31 zobrazuje částice s náboji $+Q$ a $-Q$ ležící ve vrcholech (1) rovnostranného trojúhelníku, (2), (3) rovnoramenného trojúhelníku. (a) Seřaďte tyto konfigurace sestupně podle jejich elektrické potenciální energie. (b) Jak velkou práci bychom museli vykonat, abychom vytvořili konfiguraci (2), jestliže částice byly zpočátku v nekonečnu?



Obr. 25.31 Otázka 15

16. Obr. 25.32 ukazuje soustavu tří nabitých částic. V ní přemístíme částici s nábojem $+Q$ z bodu A do bodu D . Rozhodněte, zda následující veličiny jsou kladné, záporné, nebo nulové: (a) Změna potenciální energie soustavy. (b) Práce vykonaná silou celkového elektrického pole při přemístění částice. (c) Práce vykonaná naší (tj. vnější) silou při přemístění částice. (d) Jaké budou odpovědi (a) až (c), kdyby náboj Q_0 byl původně v bodě B a poté byl přemístěn do bodu C ?



Obr. 25.32 Otázka 16 a 17

17. Uvažujme opět o situaci z otázky 16. Je práce vykonaná vnější silou kladná, záporná, nebo nulová, jestliže přemístění proběhne (a) z bodu A do bodu B , (b) z bodu A do bodu C , (c) z bodu B do bodu D ? (d) Seřaďte tato přemístění sestupně podle velikosti vykonané práce.

18. Kdyby α -částice z př. 25.9 měla menší počáteční energii než vypočítaných 24,6 MeV, odrazila by se od jádra dále, blíže, nebo

ve stejné vzdálenosti 9,23 fm? (Opět neuvažujte silnou interakci mezi α -částicí a atomovým jádrem.)

19. (a) Povrch nabitého vodiče je ekvipotenciální plochou. Znamená to, že elektrický náboj je na něm rozložen rovnoměrně? (b) Jestliže blízko nad povrchem nabitého vodiče má intenzita elektrického pole konstantní velikost, znamená to, že elektrický náboj je rozložen po povrchu vodiče rovnoměrně?

20. Zjistili jsme, že vnitřek dutého vodiče je odstíněn od elektrických polí vnějších elektrických nábojů. Budeme odstínění od vlivu elektrického pole také v tom případě, jestliže budeme vně dutého vodiče, v jehož dutině jsou elektrické náboje?

21. Mohou se dvě ekvipotenciální plochy rozdílných potenciálů protínat? Odpověď zdůvodněte.

22. Vodivá dutá osamocená koule má kladný náboj (1) Q ,

(2) $2Q$, (3) $3Q$. Seřadte tyto případy sestupně podle velikosti následujících veličin: (a) potenciálu na povrchu koule, (b) potenciálu ve středu koule, (c) velikosti intenzity na povrchu, (d) velikosti intenzity ve středu koule. Nulovou hodnotu potenciálu zvolte v nekonečnu.

23. Zopakujte otázku 22, avšak nulovou hodnotu elektrického potenciálu zvolte vždy ve středu koule.

24. Částice A o hmotnosti m a s nábojem $+Q$ a částice B o hmotnosti m a s nábojem $-Q$ jsou zpočátku v klidu ve vzdálenosti d . V situaci č. 1 obě částice současně uvolníme. V situaci č. 2 uvolníme pouze částici A. Ve které z těchto dvou situací bude mít částice A větší kinetickou energii v okamžiku, kdy vzdálenost mezi částicemi klesne na polovinu? Nebo částice A získá v obou případech stejnou kinetickou energii?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 25.2 Elektrický potenciál, napětí

1C. Napětí mezi Zemí a mrakem při místní bouřce je $1,2 \cdot 10^9$ V. O kolik eV se změní energie elektronu, který přeletěl mezi Zemí a mrakem?

2C. Automobilová baterie 12 V může dodat celkový náboj 84 A·h (ampérhodin) do elektrického obvodu automobilu. (a) Jak velký je tento náboj v coulombech? (b) Jak velká energie je nahromaděna v baterii?

3Ú. Při blesku je napětí mezi mrakem a zemí $1,0 \cdot 10^9$ V a přenesený náboj 30 C. (a) Jak se výbojem změní potenciální energie přeneseného náboje? (b) Kdyby všechna energie uvolněná při tomto přenosu mohla být použita k urychlení automobilu o hmotnosti 1 000 kg z klidu, jak velké rychlosti by dosáhl? (Všechny ztráty energie zanedbejte.) (c) Kdyby tato energie mohla být použita k rozpuštění ledu, kolik ledu teploty 0°C by se rozpustilo na vodu téže teploty? Měrné skupenské teplo tání ledu je $3,33 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

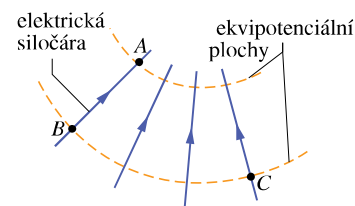
ODST. 25.4 Výpočet potenciálu ze zadané intenzity elektrického pole

4C. Dvě tenká nekonečná vlákna jsou rovnoběžná s osou z a leží symetricky k ní ve vzdálenosti a . Vlákno vpravo je nabit s délkovou hustotou náboje τ , vlákno vlevo s hustotou $-\tau$. Načrtněte několik ekvipotenciálních ploch jejich pole.

5C. Při Millikanově pokusu s mikroskopickou olejovou kapičkou (čl. 23.8) je v prostoru mezi dvěma elektrodami, vzdálenými 1,50 cm, udržováno elektrické pole o intenzitě $1,92 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{C}^{-1}$. Určete napětí mezi elektrodami.

6C. Jestliže se elektron pohybuje podél elektrické siločáry z bodu A do bodu B podle obr. 25.33, vykonají síly elektrického pole práci $3,94 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Jak velké jsou rozdíly potenciálů (a) $\varphi_B - \varphi_A$, (b) $\varphi_C - \varphi_A$, (c) $\varphi_C - \varphi_B$?

7C. Na obr. 25.34 jsou tři vzájemně rovnoběžná vlákna, kolmá



Obr. 25.33 Cvičení 6

k nákrese rovině, nabitá s uvedenými délkovými hustotami náboje. Načrtněte několik elektrických siločár a několik ekvipotenciálních čar (tj. průsečnic ekvipotenciálních ploch s nákresem).

-2τ

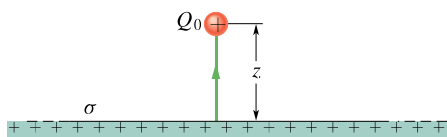


Obr. 25.34 Cvičení 7

8C. Dvě velké vodivé a rovnoběžné desky jsou vzdáleny 12 cm od sebe a nesou na plochách k sobě přivrácených stejně velké elektrické náboje opačných znamének. Na elektron mezi těmito deskami (daleko od jejich okrajů) působí elektrostatická síla o velikosti $3,9 \cdot 10^{-15} \text{ N}$. (a) Vypočítejte intenzitu elektrického pole v místě, kde je elektron. (b) Jak velké je napětí mezi deskami?

9C. Nekonečně velká nevodivá vrstva je po jedné straně nabitá elektrickým nábojem s plošnou hustotou $\sigma = 0,10 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$. Jak daleko od ní se nachází ekvipotenciální plocha mající potenciál o 50 V nižší?

10Ú. Na obr. 25.35 je znázorněn boční pohled na nekonečně velkou nevodivou vrstvu nabitou rovnoměrně po jedné straně s plošnou hustotou σ . (a) Jak velikou práci vykonají síly pole při přemístění malého testovacího náboje Q_0 z počáteční polohy na vrstvě do koncové polohy ve vzdálenosti z od ní? (b) Použijte rov. (25.18) a výsledku z části (a) této úlohy a dokažte, že potenciál nekonečně velké nabitě vrstvy je dán vztahem $\varphi = \varphi_0 - \sigma z / (2\epsilon_0)$, kde φ_0 je potenciál nabitěho povrchu.



Obr. 25.35 Úloha 10

11Ú. Součástí Geigerova počítače je plášť dutého kovového válce o vnitřním průměru 2,00 cm, v jehož ose leží drát o průměru $1,30 \cdot 10^{-4}$ cm. Určete velikost intenzity elektrického pole na povrchu (a) drátu, (b) pláště válce, je-li napětí mezi drátem a pláštěm 850 V. (Tip: Použijte výsledku úlohy 29 v kap. 24.)

12Ú. Uvnitř nevodivé koule poloměru R , homogenně elektricky nabitě v celém objemu, má intenzita elektrického pole radiální směr a její velikost je

$$E(r) = \frac{|Q|r}{4\pi\epsilon_0 R^3},$$

kde Q značí celkový náboj koule (kladný nebo záporný) a r je vzdálenost od středu koule. (a) Zvolte $\varphi = 0$ ve středu koule a určete potenciál $\varphi(r)$ uvnitř koule. (b) Jaké je napětí mezi povrchem koule a jejím středem? (c) Ve kterém z předešlých dvou bodů je potenciál vyšší, je-li náboj Q kladný?

13Ú*. Náboj Q je rovnoměrně rozložen v celém objemu koule o poloměru R . (a) Dokažte, že při volbě $\varphi = 0$ v nekonečnu je potenciál ve vzdálenosti $r < R$ od středu koule roven

$$\varphi = \frac{Q(3R^2 - r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

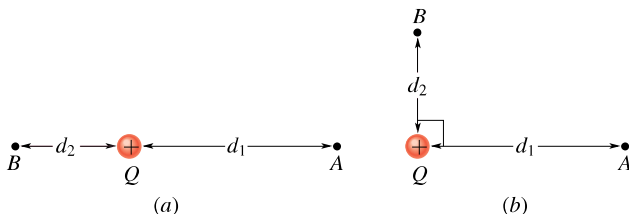
(Tip: Viz př. 24.7.) (b) Proč se tento výsledek liší od výsledku úlohy 12a? (c) Jak velké je napětí mezi povrchem a středem koule? (d) Proč se tento výsledek neliší od výsledku úlohy 12b?

14Ú*. Tlustá kulová slupka s vnitřním poloměrem r_1 a vnějším r_2 je nabitá nábojem Q rovnoměrně rozloženým v celém jejím objemu s hustotou ρ . Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete elektrický potenciál $\varphi(r)$ jako funkci vzdálenosti r od středu kulové slupky. Uvažujte samostatně oblasti: (a) $r > r_2$, (b) $r_2 > r > r_1$, (c) $r < r_1$. (d) Shodují se dílčí řešení v bodech $r = r_2$, resp. $r = r_1$? (Tip: Viz př. 24.7.)

ODST. 25.6 Potenciál soustavy bodových nábojů

15C. Na obr. 25.36 je bodový náboj $Q = 1,0 \mu\text{C}$. Ve vzdálenosti $d_1 = 2,0$ m napravo od něj je bod A a ve dvou různých polohách ve vzdálenosti $d_2 = 1,0$ m od náboje je bod B . Určete

rozdíl potenciálů $\varphi_A - \varphi_B$, jsou-li body A, B umístěny (a) podle obr. 25.36a, (b) podle obr. 25.36b.



Obr. 25.36 Cvičení 15

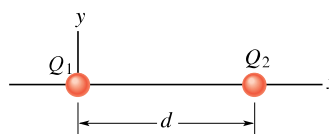
16C. Uvažujme osamocený bodový náboj $Q = 1,5 \cdot 10^{-8}$ C a zvolme $\varphi = 0$ v nekonečnu. (a) Jaký tvar a rozměry má ekvipotenciální plocha s potenciálem 30 V? (b) Mají ekvipotenciální plochy, jejichž potenciály se liší o konstantní hodnotu (řekněme o 1,0 V), mezi sebou stále stejnou vzdálenost?

17C. Náboj $1,50 \cdot 10^{-8}$ C je rozložen na izolované kovové kouli o poloměru 16,0 cm. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál na povrchu koule.

18C. Když se umělá družice Země pohybuje zředěným ionizovaným plynem zemské atmosféry, změní se její elektrický potenciál během jednoho oběhu o $-1,0$ V. Předpokládejte, že družice má kulový tvar poloměru 10 m. Odhadněte množství náboje, které během jednoho oběhu nasbírá.

19C. Většinu materiálu, z něhož jsou Saturnovy prstence, tvoří drobná prachová zrnka o poloměrech řádově 10^{-6} m. Ta se nacházejí v oblasti obsahující ionizovaný plyn a nabírají na sebe volné elektrony. Předpokládejte, že každé zrnko má tvar kuličky o poloměru $R = 1,0 \cdot 10^{-6}$ m. Kolik elektronů musí jedno zrnko prachu na sebe nasbírat, aby se nabilo na -400 V? (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

20C. Na obr. 25.37 jsou dvě elektricky nabitě částice nacházející se na ose x . Načrtněte siločáry a ekvipotenciální křivky (tj. průsečnice ekvipotenciálních ploch s nákresem), jestliže (a) $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = +2Q$, (b) $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = -3Q$.



Obr. 25.37 Cvičení 20 až 23

21C. Částice na obr. 25.37 mají náboje $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = -3Q$. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete na ose x všechny body, v nichž je potenciál jimi vytvořeného elektrického pole roven nule.

22C. Vzdálenost mezi částicemi na obr. 25.37 je 1,0 m a jejich náboje jsou $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = +2Q$. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu. Určete body na ose x (jsou-li jinde než v nekonečnu), v nichž má nulovou hodnotu (a) potenciál, (b) elektrická intenzita.

23C. Dvě částice s náboji Q_1 a Q_2 (obr. 25.37) mají vzdálenost d . Intenzita jejich výsledného elektrického pole je nulová

v bodě $x = d/4$. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete body na ose x (jinde než v nekonečnu), v nichž je potenciál nulový.

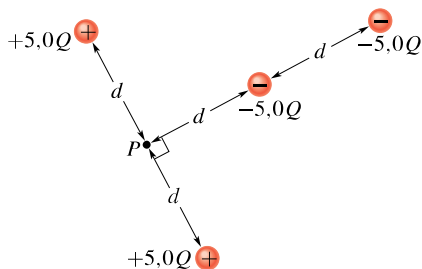
24C. (a) Osamocená vodivá koule o poloměru 10 cm je nabitá nábojem $4,0 \mu\text{C}$. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál na povrchu této koule. (b) Může tato situace skutečně nastat, víme-li, že ve vzduchu obklopujícím kouli dojde k elektrickému výboji, jakmile elektrická intenzita překročí hodnotu $3,0 \text{ MV}\cdot\text{m}^{-1}$?

25Ú. Jak velký je (a) úhrnný elektrický náboj, (b) hustota náboje na povrchu vodivé koule o poloměru 0,15 m, je-li její potenciál vzhledem k nekonečnu 200 V?

26Ú. Kulová kapka vody nesoucí náboj 30 pC má potenciál 500 V vzhledem k nekonečnu. (a) Jaký má kapka poloměr? (b) Jestliže dvě stejně velké kapky se stejným nábojem splynou, vytvoří jednu větší. Jaký bude mít potenciál?

27Ú. V blízkosti Země je elektrická intenzita zhruba $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$. Jak velký potenciál by měl povrch Země, jestliže by pole o této intenzitě bylo nad celým jejím povrchem? (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

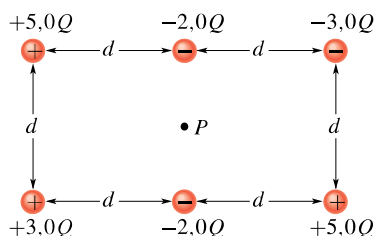
28Ú. Jaký potenciál v bodě P budí soustava čtyř bodových nábojů podle obr. 25.38? Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.



Obr. 25.38 Úloha 28

29Ú. Představte si, že záporný náboj z mince podle př. 22.4 jsme přemístili daleko od Země — třeba do některé vzdálené galaxie — a že zbylý kladný náboj se rozložil rovnoměrně po zemském povrchu. O kolik by se tím změnil jeho elektrický potenciál?

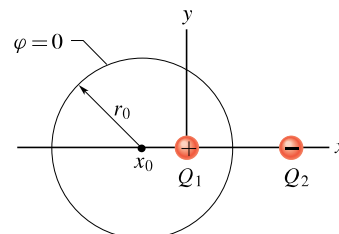
30Ú. Bod P je střed obdélníku. Jaký potenciál v něm budí soustava šesti nábojů podle obr. 25.39? Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.



Obr. 25.39 Úloha 30

31Ú. Bodový náboj $Q_1 = +6,0e$ leží v počátku pravoúhlého souřadnicového systému a druhý náboj $Q_2 = -10e$ má souřadnice $x = 8,6 \text{ nm}$ a $y = 0$. Všechny body v rovině xy , v nichž

$\varphi = 0$ (neuvažujeme body v nekonečnu), tvoří kružnici se středem v bodě x_0 na ose x a s poloměrem r_0 (obr. 25.40). Vypočtete (a) x_0 , (b) r_0 . (c) Leží body roviny xy s potenciálem 5 V také na kružnici?



Obr. 25.40 Úloha 31

32Ú. Plná měděná koule o poloměru 1,0 cm je tence poniklována. Některé atomy niklu jsou radioaktivní a při rozpadu uvolňují po jednom elektronu. Polovina takto uvolněných elektronů vletí do měděné koule a každý z nich přinese do koule energii 100 keV. Druhá polovina elektronů unikne a každý z nich odnáší náboj $-e$. Niklový plášť vykazuje aktivitu $3,70 \cdot 10^8 \text{ Bq}$. (Jednotka *becquerel* je jednotkou aktivity radioaktivních látek; 1 Bq je aktivita takového preparátu, v němž nastává v průměru jeden radioaktivní rozpad za sekundu.) Koule je zavěšena na dlouhém, nevodivém vlákne a je izolována od svého okolí. (a) Za jak dlouho stoupne její potenciál o 1 000 V? (b) Za jak dlouho stoupne její teplota o 5,0 K? Tepelná kapacita koule je $14,3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$.

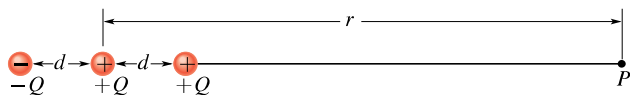
ODST. 25.7 Potenciál elektrického pole dipólu

33C. Molekula čpavku NH_3 má stálý elektrický dipólový moment o velikosti 1,47 D, kde příležitostně používaná jednotka *debye* má hodnotu $1 \text{ D} = 3,34 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$. Vypočítejte potenciál molekuly v bodě na ose dipólu ve vzdálenosti 52,0 nm od jejího středu. (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

34Ú. Dokažte, že potenciál $\varphi(r)$ tří nábojů ležících na přímce podle obr. 25.41 je v dostatečně vzdálených bodech $r \gg d$ dán vztahem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \left(1 + \frac{2d}{r} \right).$$

(Tip: Dané uspořádání lze považovat za soustavu tvořenou bodovým nábojem a elektrickým dipólem.)

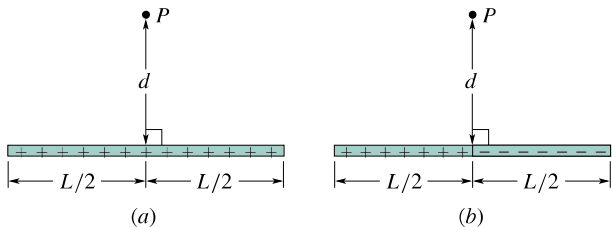


Obr. 25.41 Úloha 34

ODST. 25.8 Potenciál spojitě rozloženého náboje

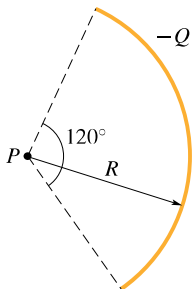
35C. (a) Obr. 25.42a znázorňuje nevodivou tyč délky L , která je rovnoměrně nabitá kladným nábojem s délkovou hustotou τ . Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a vezměte v úvahu obr. 25.13 a rov. (25.35). Určete potenciál v bodě P . (b) Tyč na obr. 25.42b

se od předchozí liší jen tím, že její pravá polovina má náboj záporný. Jaký bude nyní potenciál v bodě P na obr. 25.42b? Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.



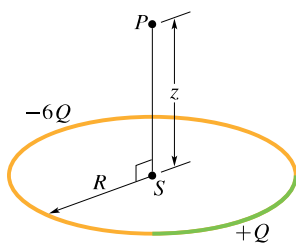
Obr. 25.42 Cvičení 35

36C. Plastiková tyč na obr. 25.43, nesoucí rovnoměrně rozložený elektrický náboj $-Q$, má tvar kruhového oblouku o poloměru R se středovým úhlem 120° . Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál ve středu P kruhového oblouku.



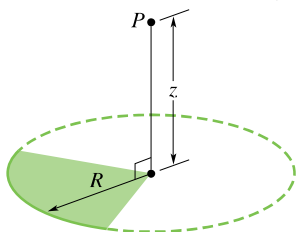
Obr. 25.43 Cvičení 36

37C. Tyč z plastu, stočená do tvaru kružnice o poloměru R , nese kladný náboj $+Q$ rovnoměrně rozložený na jedné čtvrtině obvodu a záporný náboj $-6Q$ rovnoměrně rozložený na zbytku kružnice (obr. 25.44). Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a vypočítejte hodnotu potenciálu (a) ve středu S kružnice, (b) v bodě P na ose symetrie kružnice kolmé k její rovině ve vzdálenosti z od jejího středu.



Obr. 25.44 Cvičení 37

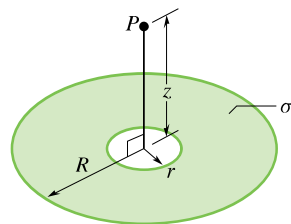
38C. Disk z nevodivého plastu byl nabit s konstantní plošnou hustotou σ . Poté byly tři kvadranty disku odstraněny. Zbývající čtvrtina disku je zobrazena na obr. 25.45. Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál v bodě P , který leží na ose disku ve vzdálenosti z od jeho středu.



Obr. 25.45 Cvičení 38

nečnu a určete potenciál v bodě P , který leží na ose disku ve vzdálenosti z od jeho středu.

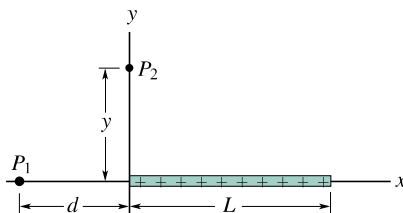
39Ú. Na obr. 25.46 je plochý prstavec o vnějším poloměru R a vnitřním poloměru $r = 0,200R$, na němž je rozložen elektrický náboj s konstantní plošnou hustotou σ . Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu a určete potenciál v bodě P na ose prstence ve vzdálenosti $z = 2,00R$ od jeho středu.



Obr. 25.46 Úloha 39

40Ú. Disk o poloměru $R = 2,20$ cm je nabit od svého středu $r = 0$ až do vzdálenosti $r = R/2$ s konstantní plošnou hustotou náboje $1,50 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$ a od $r = R/2$ až do $r = R$ s konstantní hustotou $8,00 \cdot 10^{-7} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$. (a) Jaký je úhrnný náboj disku? (b) Jaký je potenciál na ose disku ve vzdálenosti $z = R/2$ od jeho středu, jestliže zvolíme $\varphi = 0$ v nekonečnu?

41Ú. Na obr. 25.47 je plastová tyč délky L , ležící v ose x , rovnoměrně nabitá kladným elektrickým nábojem Q . Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, vypočítejte potenciál v bodě P_1 .



Obr. 25.47 Úlohy 41, 42, 50 a 51

42Ú. Plastová tyč na obr. 25.47 má délku L a je nerovnoměrně nabitá s délkovou hustotou náboje $\tau = cx$, kde c je kladná konstanta. Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete potenciál v bodě P_1 .

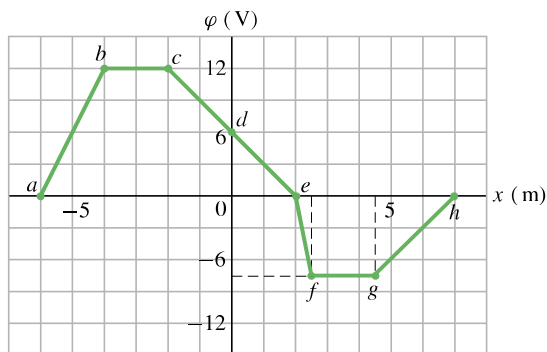
ODST. 25.9 Výpočet intenzity ze zadaného potenciálu

43C. Dvě velké rovnoběžné kovové desky jsou vzdálené 1,5 cm. Na stranách k sobě přivrácených jsou nabitы stejně velkými náboji s opačnými znaménky. Na záporně nabitě desce zvolte $\varphi = 0$. Určete intenzitu pole mezi deskami, víte-li, že potenciál uprostřed vzdálenosti mezi deskami je $+5,0$ V.

44C. Graf na obr. 25.48 znázorňuje průběh potenciálu podél osy x . Určete hodnotu složky E_x elektrické intenzity a zakreslete ji do grafu. (Nezapomínejte se chováním E_x v hraničních bodech dílčích intervalů.)

45C. Vyjděte z rov. (25.30) a určete intenzitu pole dipólu v obecném bodě na jeho ose.

46C. Elektrický potenciál v bodech roviny xy je určen vztahem $\varphi = (2,0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-2})x^2 - (3,0 \text{ V} \cdot \text{m}^{-2})y^2$. Jaká je velikost a směr intenzity pole v bodě $(3,0 \text{ m}; 2,0 \text{ m})$?



Obr. 25.48 Cvičení 44

47C. V prostoru mezi rovnoběžnými rovinnými deskami je elektrický potenciál určen vztahem $\varphi = 1500x^2$, kde x je vzdálenost od jedné z desek (vše v jednotkách SI). Vypočítejte velikost a určete směr intenzity elektrického pole v bodě $x = 1,3$ cm.

48C. V kap. 24 pojednává cvič. 48 o Rutherfordově výpočtu intenzity elektrického pole uvnitř atomu. Rutherford navrhl potenciál uvnitř atomu ve tvaru

$$\varphi(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3} \right),$$

kde Ze je náboj jádra a r vzdálenost od středu atomu; předpokládá se, že záporný náboj elektronů je rovnoměrně rozprostřen v celém objemu atomu až do vzdálenosti R . (a) Ukažte, jak z tohoto vztahu vyplývá vztah pro intenzitu elektrického pole, uvedený ve cvič. 48, kap. 24. (b) Proč zde pro $r \rightarrow \infty$ neplatí $\varphi \rightarrow 0$?

49Ú. (a) Pomocí rov. (25.32) dokažte, že elektrický potenciál v bodě na ose nabitého tenkého prstence poloměru R je ve vzdálenosti z od jeho středu určen vztahem

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

(b) Z tohoto výsledku odvoďte vztah pro E v bodech na ose prstence; porovnejte tento výsledek s výsledkem výpočtu E v čl. 23.6.

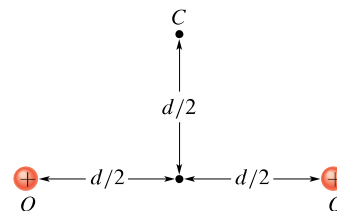
50Ú. (a) Použijte výsledku z úlohy 41 a určete x -ovou složku E_x intenzity elektrického pole v bodě P_1 na obr. 25.47. (Tip: Nejprve zaměňte vzdálenost d ve výsledku proměnnou veličinou x .) (b) Využijte symetrie úlohy a určete složku E_y v tomtéž bodě.

51Ú. Nevodivá tyč délky L na obr. 25.47 je nabitá s proměnnou délkovou hustotou náboje $\tau = cx$, kde c je kladná konstanta. (a) Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete potenciál v bodě P_2 na ose y . (b) Pomocí tohoto výsledku určete složku E_y intenzity elektrického pole v bodě P_2 . (c) Proč nelze při výpočtu E_x v bodě P_2 použít výsledku z části (a) této úlohy?

ODST. 25.10 Elektrická potenciální energie soustavy bodových nábojů

52C. (a) Jakou elektrickou potenciální energii má soustava dvou elektronů vzdálených od sebe 2,00 nm? (b) Vzrůstá, nebo klesá tato energie se zvětšující se vzdáleností elektronů?

53C. Dva nepohyblivé náboje velikosti $Q = +2,0 \mu\text{C}$ jsou od sebe vzdáleny $d = 2,0$ cm (obr. 25.49). (a) Je-li $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete hodnotu elektrického potenciálu v bodě C . (b) Přenesme třetí náboj $Q_0 = +2,0 \mu\text{C}$ z nekonečna do bodu C . Jak velkou práci musíme vykonat? (c) Jak velká je poté elektrická potenciální energie soustavy těchto tří nábojů?

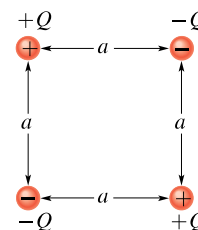


Obr. 25.49 Cvičení 53

54C. Řešte cvič. 53 pro případ, že $Q_0 = -2,0 \mu\text{C}$.

55C. Náboj $Q_1 = +3,0 \cdot 10^{-6}$ C leží v bodě $(3,50; 0,50; 0)$ cm, náboj $Q_2 = -4,0 \cdot 10^{-6}$ C v bodě $(-2,00; 1,50; 0)$ cm. Jak velká práce musela být vykonána při jejich přemístění z nekonečna do daných poloh?

56C. Odvoďte vztah pro práci potřebnou na sestavení konfigurace čtyř bodových elektrických nábojů podle obr. 25.50. Předpokládejte, že náboje byly zpočátku v nekonečnu.



Obr. 25.50 Cvičení 56

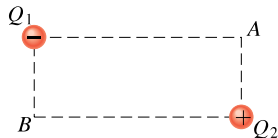
57C. Podle kvarkového modelu je proton složen ze tří kvarků; ze dvou kvarků „up“, z nichž každý má elektrický náboj $+2e/3$ a z jednoho kvarku „down“ s nábojem $-e/3$. Předpokládejte, že všechny tři kvarky jsou stejně daleko od sebe. Za tuto vzdálenost dosadte hodnotu $1,32 \cdot 10^{-15}$ m a vypočítejte (a) elektrickou potenciální energii podsystemu dvou kvarků „up“, (b) celkovou elektrickou potenciální energii systému všech tří kvarků.

58C. Jakou elektrickou potenciální energii má soustava nábojů na obr. 25.9a? Použijte číselné hodnoty uvedené v př. 25.4.

59Ú. Tři elektrické náboje $+0,12$ C leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku o délce strany 1,7 m. Kolik dnů by vyžadovalo přemístění jednoho z těchto nábojů do středu úsečky spojující ostatní dva náboje, je-li k dispozici výkon 0,83 kW?

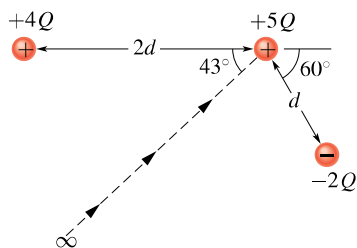
60Ú. Obdélník na obr. 25.51 má strany dlouhé 5,0 cm a 15,0 cm, náboje jsou $Q_1 = -5,0 \mu\text{C}$ a $Q_2 = +2,0 \mu\text{C}$. Jestliže $\varphi = 0$ v nekonečnu, určete hodnotu potenciálu (a) ve vrcholu A , (b) ve vrcholu B . (c) Kolik práce by bylo třeba vykonat na přemístění třetího náboje $Q_3 = +3,0 \mu\text{C}$ z bodu B do bodu A po úhlopříčce obdélníka? (d) Zvýší, nebo sníží tato práce energii soustavy těchto tří nábojů? Byla by práce vykonaná při přemístění náboje Q_3 větší, menší, nebo stejná, kdyby byl tento náboj

přemísťován (e) vnitřkem obdélníka, ale nikoli po úhlopříčce, (f) vně obdélníka z bodu B do bodu A ?



Obr. 25.51
Úloha 60

61Ú. Kolik práce je nutné vynaložit na přenesení elektrického náboje $+5Q$ z nekonečna podél čárkované čáry (obr. 25.52) do místa poblíž dvou pevně umístěných bodových nábojů $+4Q$ a $-2Q$? Položte $d = 1,40$ cm a $Q = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C.



Obr. 25.52
Úloha 61

62Ú. Částice s kladným nábojem Q_0 je upevněna v bodě P . Jiná částice o hmotnosti m se záporným nábojem $-Q$ se pohybuje stále stejně velkou rychlostí po kružnici o poloměru r_1 se středem v bodě P . Odvoďte výraz pro práci W_{ext} , která musí být vykonána vnějším zásahem, aby se poloměr oběžné dráhy druhé částice zvětšil na hodnotu r_2 .

63Ú. Vypočítejte (a) potenciál elektrického pole jádra atomu vodíku ve vzdálenosti $r = 5,29 \cdot 10^{-11}$ m, kde se elektron nachází s velkou pravděpodobností (viz čl. 40.6), (b) elektrickou potenciální energii atomu, když se elektron nachází v uvedené vzdálenosti, (c) kinetickou energii elektronu, který obíhá po kružnici uvedeného poloměru kolem jádra. (d) Kolik energie je nutné vynaložit na ionizaci atomu vodíku, tzn. na oddálení elektronu od jádra atomu do nekonečna? Vyjádřete všechny hodnoty energie v elektronvoltech.

64Ú. Částice s elektrickým nábojem Q je fixována v bodě P . Jiná částice o hmotnosti m se stejným nábojem Q je nejprve držena ve vzdálenosti r_1 od bodu P a poté uvolněna. Určete velikost rychlosti druhé částice ve vzdálenosti r_2 od bodu P . Nechť $Q = 3,1 \mu\text{C}$, $m = 20$ mg, $r_1 = 0,90$ mm a $r_2 = 2,5$ mm.

65Ú. Elektrický náboj $-9,0$ nC je rovnoměrně rozložen na prstenci o poloměru $1,5$ m, který se nachází v rovině yz se středem v počátku O souřadnicového systému. Bodový náboj $-6,0$ pC je umístěn na ose x v bodě $x = 3,0$ m. Vypočítejte práci, kterou vykonáme, přemístíme-li bodový náboj do počátku O .

66Ú. Dvě malé kovové kuličky A a B o hmotnostech $m_A = 5,00$ g a $m_B = 10,0$ g nesou stejně velké kladné elektrické náboje $Q = 5,00 \mu\text{C}$. Jsou spojeny nehmotným a nevodivým vláknem délky $d = 1,00$ m, které je mnohem delší než poloměry kuliček. (a) Jaká je elektrická potenciální energie systému? (b) Předpokládejte, že vlákno přeručíme. Určete v tomto

okamžiku zrychlení každé kuličky. (c) Jakou mají obě kuličky rychlost po uplynutí velmi dlouhé doby od přeručení vlákna?

67Ú. Mezi rovnoběžnými kovovými deskami vzdálenými $d = 1,00$ cm je napětí $U = 625$ V. Jakou nejmenší rychlostí musíme vystřelit elektron z kladné desky, aby doletěl na zápornou?

68Ú. (a) Proton s kinetickou energií $4,80$ MeV letí přímo na střed jádra atomu olova. Předpokládejte, že proton nevnikne do jádra, a uvažujte proto pouze elektrostatickou interakci. Vypočítejte nejmenší vzdálenost od středu jádra, které proton může dosáhnout. (b) Kdyby místo protonu letěla α -částice se stejnou počáteční kinetickou energií, kam nejbliž by se k jádru dostala ve srovnání s protonem z části (a)?

69Ú. Částice o hmotnosti m s kladným elektrickým nábojem Q_0 a počáteční kinetickou energií E_k je vystřelena (z velké vzdálenosti) na střed velmi hmotného atomového jádra majícího elektrický náboj Q . Jádro považujte za nehybné. Jak nejbližše ke středu jádra se částice přiblíží?

70Ú. Tenká vodivá kulová slupka poloměru R je připevněna na izolační podpěru a nabita na potenciál $-\varphi$. Elektron je vystřelen z bodu P ke středu slupky ze vzdálenosti r , kde $r \gg R$. Jakou nejmenší velikost počáteční rychlosti v_0 musí mít elektron, aby se slupky dotkl?

71Ú. Dva elektrony jsou pevně umístěny ve vzdálenosti $2,0$ cm. Jiný elektron, který byl vystřelen z nekonečné vzdálenosti, se zastavil právě uprostřed spojnice obou elektronů. Jaká byla jeho počáteční rychlost?

72Ú. Uvažujte o elektronu na povrchu koule o poloměru $1,0$ cm homogenně nabitě celkovým nábojem $1,60 \cdot 10^{-15}$ C. Jak velká je jeho *úniková rychlost*? Jinými slovy, jakou nejmenší rychlostí musí vylétnout z koule, aby se už nevrátil? (Podobně je v kap. 14 definována úniková rychlost pro únik z gravitačního pole. Zde však gravitační sílu zanedbáme, proč?)

73Ú. Elektron je vystřelen z velké dálky počáteční rychlostí $3,2 \cdot 10^5$ m·s⁻¹ přímo proti protonu, který je pevně vázán v daném místě. Určete, v jaké vzdálenosti od protonu bude rychlost elektronu dvojnásobně velká než jeho rychlost počáteční.

ODST. 25.11 Potenciál nabitého vodiče

74C. Elektrický potenciál duté kovové koule vzhledem k zemi je $+400$ V (při volbě $\varphi = 0$ na zemském povrchu). Celkový náboj koule je $5,0 \cdot 10^{-9}$ C. Určete potenciál v jejím středu.

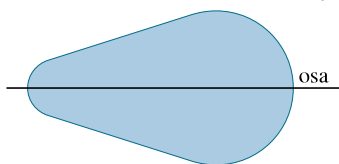
75C. Tenká vodivá kulová vrstva vnějšího poloměru 20 cm je nabita elektrickým nábojem $+3,0 \mu\text{C}$. Načrtněte graf závislosti (a) velikosti intenzity elektrického pole E a (b) potenciálu φ na vzdálenosti r od středu kulové vrstvy. (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.)

76C. Jak velkým elektrickým nábojem byla nabita vodivá koule o poloměru $r = 0,15$ m, jestliže její elektrický potenciál má hodnotu 1500 V vzhledem k nekonečnu?

77C. Uvažujme dvě od sebe velmi vzdálené vodivé koule o poloměrech r_1 a r_2 , kde $r_2 = 2r_1$. Menší koule byla na počátku nabita kladným elektrickým nábojem Q ; větší zůstala nenabitá.

Představme si, že obě koule spojíme dlouhým tenkým drátem. (a) V jakém vzájemném vztahu budou výsledné elektrické potenciály φ_1 a φ_2 obou koulí? (b) Jaké budou výsledné náboje Q_1 a Q_2 na koulích? (c) Jak velký je poměr výsledných plošných hustot nábojů na obou koulích?

78Ú. Kovový předmět, zobrazený v příčném řezu na obr. 25.53, vznikl rotací kolem osy. Předpokládejte, že je nabit záporně a načrtněte několik ekvipotenciálních ploch a elektrických siločár. Jde jen o fyzikální úvahu, nikoli o matematický výpočet.



Obr. 25.53 Úloha 78

79Ú. (a) Kdybychom na povrch nenabitě Země položili 1 elektron na každý čtverečný metr, jaký by byl její potenciál? Uvažujte $\varphi = 0$ v nekonečnu. (b) Jaká by byla intenzita elektrického pole těsně nad zemským povrchem?

80Ú. Středů dvou kovových koulí o poloměru 3,0 cm jsou od sebe vzdáleny 2,0 m. Jedna koule nese elektrický náboj $+1,0 \cdot 10^{-8}$ C, druhá $-3,0 \cdot 10^{-8}$ C. Vzdálenost mezi koulemi považujeme za dostatečně velkou vzhledem k polůměrům obou koulí, což nám dovoluje vyslovit předpoklad, že náboj na každé kouli je rozložen rovnoměrně. Koule jsou od sebe elektricky izolovány. Při volbě $\varphi = 0$ v nekonečnu vypočítejte (a) elektrický potenciál v bodě uprostřed spojnice středů obou koulí, (b) elektrický potenciál každé koule.

81Ú. Kovová koule o poloměru 15 cm nese celkový náboj $3,0 \cdot 10^{-8}$ C. (a) Jaká je velikost elektrické intenzity těsně nad

jejím povrchem? (b) Určete velikost potenciálu na povrchu koule, jestliže hodnotu $\varphi = 0$ zvolíme v nekonečnu. (c) V jaké vzdálenosti od povrchu koule klesne potenciál na 500 V?

82Ú. Dvě tenké, izolované, soustředné vodivé kulové plochy o poloměrech R_1 a R_2 nesou elektrické náboje Q_1 a Q_2 . Jak závisí velikost intenzity $E(r)$ a potenciál $\varphi(r)$ na vzdálenosti r od středu koulí? (Zvolte $\varphi = 0$ v nekonečnu.) Sestrojte grafy $E(r)$ a $\varphi(r)$ pro $r = 0$ až $r = 4,0$ cm, jestliže $R_1 = 0,50$ m, $R_2 = 1,0$ m, $Q_1 = +2,0 \mu\text{C}$ a $Q_2 = +1,0 \mu\text{C}$.

PRO POČÍTAČ

83Ú. Elektrický náboj $Q_1 = -1,2 \cdot 10^{-9}$ C se nachází v počátku souřadnicového systému a náboj $Q_2 = 2,5 \cdot 10^{-9}$ C je na ose y v bodě o souřadnici $y = 0,50$ m. Potenciál v nekonečnu považujte za nulový. (a) Sestrojte průsečnice ekvipotenciální plochy $\varphi = 5,0$ V s rovinou xy . Tato průsečnice obepíná jeden z obou nábojů. (b) V tomto elektrickém poli existují dvě ekvipotenciální plochy $\varphi = 3,0$ V. Jedna z nich obklopuje jeden náboj a druhá obklopuje oba náboje. Sestrojte jejich průsečnice s rovinou xy . (c) Určete hodnotu potenciálu, při které se ekvipotenciální plocha právě rozpadá na dvě nesouvislé části.

84Ú. Předpokládejte, že N elektronů má být umístěno na prstenci poloměru R a že elektrony mohou být rozloženy dvěma způsoby. Při prvním jsou všechny elektrony rozmístěny rovnoměrně po obvodu prstence; vzdálenost mezi sousedními elektrony je tedy všude stejná. Při druhém rozmístění je $(N - 1)$ elektronů rozmístěno opět rovnoměrně po obvodu prstence a jeden elektron je umístěn do středu prstence. Při kterém uspořádání elektronů je jejich celková elektrická potenciální energie menší? Uveďte odpovědi pro hodnoty N rovnající se celým číslům od 2 do 15.

26

Kapacita



Srdeční příhoda... Během komorové fibrilace, častého typu srdečního záchvatu, přestanou srdeční komory pumpovat krev, protože stahy a uvolnění jejich svalových vláken přestanou být koordinovány. Pacienta však lze zachránit, když jeho srdeční sval dostane elektrický šok. Hrudní dutinou pacienta musí projít elektrický proud asi 20 A a přenést přibližně 200 J elektrické energie v průběhu asi 2 ms. Tomu odpovídá krátkodobý elektrický výkon kolem 100 kW. Tak vysoký příkon můžeme poměrně snadno zajistit v nemocnici, ale jak ho dosáhnout v případě, že by nás fibrilace překoapila např. při cestování? Na to určitě nestačí ani elektrický systém automobilu, ani pojízdne ambulance, i kdyby byly po ruce.

26.1 UŽITÍ KONDENZÁTORŮ

Napnutím tětiny luku, natažením pružiny, stlačením plynu, zvednutím knihy a jinými podobnými úkony lze mechanickou energii akumulovat ve formě energie potenciální. Také energii elektrického pole lze takto uchovat v **kondenzátorech**.*

Kondenzátor je např. součástí fotoblesku. Během relativně pomalého nabíjení se v kondenzátoru hromadí elektrický náboj a tím se v něm vytváří elektrické pole. Kondenzátor uchovává elektrické pole a jeho energii až do spuštění fotoblesku, kdy se elektrická energie velmi rychle uvolní.

Kondenzátory slouží v současném elektronickém a mikroelektronickém světě všestranně, a to nejen jako zásobárny elektrické energie. Uveďme alespoň dva příklady za mnohé. (1) Kondenzátory jsou regulačními prvky v obvodech a ladíme jimi rádiové a televizní vysílače i přijímače. (2) Kondenzátory mikroskopických rozměrů tvoří paměťové bloky počítačů. Tato drobná zařízení jsou zde důležitá ani ne tak pro svou schopnost akumulovat energii, jako pro poskytování informace typu ANO-NE (ON-OFF) danou přítomností či nepřítomností náboje v kondenzátoru.

26.2 KAPACITA

Obr. 26.1 ukazuje různá konkrétní provedení kondenzátorů.

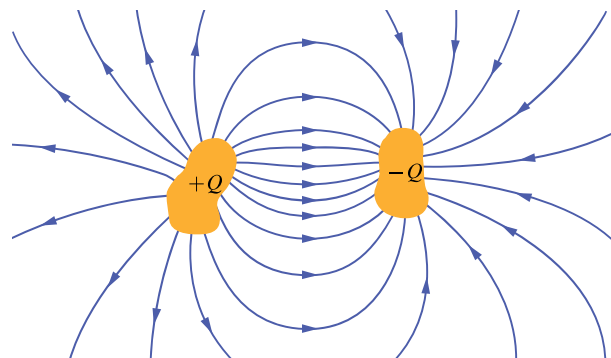


Obr. 26.1 Různá druhy kondenzátorů

Na obr. 26.2 vidíme základní prvky *každého* kondenzátoru: jsou to dva vodiče, zvané **elektrody**, které jsou blízko

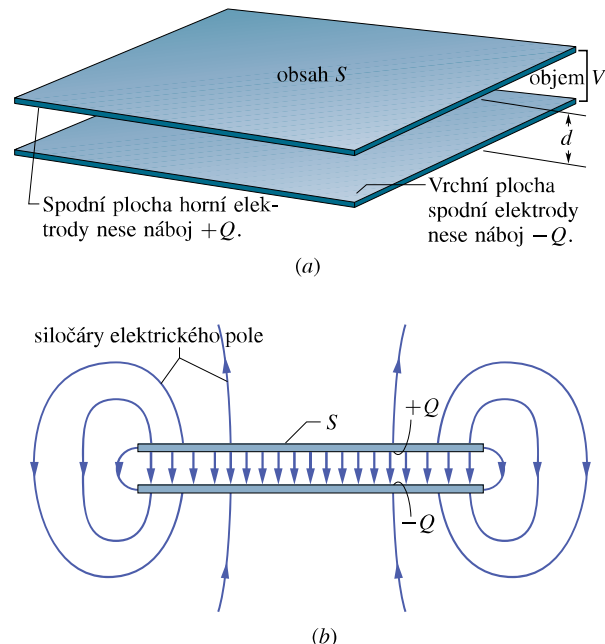
* Česká terminologie používá v blízkém významu slovo **kapacitor**. Rozdíl mezi oběma pojmy spočívá v tom, že kondenzátor představuje konkrétní fyzickou součástku, zatímco kapacitor je idealizovaný prvek, u nějž zanedbáváme vedlejší jevy (např. svod) a uvažujeme jen kapacitu. Protože se nezabýváme elektrotechnikou hlouběji, nepotřebujeme zatím rozlišovat mezi reálným a modelovým prvkem. Pro jednoduchost budeme proto užívat jen jediný, běžnější termín kondenzátor.

u sebe, ale přitom jsou od sebe elektricky izolovány (odděleny). Někdy se jim říká „desky“, a to bez ohledu na jejich skutečný tvar.



Obr. 26.2 Dva vodiče, zvané elektrody, elektricky izolované navzájem od sebe i od svého okolí, tvoří *kondenzátor*. Je-li kondenzátor nabit, nesou elektrody náboje Q stejně velké, ale opačných znamének.

Obr. 26.3a ukazuje velmi časté uspořádání vodičů, kterému říkáme *deskový kondenzátor*. Tvoří ho dva rovnoběžné rovinné vodiče ve vzdálenosti d , každý o obsahu S . Znak $\text{—}||\text{—}$, kterým kondenzátor znázorňujeme ve schéma-



Obr. 26.3 (a) Deskový kondenzátor tvoří dvě rovinné elektrody ve vzdálenosti d , každá má obsah S . Na přilehlých plochách nesou stejně velké elektrické náboje Q navzájem opačných znamének. (b) Elektrické pole v prostoru mezi elektrodami deskového kondenzátoru je homogenní. Taková pole zobrazujeme rovnoběžnými a stejně hustými siločárami. Zakřivené siločáry při okraji elektrod znázorňují nehomogenní elektrické pole.

tech, je odvozen právě od tvaru deskového kondenzátoru; užívá se však pro kondenzátory všech geometrických tvarů.

Je-li kondenzátor *nabitý*, mají jeho elektrody stejně velké náboje, avšak opačných znamének $+Q$ a $-Q$. Mluvíme-li tedy o *náboji* Q kondenzátoru, rozumíme tím absolutní hodnotu náboje jedné z jeho elektrod, tedy $|Q|$, a nikoli *celkový* náboj, který je roven nule: $(+Q) + (-Q) = 0$.

Protože elektrody kondenzátoru jsou vodivé, jsou tudíž i ekvipotenciálními plochami. Všechny body na téže elektrodě mají tedy stejnou hodnotu elektrického potenciálu. Mezi oběma elektrodami nabitého kondenzátoru existuje *potenciálový rozdíl* neboli *napětí*. Neznáme-li pořadí elektrod, je přirozené brát tento rozdíl (napětí) kladný.

Náboj Q a napětí U libovolného kondenzátoru jsou navzájem přímo úměrné. Platí tedy

$$Q = CU. \quad (26.1)$$

Součinitel úměrnosti C je pro libovolný kondenzátor konstantní a nazývá se **kapacita** kondenzátoru,

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (26.2)$$

Hodnota kapacity je závislá pouze na geometrii obou elektrod kondenzátoru (na velikosti, tvaru a jejich vzájemné vzdálenosti), *nikoli* na náboji nebo na napětí na kondenzátoru, a je vždy kladná. *Čím větší* je kapacita kondenzátoru, *tím větší* náboj musí být přenesen na jeho elektrody, abychom na něm dosáhli požadovaného napětí $U = Q/C$. Kapacita je číselně rovna náboji kondenzátoru při napětí 1 V mezi jeho elektrodami.

Z rov. (26.2) vyplývá, že jednotkou kapacity v mezinárodní soustavě jednotek (SI) je $C \cdot V^{-1}$. Tato jednotka se vyskytuje velmi často, a proto dostala vlastní pojmenování **farad** (značka F):

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb na volt,} \\ 1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1}.$$

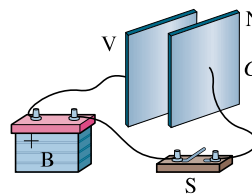
Farad je jednotka pro praxi příliš velká. Častěji proto používáme jednotky menší, zvláště mikrofarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$), nanofarad ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$) a pikofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$).

Nabíjení kondenzátoru

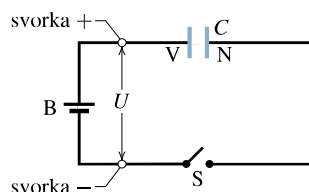
Chceme-li kondenzátor nabít, můžeme ho zapojit do elektrického obvodu se zdrojem stejnosměrného elektrického napětí (např. s baterií). Elektrický obvod je cesta, kterou může procházet elektrický náboj. Baterie je zařízení, ve

kterém probíhají určité elektrochemické reakce, které dodávají na jeho výstupní svorky náboje a vytvářejí tak mezi nimi elektrické napětí.

Baterie B, spínač S, kondenzátor C a spojovací dráty tvoří elektrický obvod na obr. 26.4a. Tentýž obvod je znázorněn jako schéma na obr. 26.4b s použitím značek pro baterii, spínač a kondenzátor. Předpokládejme, že baterie udržuje stálé napětí U mezi svými svorkami. Svorku s vyšším potenciálem značíme „+“ a nazýváme ji *kladný pól*; druhou svorku značíme „-“ a nazýváme ji *záporný pól*.



(a)



(b)

Obr. 26.4 (a) Baterie B, spínač S a elektrody V a N kondenzátoru tvoří elektrický obvod. (b) Schéma elektrického obvodu s *obvodovými prvky*, které jsou reprezentovány svými symboly.

Obvod znázorněný na obr. 26.4a, b není uzavřený, protože spínač S je *vypnutý*, tj. nespojuje vodivé ty spojovací dráty, ke kterým je připojen. Když spínač zapneme, propojí je, obvod se uzavře a spínačem i spojovacími dráty může procházet elektrický náboj. V kap. 22 jsme se dozvěděli, že nosiče elektrického náboje, které mohou procházet takovým vodičem, jako je měděný drát, jsou elektrony. Je-li obvod na obr. 26.4 uzavřen, pak elektrické pole (vytvořené baterií podél vodičů) přinutí elektrony pohybovat se těmito vodiči od elektrody V kondenzátoru ke kladné svorce baterie; tím se elektroda V, ztrácející elektrony, nabíjí kladně (tj. bude mít vyšší potenciál). Zároveň toto elektrické pole nutí elektrony pohybovat se ze záporné svorky baterie na elektrodu N kondenzátoru; tím se elektroda N, získávající elektrony, nabíjí záporně (na nižší potenciál). Obě elektrody kondenzátoru se těmito procesy nabíjejí současně, takže v každém okamžiku mají stejně velké náboje opačných znamének.

Napětí mezi původně nenabitými elektrodami kondenzátoru bylo nulové. Protože se elektrody kondenzátoru nabíjejí opačnými náboji, napětí mezi nimi vzrůstá, dokud se

nevyrovná s napětím U mezi svorkami baterie. Když se napětí vyrovnají, mají elektroda V a kladná svorka baterie stejný potenciál; elektrické pole ve spojovacím drátu mezi nimi vymizí. Podobně elektroda N a záporná svorka mají také stejný potenciál a elektrické pole v drátu, který je spojuje, vymizí. S vymizením elektrického pole zanikne i síla, která uváděla elektrony do pohybu. V tomto stavu je kondenzátor *nabit* a jeho napětí U je rovno napětí baterie B před sepnutím spínače S. Elektrický náboj Q je určen rov. (26.1).

RADY A NÁMĚTY

Bod 26.1: Napětí a potenciál

V této knize i jinde se rovněž setkáme s různými výrazy vztahujícími se k pojům „potenciál“ a „rozdíl potenciálů“ neboli „napětí“. *Potenciál* se vždy vztahuje pouze k *jednomu* bodu, přitom však musí být z kontextu jasné, kde jsme zvolili hladinu nulového potenciálu. *Napětím* neboli *rozdílem potenciálů* rozumíme rozdíl hodnot potenciálu mezi dvěma danými body, přičemž potenciál jednoho z nich může být určen předběžnou dohodou (např. v přístroji „nulový vodič“, „uzemnění“, „kostra přístroje“ apod.)

Tak např. výrok „kondenzátor je nabit na 5 V“ znamená, že napětí mezi jeho elektrodami je 5 V. Baterie může být charakterizována napětím, např. jako „9 V baterie“. Elektrická síť v automobilu má 12 V (rozumí se vůči kovové kostře vozidla) atp.

KONTROLA 1: Co se stane s kapacitou C kondenzátoru, když se (a) náboj Q kondenzátoru zdvojnásobí, nebo (b) napětí U na kondenzátoru ztrojnásobí? Stoupne kapacita kondenzátoru, klesne, či zůstane nezměněna?

26.3 VÝPOČET KAPACITY

Máme vypočítat kapacitu kondenzátoru, známe-li jeho tvar a rozměry. Protože kondenzátory mohou mít nejrůznější provedení i velikost, uvedeme nejprve obecný postup pro výpočet: (1) předpokládáme, že na kondenzátoru je náboj Q ; (2) pomocí Gaussova zákona elektrostatiky určíme intenzitu \mathbf{E} elektrického pole mezi elektrodami kondenzátoru a vyjádříme ji pomocí náboje Q ; (3) známe-li \mathbf{E} , můžeme vypočítat napětí U mezi elektrodami kondenzátoru podle rov. (25.18); (4) vypočítáme C z rov. (26.2).

Výpočet jak intenzity elektrického pole, tak i napětí můžeme zpravidla zjednodušit přijetím vhodných předpokladů, odpovídajících konkrétní situaci.

Výpočet intenzity elektrického pole

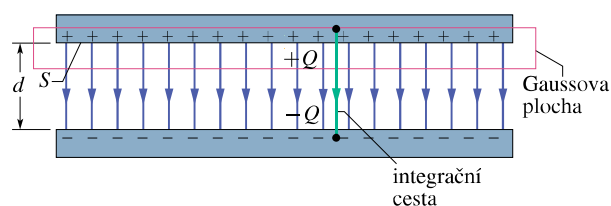
Intenzita \mathbf{E} elektrického pole mezi elektrodami kondenzátoru souvisí s nábojem Q kondenzátoru podle Gaussova zákona elektrostatiky vztahem

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (26.3)$$

kde Q je celkový náboj uvnitř (uzavřené) Gaussovy plochy a $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ je tok intenzity elektrického pole touto plochou. Jsou-li vektory \mathbf{E} a $d\mathbf{S}$ rovnoběžné a je-li Gaussova plocha volena tak, že na ní má intenzita \mathbf{E} konstantní velikost E , pak se rov. (26.3) redukuje na tvar

$$Q = \varepsilon_0 E S \quad (\text{zvl. případ rov. (26.3)}). \quad (26.4)$$

Veličina S v rov. (26.4) je obsah té části Gaussovy plochy, kterou prochází vektor intenzity elektrického pole. Pro zjednodušení výpočtu budeme volit Gaussovu plochu tak, aby zcela obklopila náboj kladně nabitých elektrod kondenzátoru; viz obr. 26.5 jako příklad. (Připomeňme z čl. 24.1, že Gaussova plocha je *vždy* uzavřená.)



Obr. 26.5 Nabitý deskový kondenzátor. Gaussova plocha zcela obklopuje náboj kladně nabitých elektrod. V rov. (26.6) se integruje podél trajektorie vedoucí nejkratší cestou mezi oběma elektrodami.

Výpočet napětí

V kap. 25 je uvedena rov. (25.18), podle které napětí mezi elektrodami kondenzátoru souvisí s vektorem intenzity \mathbf{E} elektrického pole vztahem

$$\varphi_f - \varphi_i = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad (26.5)$$

v němž integrační cesta musí začínat na jedné a končit na druhé elektrodě kondenzátoru; jinak je libovolná. Vybereme takovou integrační cestu, která bude sledovat některou elektrickou siločáru začínající na kladně nabitých elektrodě a končící na záporné. Na takové cestě mají vektory intenzity \mathbf{E} a posunutí $d\mathbf{s}$ v každém bodě stejný směr i orientaci, takže skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ je roven součinu $E ds$. Podle rov. (26.5) je veličina $\varphi_f - \varphi_i$ záporná. Jelikož hledáme

absolutní hodnotu napětí U mezi elektrodami, napíšeme $\varphi_f - \varphi_i = -U$. Takto se rov. (26.5) upraví na tvar

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E \, ds \quad (\text{zvl. případ rov. (26.5)}). \quad (26.6)$$

Integračními mezemi v rov. (26.6) jsou znaky (+) a (-), které nám připomínají, že integrační cesta začíná na kladně nabitě a končí na záporně nabitě elektrodě.

Nyní můžeme použít rov. (26.4) a (26.6) na několik konkrétních případů.

Deskový kondenzátor

Budeme předpokládat, že elektrody deskového kondenzátoru jsou tak velké a tak blízko u sebe, že lze zanedbat rozptyl elektrického pole na jejich okrajích (obr. 26.5). Předpokládáme tedy, že vektor intenzity \mathbf{E} je konstantní (co do velikosti i směru) v celém prostoru mezi elektrodami; všude jinde nechť je roven nule.

Představme si Gaussovu plochu, obklopující pouze náboj Q kladně nabitě elektrody kondenzátoru (obr. 26.5). Podle rov. (26.4) můžeme napsat

$$Q = \varepsilon_0 E S, \quad (26.7)$$

kde S je obsah plochy elektrody.

Rov. (26.6) vede k výsledku

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E \, ds = E \int_0^d ds = Ed. \quad (26.8)$$

V rov. (26.8) lze vytknout před integrál velikost intenzity E , protože je konstantní; takto zjednodušený integrál pak vyjadřuje vzdálenost d elektrod. Dosadíme-li Q z rov. (26.7) a U z rov. (26.8) do rov. (26.2), dostaneme

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad (\text{deskový kondenzátor}). \quad (26.9)$$

Vidíme, že kapacita C deskového kondenzátoru skutečně závisí pouze na jeho geometrických parametrech, konkrétně na obsahu plochy S elektrod a na vzdálenosti d mezi nimi. Všimněme si, že kapacita C vzrůstá se zvětšováním S a se zmenšováním d .

Dodejme, že v důsledku volby konstanty v Coulombově zákonu ve tvaru $1/(4\pi\varepsilon_0)$ vychází často používaný vzorec (26.9) v jednoduchém tvaru. Dále poznamenejme, že rov. (26.9) nám dovoluje vyjádřit permitivitu vakua ε_0 v jednotkách vhodnějších pro úlohy o kondenzátorech, totiž

$$\varepsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} = 8,85 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (26.10)$$

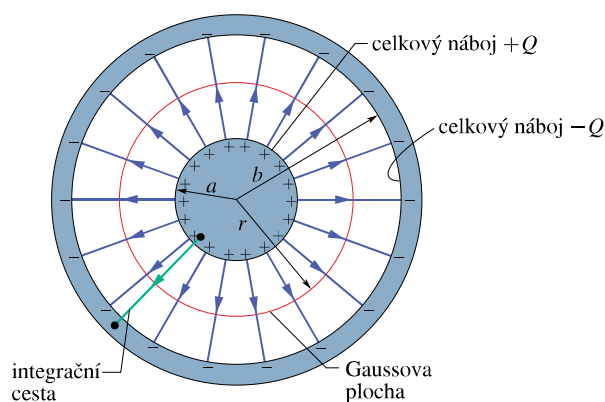
Tuto konstantu jsme v úlohách týkajících se Coulombova zákona (čl. 22.4) vyjadřovali v jiných jednotkách, a to

$$\varepsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (26.11)$$

V základních jednotkách SI je vyjádření jednotky permitivity ε_0 málo přehledné: $\varepsilon_0 \doteq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2$.

Válcový kondenzátor

Obr. 26.6 ukazuje příčný řez válcovým kondenzátorem délky L , jehož vnitřní elektroda má tvar válce o poloměru a a vnější elektrodu tvoří souosý dutý válec o vnitřním poloměru b .



Obr. 26.6 Příčný řez dlouhým válcovým kondenzátorem ukazuje válcovou Gaussovu plochu poloměru r a radiální integrační cestu pro výpočet integrálu v rov. (26.6). Těž obrázek zároveň poslouží k ilustraci příčného řezu vedeného středem kulového kondenzátoru.

Předpokládejme, že $L \gg b$, takže lze zanedbat rozptyl elektrického pole, ke kterému dochází na koncích elektrod. Obě elektrody kondenzátoru nesou stejně velké elektrické náboje Q opačných znamének.

Zvolme Gaussovu plochu ve tvaru souosé válcové plochy délky L o poloměru r , uzavřenou z obou stran základnami a umístěnou tak, jak je znázorněno na obr. 26.6. Pak podle rov. (26.4) platí

$$Q = \varepsilon_0 E S = \varepsilon_0 E (2\pi r L),$$

kde $2\pi r L$ je obsah pláště válce. Elektrický tok oběma základnami zvolené Gaussovy plochy je nulový. Z této rovnice dostaneme

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r}. \quad (26.12)$$

Dosažením tohoto výsledku do rov. (26.6) obdržíme

$$\begin{aligned} U &= \int_{(+)}^{(-)} E \, ds = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{b}{a}. \end{aligned} \quad (26.13)$$

Při úpravě jsme využili toho, že v tomto případě platí $ds = dr$. Pomocí vztahu $C = Q/U$ určíme kapacitu

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)} \quad (\text{válcový kondenzátor}). \quad (26.14)$$

Kapacita válcového kondenzátoru (stejně jako deskového) tedy závisí pouze na geometrických parametrech, v tomto případě konkrétně na poloměrech a , b a na délce L válcových elektrod.

Kulový kondenzátor

Obr. 26.6 může posloužit také jako příčný řez vedený středem kulového kondenzátoru, skládajícího se z plné koule poloměru a a s ní soustředné kulové vrstvy o vnitřním poloměru $b > a$.

Gaussova plocha má tvar soustředné kulové plochy poloměru r , kde $a < r < b$. Použitím rov. (26.4) na tuto plochu dostaneme

$$Q = \epsilon_0 E S = \epsilon_0 E (4\pi r^2),$$

kde $4\pi r^2$ je obsah Gaussovy plochy. Řešení této rovnice dává vztah

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (26.15)$$

který vyjadřuje velikost intenzity elektrického pole, vyvolaného nábojem rovnoměrně rozloženým na vnitřní elektrodě (rov. (24.15)).

Dosadíme-li tento vztah do rov. (26.6), dostaneme

$$\begin{aligned} U &= \int_{(+)}^{(-)} E \, ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{b-a}{ab}. \end{aligned} \quad (26.16)$$

Porovnáním s rov. (26.1) zjistíme, že

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (\text{kulový kondenzátor}). \quad (26.17)$$

Osamocená vodivá koule

I jedinému osamocenému vodiči lze přiřadit kapacitu, představíme-li si, že byl původně obklopen dalším vodičem — dutou koulí, kterou jsme poté „nafukovali“ tak, že její vnitřní poloměr b roste nade všechny meze. Během „nafukování“ kapacita soustavy klesala, ale ne až k nule. Konec

konců, všechny elektrické silokřivky, které mají jeden konec na povrchu nabitého osamoceného vodiče, musí někde mít i druhý konec; stěny místnosti, ve které je vodič umístěn, mohou docela dobře nahradit onu pomyslnou dutou kouli.

Představme si, že osamoceným vodičem je koule, která má poloměr R . Abychom určili její kapacitu, upravíme nejprve rov. (26.17) do tvaru

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{a}{1 - a/b}.$$

Jestliže poloměr b poroste nade všechny meze a místo a dosadíme R , pak v limitě dostaneme

$$C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (\text{kapacita osamocené koule}). \quad (26.18)$$

Poznamenejme, že podle tohoto vzorce i všech ostatních, které byly odvozeny pro kapacitu (rov. (26.9), (26.14) a (26.17)), má kapacita rozměr rovný rozměru konstanty ϵ_0 vynásobené rozměrem délky.

KONTROLA 2: Tři různé kondenzátory jsou zapojeny k téže baterii. Zjistěte, zda a jak se změní náboj na jejich elektrodách, jestliže (a) vzdálenost mezi elektrodami deskového kondenzátoru zvětšíme, (b) poloměr vnitřní válcové elektrody válcového kondenzátoru zvětšíme, (c) poloměr vnější kulové elektrody kulového kondenzátoru zvětšíme.

PŘÍKLAD 26.1

Elektrody deskového kondenzátoru mají vzdálenost $d = 1,0$ mm. Jak velká by musela být jejich plocha, aby měl kondenzátor kapacitu 1,0 F?

ŘEŠENÍ: Pomocí rov. (26.9) vypočítáme

$$\begin{aligned} S &= \frac{Cd}{\epsilon_0} = \frac{(1,0 \text{ F})(1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1})} = \\ &= 1,1 \cdot 10^8 \text{ m}^2. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Je to obsah čtverce o straně delší než 10 km. Kapacita 1 farad je opravdu velká. Moderní technologie však umožnila sestavit kondenzátory i o tak velké kapacitě a přitom velmi skromných rozměrů. Tyto „superkondenzátory“ se používají jako zdroje napětí např. pro kritické situace počítačů; mohou např. při výpadku proudu v síti uchovat data v paměti počítače až po dobu 30 dnů.

PŘÍKLAD 26.2

Paměťový prvek dynamické paměti RAM na čipu má kapacitu 55 fF. Kolik elektronů je nutno dodat na jeho zápornou elektrodu, aby získal napětí 5,3 V?

ŘEŠENÍ: Počet n elektronů je dán podílem Q/e , kde e je elementární náboj. Z rov. (26.1) plyne

$$n = \frac{Q}{e} = \frac{CU}{e} = \frac{(55 \cdot 10^{-15} \text{ F})(5,3 \text{ V})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = 1,8 \cdot 10^6. \quad (\text{Odpověď})$$

To je opravdu velmi malý počet elektronů. Např. smítko prachu tak malé, že se v podstatě nikdy neusadí a většinou se vznáší, obsahuje asi 10^{17} elektronů (a stejný počet protonů).

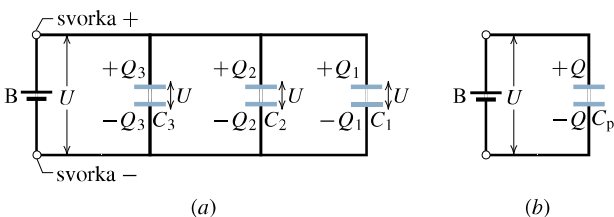
26.4 KONDENZÁTORY SPOJENÉ PARELNĚ A SÉRIOVĚ

Jakkoli složité seskupení kondenzátorů v elektrickém obvodu můžeme považovat za spojení bloků, v nichž jsou jednotlivé kondenzátory zapojeny sériově nebo paralelně. Probereme proto tato dvě základní spojení.

Paralelní spojení (vedle sebe)

Obr. 26.7a ukazuje skupinu tří kondenzátorů připojených *paralelně* k baterii B. (České označení *vedle sebe* vystihuje jejich spojení výstižně.) Protože baterie udržuje na svých svorkách napětí U , je totéž napětí U na každém kondenzátoru.

Při spojení kondenzátorů paralelně (neboli vedle sebe) je napětí na celé skupině kondenzátorů stejné jako napětí na každém z nich.



Obr. 26.7 (a) Tři kondenzátory připojené paralelně (vedle sebe) k baterii B. Baterie udržuje na svých svorkách a na *každém* kondenzátoru napětí U . (b) Výsledná (neboli ekvivalentní) kapacita C_p nahrazuje kapacitu paralelní kombinace. Náboj Q na C_p je roven součtu nábojů Q_1 , Q_2 a Q_3 na kondenzátorech zobrazených na obr. 26.7a.

Hledáme kapacitu C_p skupiny paralelně spojených kondenzátorů (jak je znázorněno na obr. 26.7b). Jinými slovy hledáme kapacitu jediného (ekvivalentního) kondenzátoru, kterým můžeme nahradit tuto skupinu kondenzátorů v tom smyslu, že při téže hodnotě napětí U přiloženého na

kondenzátor o kapacitě C_p na něm bude náboj Q stejně velký jako na celé nahrazované skupině.

Podle rov. (26.1) pro tyto tři kondenzátory platí:

$$Q_1 = C_1 U, \quad Q_2 = C_2 U \quad \text{a} \quad Q_3 = C_3 U.$$

Celkový náboj paralelní kombinace je:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (C_1 + C_2 + C_3)U.$$

Výsledná kapacita soustavy paralelně spojených kondenzátorů je pak

$$C_p = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2 + C_3.$$

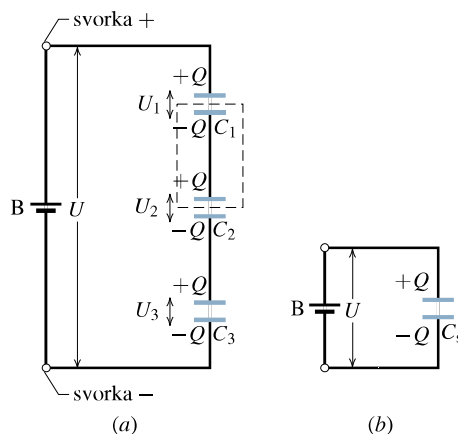
To je výsledek, který můžeme snadno rozšířit na libovolný počet n kondenzátorů:

$$C_p = \sum_{j=1}^n C_j \quad (n \text{ kondenzátorů spojených paralelně}). \quad (26.19)$$

Sériové spojení (za sebou)

Obr. 26.8a ukazuje skupinu tří kondenzátorů připojených *sériově* k baterii B. (I zde je český termín *za sebou* výstižný.) Baterie udržuje napětí U mezi levou a pravou svorkou bloku kondenzátorů. V tomto uspořádání vzniknou na jednotlivých kondenzátorech o kapacitách C_1 , C_2 a C_3 různá napětí U_1 , U_2 a U_3 ; zřejmě však platí $U_1 + U_2 + U_3 = U$.

Při spojení kondenzátorů do série (neboli za sebou) je napětí na celé skupině kondenzátorů rovno součtu napětí na jednotlivých kondenzátorech.



Obr. 26.8 (a) Tři kondenzátory připojené sériově (za sebou) k baterii B. Baterie udržuje napětí U mezi krajními svorkami této sériové kombinace. (b) Výsledná kapacita C_s nahrazuje sériovou kombinaci. Napětí U na C_s je rovno součtu napětí U_1 , U_2 a U_3 na kondenzátorech.

Hledáme kapacitu C_s sériové kombinace. Jinými slovy hledáme kapacitu jediného (ekvivalentního) kondenzátoru, kterým můžeme celou skupinu nahradit podle obr. 26.8b v tom smyslu, že při stejném přiloženém napětí U bude na ekvivalentním kondenzátoru stejně velký náboj Q jako na celé nahrazované skupině.

Když k sériové kombinaci kondenzátorů na obr. 26.8a připojíme baterii, pak musí být na každém kondenzátoru stejně velký náboj Q , a to i tehdy, jsou-li kondenzátory různé a mají-li různé kapacity. Abychom tomuto faktu porozuměli, povšimněme si, že část elektrického obvodu označená přerušovanou čarou na obr. 26.8a je elektricky izolovaná od zbytku obvodu. Tato část obvodu nemůže získat ani ztratit žádný elektrický náboj. Baterie může v izolované části náboj pouze *indukovat*, tedy přerozdělit ten náboj, který tam již je: když baterie dodá náboj $+Q$ na horní elektrodu kondenzátoru C_1 , pak tento náboj přitáhne elektrony z izolované části, tj. přerozdělí je. Toto přerozdělení způsobí, že spodní elektroda kondenzátoru C_1 získá náboj $-Q$ a horní elektroda kondenzátoru C_2 získá náboj $+Q$. Zároveň baterie, která spodní elektrodě kondenzátoru C_3 dodá náboj $-Q$, vyvolá přerozdělení nábojů na vodivé spojených elektrodách kondenzátorů C_2 a C_3 .

Konečným výsledkem je stejný náboj Q na každém kondenzátoru. Celkový náboj dodaný baterií je ovšem Q , nikoli snad $3Q$. Baterie dodala náboj $+Q$, který přímo přešel na nejvrchnější elektrodu (obr. 26.8a), a odebrala náboj $-Q$ z nejspodnější elektrody celé kombinace. Ostatní elektrody kondenzátorů se nabily pouze tím, že se přerozdělily náboje mezi vodivé spojenými elektrodami sousedních kondenzátorů.

Použitím rov. (26.1) na každý kondenzátor v sérii dostaneme

$$U_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} \quad \text{a} \quad U_3 = \frac{Q}{C_3}.$$

Celkové napětí na sériové kombinaci kondenzátorů je

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_3 = \\ &= Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right). \end{aligned}$$

Výsledná kapacita soustavy sériově spojených kondenzátorů má tedy hodnotu

$$C_s = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

neboli

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

Tento výsledek lze snadno rozšířit na libovolný počet n kondenzátorů:

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (\text{pro kondenzátory spojené sériově}). \quad (26.20)$$

Podle rov. (26.20) je výsledná kapacita sériové kombinace kondenzátorů vždy menší než kapacita kteréhokoliv z nich.

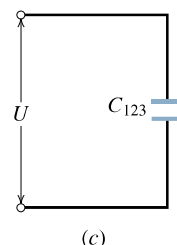
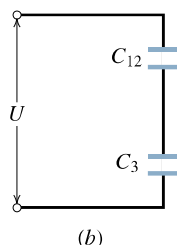
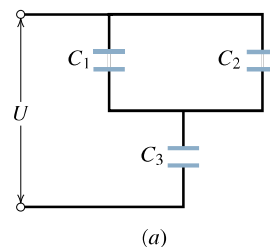
V př. 26.3 uvidíme, jak lze složitou kombinaci kondenzátorů zjednodušit rozložením na menší části s paralelním nebo sériovým řazením kondenzátorů. Každá taková menší část pak může být nahrazena výslednou kapacitou. To zjednodušuje původní kombinaci kondenzátorů i analýzu elektrických obvodů.

KONTROLA 3: Baterie o napětí U udržuje náboj Q na kombinaci dvou stejných kondenzátorů. Jaké je napětí a náboj na každém z obou kondenzátorů, když jsou spojeny (a) paralelně, (b) sériově?

PŘÍKLAD 26.3

(a) Určete výslednou kapacitu kombinace kondenzátorů na obr. 26.9a. Je dáno

$$C_1 = 12,0 \mu\text{F}, \quad C_2 = 5,30 \mu\text{F}, \quad C_3 = 4,50 \mu\text{F}.$$



Obr. 26.9 Příklad 26.3. (a) Kombinace tří kondenzátorů. (b) Paralelní kombinace kondenzátorů C_1 a C_2 je nahrazena ekvivalentním kondenzátorem C_{12} . (c) Sériová kombinace kondenzátorů C_{12} a C_3 je nahrazena ekvivalentním kondenzátorem C_{123} .

ŘEŠENÍ: Kondenzátory C_1 a C_2 jsou spojeny paralelně. Z rov. (26.19) vyplývá vztah pro jejich výslednou kapacitu

$$C_{12} = C_1 + C_2 = (12,0 \mu\text{F}) + (5,30 \mu\text{F}) = 17,3 \mu\text{F}.$$

Podle obr. 26.9b kondenzátory C_{12} a C_3 tvoří sériovou kombinaci. Z rov. (26.20) pro jejich ekvivalentní kapacitu C_{123} (zobrazenou na obr. 26.9c) dostáváme

$$\frac{1}{C_{123}} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{(17,3 \mu\text{F})} + \frac{1}{(4,50 \mu\text{F})} = 0,280 (\mu\text{F})^{-1},$$

z čehož plyne

$$C_{123} = \frac{1}{0,280 (\mu\text{F})^{-1}} = 3,57 \mu\text{F}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Na vstupní svorky kombinace kondenzátorů, zobrazené na obr. 26.9a, je připojeno napětí $U = 12,5 \text{ V}$. Jaký náboj je na kondenzátoru C_1 ?

ŘEŠENÍ: Pro náboj na ekvivalentním kondenzátoru C_{123} (obr. 26.9c) dostaneme

$$Q_{123} = C_{123}U = (3,57 \mu\text{F})(12,5 \text{ V}) = 44,6 \mu\text{C}.$$

Stejně velký náboj je na každém kondenzátoru sériové kombinace zobrazené na obr. 26.9b. Označme Q_{12} náboj na kondenzátoru C_{12} (platí $Q_{12} = Q_{123}$). Napětí na svorkách ekvivalentního kondenzátoru C_{12} je tedy

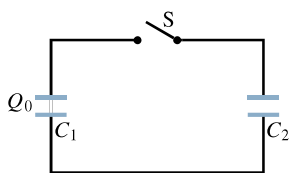
$$U_{12} = \frac{Q_{12}}{C_{12}} = \frac{(44,6 \mu\text{C})}{(17,3 \mu\text{F})} = 2,58 \text{ V}.$$

Stejně napětí se objeví na svorkách kondenzátorů C_1 a C_2 (obr. 26.9a). Označme U_1 napětí mezi svorkami kondenzátoru C_1 . Pak

$$Q_1 = C_1 U_1 = (12,0 \mu\text{F})(2,58 \text{ V}) = 31,0 \mu\text{C}. \quad (\text{Odpověď})$$

PŘÍKLAD 26.4

Kondenzátor o kapacitě $C_1 = 3,55 \mu\text{F}$ je nabit baterií na napětí $6,30 \text{ V}$. Poté je baterie odpojena a kondenzátor je spojen přes spínač S s nenabitým kondenzátorem o kapacitě $C_2 = 8,95 \mu\text{F}$ (obr. 26.10). Sepneme-li spínač, začne náboj přecházet od kondenzátoru C_1 ke kondenzátoru C_2 , a to tak dlouho, dokud se napětí U na obou kondenzátorech nevyrovnej. Jaké bude nakonec napětí U na kondenzátorech?



Obr. 26.10 Příklady 26.4 a 26.5. Kondenzátor C_1 je nabit na napětí U_0 a nabíjecí baterie je odstraněna. Poté je zapnut spínač S , takže část náboje přejde z kondenzátoru C_1 na kondenzátor C_2 .

ŘEŠENÍ: Původní náboj Q_0 kondenzátoru C_1 je nyní rozdělen mezi oba kondenzátory tak, že platí

$$Q_0 = Q_1 + Q_2.$$

Použijeme vztah $Q = CU$ a dostaneme

$$C_1 U_0 = C_1 U + C_2 U.$$

Odtud vyplývá

$$U = U_0 \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{(6,30 \text{ V})(3,55 \mu\text{F})}{(3,55 \mu\text{F} + 8,95 \mu\text{F})} = 1,79 \text{ V}. \quad (\text{Odpověď})$$

Jakmile kondenzátory dosáhnou tohoto napětí, pohyb náboje ustane.

RADY A NÁMĚTY

Bod 26.2: Obvody s více kondenzátory

Rozebereme postup, který jsme použili při řešení př. 26.3, v němž bylo několik kondenzátorů zapojeno do bloku. Abychom našli výslednou kapacitu bloku, zjednodušíme dané uspořádání kondenzátorů postupně a použijeme rov. (26.19) při paralelním spojení a rov. (26.20) při spojení sériovém. Náboj nahromaděný na ekvivalentním kondenzátoru vypočítáme z rov. (26.1), kde napětí U je napětí dané připojenou baterií. Součin CU vyjadřuje celkový náboj nahromaděný na všech kondenzátorech daného uspořádání.

Chceme-li však určit náboj nebo napětí na kterémkoli kondenzátoru zvlášť, je nutné postupovat v opačném pořadí. Při každém obráceném kroku používáme těchto dvou pravidel: Jsou-li kondenzátory spojeny paralelně, je na každém z nich stejné napětí U jako na jejich ekvivalentním kondenzátoru a pro výpočet náboje na každém kondenzátoru použijeme rov. (26.1). Jsou-li kondenzátory spojeny do série, je na každém z nich stejně velký náboj jako na jejich ekvivalentním kondenzátoru a pomocí rov. (26.1) či (26.2) určíme napětí na každém z nich.

Bod 26.3: Baterie a kondenzátory

Baterie udržuje určité napětí na svých svorkách. Připojíme-li kondenzátor o kapacitě C_1 (mnohdy stručněji jen kondenzátor C_1) z př. 26.4 k baterii o napětí $6,30 \text{ V}$, budou mezi oběma elektrodami kondenzátoru a baterií procházet náboje tak dlouho, dokud kondenzátor nezíská stejné napětí, jaké bylo na nezapojené baterii.

Kondenzátor se liší od baterie v tom, že v něm neprobíhají vnitřní elektrochemické reakce, které by uvolňovaly nabitě částice (elektrony) z jeho atomů a molekul. Když tedy nabitý kondenzátor C_1 z př. 26.4 odpojíme od baterie a potom spojíme s nenabitým kondenzátorem C_2 (spínač S je zapnutý), napětí na kondenzátoru C_1 se neudrží. Jedinou veličinou,

kteřá se zachovává, je celkový náboj Q_0 soustavy těchto dvou kondenzátorů. Zákon zachování platí pro elektrický náboj, *nikoli* pro elektrický potenciál.

Nyní si vysvětlíme, co se děje s nábojem. Když je spínač S vypnutý tak jako na obr. 26.10, náboj Q_0 je jen na kondenzátoru C_1 . Náboj nemůže přecházet mezi kondenzátory, aniž by byl obvod vodičů uzavřen. Sepnutím spínače S se obvod uzavře a část náboje Q_0 přejde z kondenzátoru C_1 na kondenzátor C_2 . Tím se zvýší napětí na C_2 a současně sníží napětí na C_1 . To probíhá tak dlouho, dokud se napětí U obou kondenzátorů nevyrovnají. Potenciály propojených horních elektrod obou kondenzátorů na obr. 26.10 si jsou rovny a také potenciály propojených spodních elektrod si jsou rovny. Obvodem již dále náboj neprochází, říkáme, že kondenzátory jsou v rovnovážném stavu. (Celý uvedený proces proběhne velice rychle, jak je vyloženo v čl. 28.8.)

KONTROLA 4: Předpokládejte, že v příkladu 26.4 a na obr. 26.10 je kondenzátor C_2 nahrazen sériovou kombinací kondenzátorů C_3 a C_4 . (a) Jaký vztah platí mezi celkovým počátečním nábojem Q_0 , nábojem Q_1 na kondenzátoru C_1 a nábojem Q_{34} na ekvivalentním kondenzátoru C_{34} po zapnutí spínače a ustálení náboje? (b) Jestliže $C_3 > C_4$, je náboj Q_3 na C_3 větší, menší, nebo roven náboji Q_4 na C_4 ?

26.5 ENERGIE ELEKTRICKÉHO POLE

K nabití kondenzátoru musí být vykonána práce vnějším působením. Představme si například, že použitím „kouzelné pinzety“ přemísťujeme elektrony, jeden po druhém, z jedné elektrody na druhou elektrodu původně nenabitého kondenzátoru. Elektrické pole, které se přitom vytváří v prostoru mezi nimi, má takový směr, že brání dalšímu přenosu náboje. Čím větší náboj se shromažďuje na elektrodách kondenzátoru, tím více práce je nutné vykonat k přenosu dalších elektronů. V praxi není tato práce konána „kouzelnou pinzetou“, ale baterií na úkor její chemické energie.

Práce, která byla potřebná k nabití kondenzátoru, je obsažena v elektrickém poli mezi jeho elektrodami ve formě **elektrické potenciální energie*** E_p . Tuto energii můžeme uvolnit vybitím kondenzátoru v elektrickém obvodu obdobně, jako můžeme uvolnit mechanickou potenciální energii nahromaděnou v nataženém luku uvolněním těhly, aby se tato energie přeměnila na kinetickou energii šípů.

* Dejte prosím pozor na značení v tomto článku: elektrická intenzita \mathbf{E} je vektor a má velikost E (obojí je bez indexů), energie je skalár a má zde vždy nějaký index: E_p , $E_{p,i}$, $E_{p,f}$, E_{el} , $E_{el,i}$, $E_{el,f}$ apod.

Předpokládejme, že v určitém okamžiku byl přemístěn elektrický náboj Q' z jedné elektrody na druhou. Napětí U' mezi elektrodami v tomto okamžiku bude Q'/C . Jestliže přemístíme další infinitezimální náboj dQ' , musíme na to podle rov. (25.7) vynaložit práci

$$dW_{\text{ext}} = U' dQ' = \frac{Q'}{C} dQ'.$$

Práce potřebná k přenesení celkového náboje Q pak je

$$W_{\text{ext}} = \int dW_{\text{ext}} = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{Q^2}{2C}.$$

Tato práce je uložena (obsažena) v elektrickém poli kondenzátoru jako jeho elektrická energie, takže

$$E_{\text{el}} = \frac{Q^2}{2C} \quad (\text{elektrická energie kondenzátoru}). \quad (26.21)$$

Tento vztah můžeme s přihlédnutím k rov. (26.1) zapsat ve tvaru

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} C U^2 \quad (\text{elektrická energie kondenzátoru}). \quad (26.22)$$

Rov. (26.21) a (26.22) platí nezávisle na geometrickém tvaru kondenzátoru.

Abychom získali fyzikální představu o uložení energie, uvažujme dva deskové kondenzátory C_1 a C_2 se stejně velkou plochou elektrod, ale lišící se tím, že kondenzátor C_2 má dvojnásobnou vzdálenost elektrod než kondenzátor C_1 . Kondenzátor C_2 má proto podle rov. (26.9) dvakrát menší kapacitu než kondenzátor C_1 . Jestliže oba kondenzátory mají stejný náboj, z rov. (26.21) plyne, že kondenzátor C_2 má dvojnásobnou elektrickou energii než C_1 . Ze dvou kondenzátorů se stejně velkým nábojem má tedy ten kondenzátor, který má dvojnásobný objem mezi svými elektrodami, dvojnásobnou elektrickou energii. Uvědomme si současně, že podle rov. (26.4) jsou intenzity elektrických polí mezi elektrodami obou kondenzátorů stejné. To vše nás vede k následujícímu závěru:

Energie nabitého kondenzátoru je soustředěna v elektrickém poli mezi jeho elektrodami.

To je podstatou *polního pojetí*: energii nabitého kondenzátoru nepřisuzujeme nábojům rozloženým na deskách, ale přísluší poli mezi deskami.

Lékařský defibrilátor

Schopnost kondenzátoru akumulovat elektrickou energii je základem *defibrilačních* zařízení, která používají lékaři

k potlačení srdečních fibrilací pacienta. Baterie nabíjí v přenosném zařízení kondenzátor na vysoké napětí a ten akumuluje v době kratší než jedna minuta velkou energii. Baterie sama má jen nevelké napětí; elektronický obvod ho však opakovaně převádí na vyšší napětí a nabíjí jím kondenzátor, přičemž potřebný výkon během tohoto procesu je malý.

Vodivé elektrody se přiloží na hrudník postiženého. Po zapnutí ovládacího spínače vyšle kondenzátor dávku své akumulované energie z jedné elektrody tělem pacienta do druhé elektrody. Je-li např. kondenzátor o kapacitě $70 \mu\text{F}$ v defibrilátoru nabit na $5\,000 \text{ V}$, pak podle rov. (26.22) je energie kondenzátoru

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}(70 \cdot 10^{-6} \text{ F})(5 \cdot 10^3 \text{ V})^2 = 875 \text{ J}.$$

Řekněme, že z ní projde tělem postiženého energie $E'_{\text{el}} = 200 \text{ J}$ během pulzu trvajícího $2,0 \text{ ms}$. Tento pulz má tedy výkon

$$P = \frac{E'_{\text{el}}}{t} = \frac{(200 \text{ J})}{(2,0 \cdot 10^{-3} \text{ s})} = 100 \text{ kW},$$

kteřý je o mnoho řádů větší než je výkon samotné baterie.

Hustota energie elektrického pole

Zanedbáme-li rozptyl, má elektrické pole ve všech bodech mezi elektrodami deskového kondenzátoru stejnou intenzitu. **Objemová hustota elektrické energie** w_{el} , tj. elektrická energie v objemu jednotkové velikosti, má proto v celém prostoru mezi elektrodami také stejnou velikost. Hodnotu w_{el} získáme vydělením celkové elektrické energie objemem $V = Sd$ prostoru mezi elektrodami, takže

$$w_{\text{el}} = \frac{E_{\text{el}}}{V} = \frac{CU^2}{2Sd}.$$

Dosažením z rov. (26.9) obdržíme

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2.$$

Protože podle rov. (25.42) je podíl U/d roven intenzitě elektrického pole, dostáváme pro objemovou hustotu energie vztah

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (\text{hustota energie}). \quad (26.23)$$

Ačkoli jsme tento výsledek odvodili pro zvláštní případ deskového kondenzátoru, je platný obecně pro jakékoli elektrické pole.



Při fotografování střely prorážející banán vybil vynálezce stroboskopie Harold Edgerton elektrickou energii kondenzátoru do jedné ze svých stroboskopických lamp. Ta pak jasně ozářila banán v krátkém intervalu $0,3 \mu\text{s}$.

PŘÍKLAD 26.5

Jaká je elektrická energie soustavy dvou kondenzátorů na obr. 26.10 v př. 26.4 v okamžicích před a po zapojení spínače S?

ŘEŠENÍ: Na začátku je nabit pouze kondenzátor C_1 na napětí $U_0 = 6,30 \text{ V}$. Jeho počáteční elektrická energie je podle rov. (26.22)

$$E_{\text{el},i} = \frac{1}{2}C_1U_0^2 = \frac{1}{2}(3,55 \cdot 10^{-6} \text{ F})(6,30 \text{ V})^2 = 7,04 \cdot 10^{-5} \text{ J} = 70,4 \mu\text{J}. \quad (\text{Odpověď})$$

Po sepnutí spínače bude na obou kondenzátorech stejné napětí $U = 1,79 \text{ V}$. Konečná elektrická energie obou kondenzátorů je pak

$$E_{\text{el},f} = \frac{1}{2}C_1U^2 + \frac{1}{2}C_2U^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2 = \frac{1}{2}(3,55 \cdot 10^{-6} \text{ F} + 8,95 \cdot 10^{-6} \text{ F})(1,79 \text{ V})^2 = 2,00 \cdot 10^{-5} \text{ J} = 20,0 \mu\text{J}. \quad (\text{Odpověď})$$

Je tedy $E_{\text{el},f} < E_{\text{el},i}$, asi o 72 % $E_{\text{el},i}$.

Tento závěr není v rozporu se zákonem zachování energie. Zdánlivě „chybějící“ energie byla především disipována ve vodičích (jak bude diskutováno v kap. 27) a část se vyzářila.

PŘÍKLAD 26.6

Isolovaná vodivá koule o poloměru $R = 6,85 \text{ cm}$ má náboj $Q = 1,25 \text{ nC}$.

(a) Jak velkou elektrickou energii má její elektrické pole?

ŘEŠENÍ: Z rov. (26.21) a (26.18) plyne

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \\ &= \frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{8\pi(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1})(0,0685 \text{ m})} = \\ &= 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ J} = 103 \text{ nJ}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(b) Jaká je hustota energie těsně nad povrchem koule?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (26.23) je

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2.$$

Proto musíme nejprve určit velikost intenzity E těsně nad povrchem koule, tj. pro $r \rightarrow R$ ($r > R$). Ta je podle rov. (24.15) rovna výrazu

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Hustota energie pak je

$$\begin{aligned} w_{\text{el}} &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} = \\ &= \frac{(1,25 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{32\pi^2(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})(0,0685 \text{ m})^4} = \\ &= 2,54 \cdot 10^{-5} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} = 25,4 \mu\text{J} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(c) Jaký je poloměr R_0 pomyslné kulové plochy, která by uvnitř obsahovala polovinu celkové elektrické energie nabitě koule?

ŘEŠENÍ: Při uvedeném požadavku platí

$$\int_R^{R_0} dE_{\text{el}} = \frac{1}{2} \int_R^{\infty} dE_{\text{el}}. \quad (26.25)$$

Dolní mez integrálů je R a nikoli 0, protože uvnitř vodivé koule je konstantní potenciál, tedy nulová intenzita elektrického pole, a tím i nulová elektrická energie.

Energie dE_{el} , která je v pomyslné infinitezimálně tenké kulové vrstvě mezi jejím vnitřním a vnějším poloměrem r a $r + dr$ (pro $r > R$), je

$$dE_{\text{el}} = w_{\text{el}}(4\pi r^2) dr, \quad (26.26)$$

kde w_{el} je hustota energie a výraz $4\pi r^2 dr$ je objem kulové vrstvy. Dosadíme-li rov. (26.24) do rov. (26.26) a zaměníme-li R za r v rov. (26.24), dostaneme

$$dE_{\text{el}} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2}. \quad (26.27)$$

Dosazením rov. (26.27) do rov. (26.25) dostaneme po zjednodušení

$$\int_R^{R_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2},$$

což po integraci dává

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{2R}.$$

Odtud

$$R_0 = 2R = 2(6,85 \text{ cm}) = 13,7 \text{ cm}. \quad (\text{Odpověď})$$

Polovina elektrické energie je tedy obsažena uvnitř kulové plochy, jejíž poloměr R_0 je dvojnásobkem poloměru nabitě vodivé koule.

26.6 KONDENZÁTOR S DIELEKTRIKEM

Co se však stane s kapacitou kondenzátoru, jestliže vyplníme prostor mezi jeho elektrodami *dielektrikem*, tedy izolačním (elektricky nevodivým) materiálem, např. minerálním olejem nebo plastickou hmotou? Tímto problémem se poprvé zabýval Michael Faraday v r. 1837. Faraday má hlavní zásluhu na zavedení pojmu kapacita, a proto po něm byla jednotka kapacity v SI pojmenována. Užitím jednoduchých zařízení velice podobných těm, která jsou znázorněna na obr. 26.11, zjistil, že dielektrika lze charakterizovat veličinou ϵ_r , kterou nazval dielektrická konstanta a kterou nyní nazýváme **relativní permitivita**. Relativní permitivita



Obr. 26.11 Jednoduché elektrostatické přístroje používané Faradayem. Složený přístroj (druhý zleva) se skládá z vnitřní mosazné koule a z vnější soustředné mosazné kulové vrstvy. Do prostoru mezi kouli a kulovou vrstvou vložil Faraday vrstvu dielektrika.

udává, kolikrát vzroste kapacita kondenzátoru, vyplníme-li prostor mezi jeho elektrodami zkoumaným izolátorem. (Pro vakuum plyne z definice $\epsilon_r = 1$, pro vzduch je nepatrně

vyšší.) V tab. 26.1 jsou uvedena některá dielektrika a jejich relativní permitivity.

Tabulka 26.1 Některé vlastnosti dielektrik^a

MATERIÁL	ϵ_r	$\frac{E_{\max}}{\text{kV} \cdot \text{mm}^{-1}}$
vzduch ^b	1,000 54	3
polystyren	2,6	24
papír	3,5	16
transformátorový olej	4,5	
pyrex (varné sklo)	4,7	14
slída	5,4	
porcelán	6,5	
křemík	12	
germanium	16	
ethanol	25	
voda (20 °C)	80,4	
voda (25 °C)	78,5	
titanová keramika	130	
titaničitan strontnatý	310	8

Pro vakuum je $\epsilon_r = 1$.

^a měřeno při 20 °C, není-li uvedeno jinak

^b za normálních podmínek

Jinou veličinou, která charakterizuje dielektrikum, je *průrazné napětí*. Je to při dané tloušťce dielektrika nejnižší napětí, při němž nastane elektrický průraz dielektrika. Při průrazu se vytvoří v dielektriku vodivá dráha mezi elektrodami, dielektrikum ztrácí své izolační vlastnosti, poškodí se. Každé dielektrikum má charakteristickou *dielektrickou pevnost*; ta je rovna maximální intenzitě E_{\max} elektrického pole, při níž ještě k průrazu nedojde. Několik těchto hodnot je uvedeno v tab. 26.1.

Jak jsme uvedli v souvislosti s rov. (26.18), může být kapacita každého kondenzátoru zapsána ve tvaru

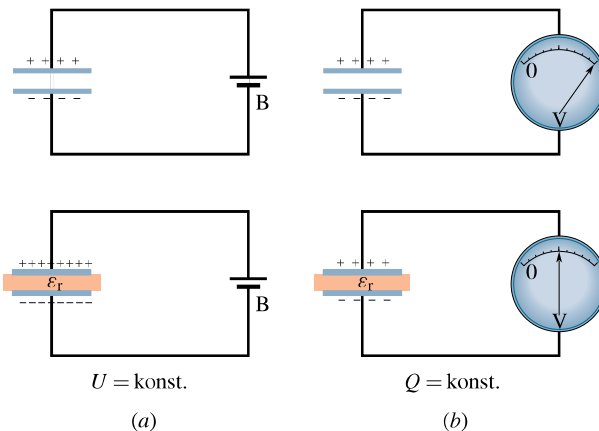
$$C = \epsilon_0 L, \quad (26.28)$$

kde L má rozměr délky. Např. v případě deskového kondenzátoru je $L = S/d$. Už Faraday zjistil, že pro kondenzátor, který má prostor mezi elektrodami *zcela* vyplněný dielektrikem, lze rov. (26.28) upravit na tvar

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 L = \epsilon_r C_0, \quad (26.29)$$

kde C_0 je kapacita kondenzátoru bez dielektrika, tj. s vakuum mezi elektrodami (anebo, pro nepříliš náročná měření, se vzduchem). Veličina $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ se nazývá (*absolutní*) **permitivita**.

Obr. 26.12 poskytuje představu o Faradayových experimentech. Podle obr. 26.12a baterie udržuje konstantní napětí U mezi elektrodami kondenzátoru. Faraday objevil,



Obr. 26.12 (a) Je-li mezi elektrodami kondenzátoru udržováno konstantní napětí (např. pomocí baterie), pak vlivem vloženého dielektrika vzroste náboj na elektrodách. (b) Jestliže na elektrodách kondenzátoru zůstává nezměněný náboj, pak dielektrikum vložené mezi elektrody způsobí pokles napětí mezi nimi. Tento pokles napětí vidíme na stupnici *elektrometru* (elektrostatického voltmetru), kterým můžeme měřit napětí, aniž jím prochází proud (tj. aniž se elektrický náboj mezi měřenými místy přesunuje). Kondenzátor se tedy nemůže přes takový elektrometr vybít.

že je-li mezi elektrody kondenzátoru vložena deska dielektrika, pak náboj Q vzroste ϵ_r -krát a baterie dodá na elektrody kondenzátoru další náboj. V situaci znázorněné na obr. 26.12b však baterie připojena není a náboj Q se tedy nezmění. Je-li nyní vložena dielektrická deska, pak napětí U mezi elektrodami kondenzátoru klesne ϵ_r -krát. Obě tato pozorování (vzhledem k platnosti vztahu $Q = CU$) potvrzují závěr, že vložení dielektrika vzroste kapacita kondenzátoru.

Porovnání rov. (26.28) a (26.29) ukazuje, že vliv dielektrika můžeme zahrnout do našich dosavadních rovnic obecněji:

V prostoru zcela vyplněném dielektrikem s relativní permitivitou ϵ_r platí i nadále všechny rovnice elektrostatiky vakua, pokud výraz ϵ_0 nahradíme výrazem $\epsilon_0 \epsilon_r$.

Bodový náboj vložený do (rozlehlého) dielektrika v něm tedy vytváří elektrické pole, jehož intenzita má velikost

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (26.30)$$

Vztah pro intenzitu elektrického pole těsně nad povrchem osamocené vodiče umístěného v dielektriku (viz rov. (24.11)) pak zní

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_r\epsilon_0}. \quad (26.31)$$

Oba tyto vztahy ukazují, že při neměnném rozložení nábojů je účinek dielektrika takový, že zmenšuje intenzitu elektrického pole v porovnání s vakuem. Mohli bychom říci, že dielektrikum vložené mezi náboje částečně odstíní jejich vzájemné silové působení.

PŘÍKLAD 26.7

Deskový kondenzátor s kapacitou $C = 13,5 \text{ pF}$ je nabit na napětí $U = 12,5 \text{ V}$. Odpojíme baterii a mezi jeho elektrody zasuneme porcelánovou desku ($\epsilon_r = 6,50$). Jaká je elektrická energie kondenzátoru před vsunutím desky a po něm?

ŘEŠENÍ: Počáteční elektrická energie je vyjádřena vztahem (26.22), tedy

$$E_{\text{el},i} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}(13,5 \cdot 10^{-12} \text{ F})(12,5 \text{ V})^2 = 1,055 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 1055 \text{ pJ}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tuto veličinu můžeme podle rov. (26.21) vyjádřit též ve tvaru

$$E_{\text{el},i} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Tento vztah je v této situaci zvláště vhodný, protože podle zadání zůstává po vložení desky konstantní Q (a nikoli U). Protože kapacita C vzroste po vložení desky ϵ_r -krát, je

$$E_{\text{el},f} = \frac{Q^2}{2\epsilon_r C} = \frac{E_{\text{el},i}}{\epsilon_r} = \frac{(1055 \text{ pJ})}{(6,50)} = 162 \text{ pJ}. \quad (\text{Odpověď})$$

Energie kondenzátoru se tedy po vsunutí desky zmenší ϵ_r -krát. Pokles energie je vyvolán tím, že se část energie spotřebovala na práci spojenou se zasunutím desky. Elektrické pole kondenzátoru vtahuje desku mezi elektrody kondenzátoru a vykoná při tom práci

$$W = E_{\text{el},i} - E_{\text{el},f} = (1055 - 162) \text{ pJ} = 893 \text{ pJ}.$$

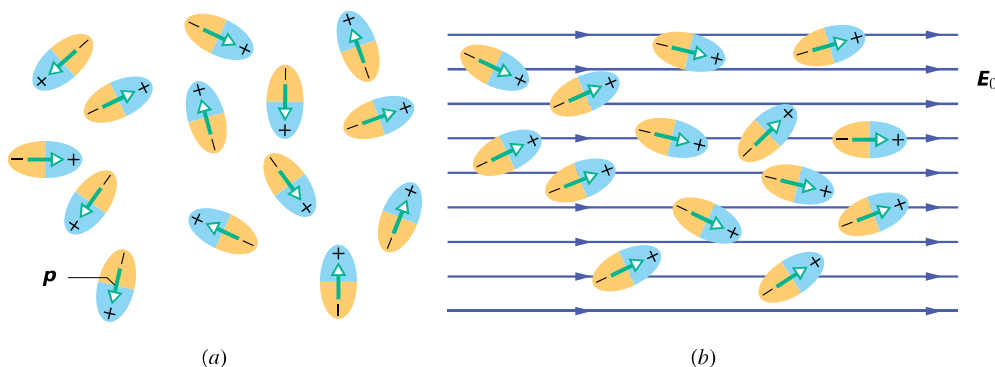
Jestliže by se např. deska mohla posouvat mezi elektrodami bez jakéhokoli odporu a bez tření, kmitala by tam a zpět, jak by byla vtahována do prostoru mezi elektrodami kondenzátoru a setrvačností vždy překmitem vystoupila druhou stranou ven. Mechanická energie kmitů 893 pJ by se zachovávala. Kinetická energie pohybující se desky by se stále měnila na energii elektrického pole a obráceně.

KONTROLA 5: Jaký důsledek bude mít vložení desky pro níže uvedené veličiny, jestliže baterie v př. 26.7 zůstane zapojena: zvětší se, zmenší, či zůstane beze změny hodnota (a) napětí na elektrodách kondenzátoru, (b) kapacity kondenzátoru, (c) náboje kondenzátoru, (d) elektrické energie kondenzátoru, (e) intenzity elektrického pole mezi elektrodami? (*Tip:* Pro odpověď (e) vezměte v úvahu, že náboj na kondenzátoru nezůstává konstantní.)

26.7 DIELEKTRIKA

Co probíhá v dielektriku z hlediska atomové a molekulové struktury, vložíme-li ho do vnějšího elektrického pole? Podle typu molekul, které ho tvoří, mohou nastat dvě situace:

1. Polární dielektrika. Molekuly některých dielektrik, např. vody, mají stálé (permanentní) elektrické dipólové momenty. V takových materiálech (zvaných *polární dielektrika*) se elektrické dipóly natáčejí do směru vnějšího elektrického pole, jak je znázorněno na obr. 26.13. Protože se však molekuly nepřetržitě navzájem srážejí v důsledku svého nahodilého tepelného pohybu, nejsou uspořádány úplně (orientace elektrických dipólů ne zcela souhlasí se směrem pole). Přitom je orientace tím úplnější, čím větší je intenzita působícího pole a čím nižší je teplota dielektrika



Obr. 26.13 (a) Molekuly se stálým elektrickým dipólovým momentem mají náhodnou orientaci elektrických dipólů, nenachází-li se dielektrikum ve vnějším elektrickém poli. (b) Nacházejí-li se molekuly v elektrickém poli, dochází k částečnému uspořádání dipólů. Neuspořádaný (tepelný) pohyb brání úplnému uspořádání.

(a tudíž i intenzita srážek molekul). Uspořádáním elektrických dipólů se vytváří elektrické pole, které má opačnou orientaci než přiložené vnější pole, a má menší intenzitu než pole vnější.

2. Nepocházející dielektrika. Nezávisle na tom, zda mají, či nemají permanentní dipólové momenty, získávají molekuly umístěné do vnějšího elektrického pole *indukované* dipólové momenty. V čl. 25.7 (obr. 25.12) jsme viděli, že se vnější pole projeví „protážením“ molekuly, oddálením středů oblastí kladného a záporného náboje v molekule. Tyto indukované momenty jsou však ve srovnání s vlastními dipólovými momenty o několik řádů menší ($\approx 10^{-35}$ C·m); atomy a molekuly se významněji deformují až ve velmi silných elektrických polích.

Na obr. 26.14a je deska z nepolárního dielektrika. Na obr. 26.14b na tuto desku působí vnější elektrické pole kondenzátoru o intenzitě \mathbf{E}_0 , s polaritou vyznačenou na obrázku. Vlivem pole \mathbf{E}_0 se trochu oddálí středy oblastí kladných a záporných nábojů v atomech (molekulách) dielektrika; to se projeví vznikem kladného povrchového náboje na jedné straně desky a záporného na straně opačné. Desku tak můžeme považovat za velký makroskopický dipól. Deska jako celek však zůstává elektricky neutrální, neboť uvnitř desky nepřevládá náboj ani kladného, ani záporného znaménka ve kterémkoli objemovém elementu obsahujícím dostatečný počet molekul.

Z obr. 26.14c vidíme, že indukovaný povrchový náboj na čelních plochách desky vytváří elektrické pole \mathbf{E}' , které je orientováno opačně než přiložené vnější pole \mathbf{E}_0 . Výsledné pole \mathbf{E} uvnitř dielektrika ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$) má směr pole \mathbf{E}_0 , ale je slabší (má menší velikost intenzity než vnější pole, $E < E_0$).

Jak pole \mathbf{E}' vytvořené povrchovými náboji, tak i pole tvořené permanentními elektrickými dipóly na obr. 26.13 mají to společné, že jsou orientována proti poli \mathbf{E}_0 . Jak polární, tak i nepolární dielektrika po vložení do vnějšího elek-

trického pole, které dielektrikem proniká, toto pole v sobě zeslabují.

Nyní je zřejmé, proč je porcelánová deska v př. 26.7 vtahována do prostoru mezi elektrodami kondenzátoru; nachází-li se deska (alespoň částečně) v prostoru mezi elektrodami, indukují se na jejích stěnách přilehlých k elektrodám náboje opačných znamének, než mají náboje na těchto přilehlých elektrodách kondenzátoru. V důsledku přitažlivých sil mezi náboji na elektrodách a náboji indukovanými na desce vzniká síla, která vtahuje desku do prostoru mezi elektrodami.

26.8 DIELEKTRIKA A GAUSSŮV ZÁKON ELEKTROSTATIKY

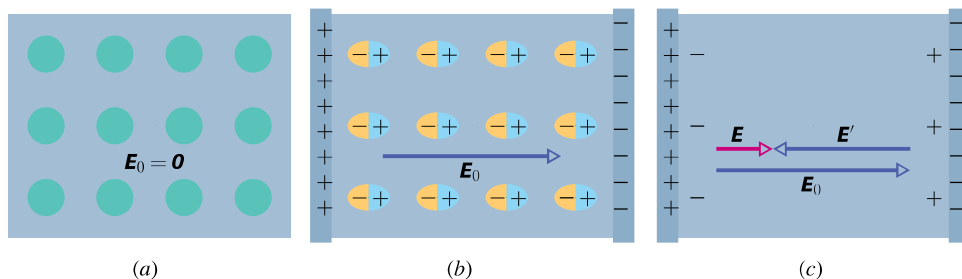
Při našem výkladu o Gaussově zákonu elektrostatiky v kapitole 24 jsme uvažovali náboje ve vakuu. Nyní budeme sledovat, jak se změní a zobecní tento zákon v dielektrickém prostředí, např. v některém z dielektrik uvedených v tab. 26.1. Obr. 26.15 znázorňuje deskový kondenzátor s elektrodami o ploše S . Předpokládejme, že volný náboj Q na elektrodách kondenzátoru je stejný jak v případě s vloženým dielektrikem, tak i bez něj. Připomeňme, že pole mezi elektrodami indukuje vázané náboje na čelních plochách dielektrika jedním z procesů popsaných v čl. 26.7.

V případě kondenzátoru bez dielektrika (obr. 26.15a) můžeme stanovit elektrické pole \mathbf{E}_0 mezi elektrodami tak, jak to bylo vysvětleno u obr. 26.5: obklopíme náboj $+Q$ na horní elektrodě Gaussovou plochou a použijeme Gaussov zákon elektrostatiky. Je-li E_0 velikost intenzity elektrického pole, můžeme psát

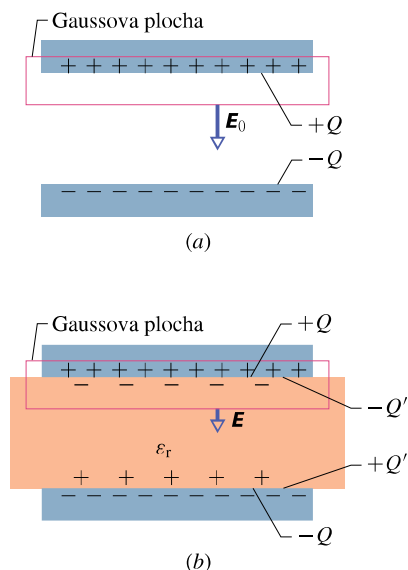
$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_0 S = Q \quad (26.32)$$

a odtud

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}. \quad (26.33)$$



Obr. 26.14 (a) Dielektrická deska. Kroužky znázorňují elektricky neutrální atomy uvnitř desky. (b) Elektrické pole je vytvořeno nabitými elektrodami kondenzátoru; pole mírně „protáhne atomy“, oddělí od sebe středy oblastí kladných a záporných nábojů. (c) Uvedené oddělení vede ke vzniku povrchových nábojů na čelech desky. Tyto náboje vytvářejí pole o intenzitě \mathbf{E}' orientované opačně než vnější pole o intenzitě \mathbf{E}_0 . Intenzita výsledného pole uvnitř dielektrika $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$ má směr pole \mathbf{E}_0 avšak menší velikost.



Obr. 26.15 Deskový kondenzátor (a) bez dielektrika, (b) s vloženou deskou dielektrika. O náboji Q na elektrodách se předpokládá, že je stejný v obou případech.

Pro případ podle obr. 26.15b, tedy za přítomnosti dielektrika, můžeme určit elektrické pole mezi elektrodami (tedy uvnitř dielektrika) pomocí téže Gaussovy plochy. Uvnitř uzavřené Gaussovy plochy jsou však nyní náboje dvojího druhu; je to jednak volný náboj $+Q$ na horní elektrodě, jednak indukovaný náboj $-Q'$ na horní ploše dielektrika. Náboj na vodivé elektrodě je *volný náboj*, protože se může pohybovat, jestliže změníme elektrický potenciál elektrody. Indukovaný náboj na povrchu dielektrika není volný, protože nemůže být z této plochy odveden.

Celkový náboj uvnitř Gaussovy plochy je tedy $Q - Q'$ (obr. 26.15b). Proto podle Gaussova zákona elektrostatiky platí

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 E S = Q - Q' \quad (26.34)$$

a odtud

$$E = \frac{Q - Q'}{\varepsilon_0 S}. \quad (26.35)$$

Z předchozích výkladů víme, že vložené dielektrikum zmenšuje intenzitu E_0 původního pole ε_r -krát. Proto platí

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}. \quad (26.36)$$

Porovnání rov. (26.35) a (26.36) dává

$$Q - Q' = \frac{Q}{\varepsilon_r}. \quad (26.37)$$

Rov. (26.37) ukazuje, že velikost indukovaného povrchového náboje Q' je menší než velikost volného náboje Q

a je rovna nule za nepřítomnosti dielektrika, tj. je-li v rov. (26.37) bráno $\varepsilon_r = 1$.

Po dosažení za $Q - Q'$ z rov. (26.37) do (26.34) můžeme zapsat Gaussův zákon elektrostatiky ve tvaru

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \quad (\text{Gaussův zákon elektrostatiky pro dielektrikum}). \quad (26.38)$$

Tuto významnou rovnici jsme sice odvodili pro elektrické pole deskového kondenzátoru, ale platí obecně a je nejobecnějším tvarem Gaussova zákona elektrostatiky. Doplňme k tomu následující:

1. Plošný integrál v rov. (26.38) nevyjadřuje tok vektoru \mathbf{E} , nýbrž tok vektoru $\varepsilon_r \mathbf{E}$. Vektor $\varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}$ se nazývá **elektrická indukce \mathbf{D}** a rov. (26.38) pak může být zapsána v jednodušším tvaru $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$.

2. Náboj Q , který je uvnitř Gaussovy plochy, je *pouze volný náboj*. Indukovaný (vázaný) povrchový náboj není na pravé straně rov. (26.38) záměrně explicitně vyjádřen; jeho vliv na elektrické pole je započten zavedením relativní permitivity na levé straně rov. (26.38).

3. Rov. (26.38) se liší od rov. (24.7) tím, že obsahuje výraz $\varepsilon_r \varepsilon_0$ namísto ε_0 . Výraz ε_r zahrnujeme do integrandu, čímž se umožní postihnout i takové případy, ve kterých ε_r není konstantní na Gaussově ploše, protože je funkcí souřadnic: $\varepsilon_r = \varepsilon_r(x, y, z)$.

PŘÍKLAD 26.8

Obr. 26.16 znázorňuje deskový kondenzátor s elektrodami o obsahu S , které jsou ve vzdálenosti d . Na elektrodách je napětí U_0 . Po nabití kondenzátoru byla baterie odpojena a mezi elektrody byla vsunuta deska z dielektrika tloušťky b o relativní permitivitě ε_r tak, jak je znázorněno na obr. 26.16. Uvažujme hodnoty $S = 115 \text{ cm}^2$, $d = 1,24 \text{ cm}$, $U_0 = 85,5 \text{ V}$, $b = 0,780 \text{ cm}$, $\varepsilon_r = 2,61$.

(a) Jaká byla kapacita C_0 kondenzátoru před vložením dielektrika?

ŘEŠENÍ: Z rov. (26.9) dostáváme

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1})(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)}{(1,24 \cdot 10^{-2} \text{ m})} = 8,21 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 8,21 \text{ pF}. \quad (\text{Odpověď})$$

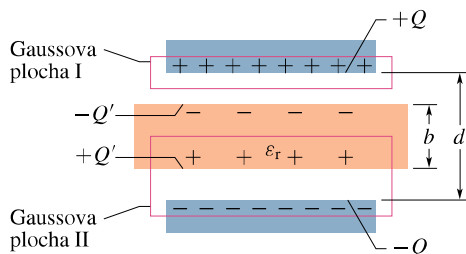
(b) Jak velký je volný náboj kondenzátoru?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (26.1) je

$$Q = C_0 U_0 = (8,21 \cdot 10^{-12} \text{ F})(85,5 \text{ V}) = 7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C} = 702 \text{ pC}. \quad (\text{Odpověď})$$

Protože baterie byla před vložením dielektrické desky odpojona, zůstává volný náboj nezměněn i po vložení této desky.

(c) Jaká je intenzita E_0 v mezeře mezi elektrodami a dielektrickou deskou?



Obr. 26.16 Příklad 26.8. Mezi elektrodami deskového kondenzátoru je deska dielektrika, která jen částečně vyplňuje prostor mezi elektrodami.

ŘEŠENÍ: Použijme Gaussova zákona elektrostatiky ve tvaru (26.38) s Gaussovou plochou I podle obr. 26.16. Tato Gaussova plocha obklopuje pouze volný náboj na horní elektrodě kondenzátoru. Skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ je nenulový jen v mezeře a v ní jsou tyto vektory souhlasně orientované směrem dolů. Proto

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0(1)E_0S = Q$$

a odtud

$$E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{(7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C})}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1})(115 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)} = 6900 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} = 6,90 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Poznamenejme, že v této rovnici bereme $\varepsilon_r = 1$, protože ta část Gaussovy plochy, přes kterou integrujeme a kterou prochází nenulový tok vektoru intenzity, nevede dielektrikem. Poznamenejme ještě, že hodnota E_0 se vložním desky nemění, protože se nemění velikost volného náboje uvnitř Gaussovy plochy I.

(d) Jaká je velikost intenzity elektrického pole E_1 v dielektriku?

ŘEŠENÍ: Použijme rov. (26.38) při volbě Gaussovy plochy II podle obr. 26.16. Uvnitř plochy je volný náboj $-Q$ a indukovaný náboj $+Q'$; při použití rov. (26.38) uvažujeme jen volný náboj $-Q$. Skalární součin $\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}$ je nenulový jen v prostoru mezi elektrodami a zároveň jsou v tomto prostoru tyto vektory opačně orientované. Proto

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S} = -\varepsilon_0 \varepsilon_r E_1 S = -Q. \quad (26.39)$$

(První záporné znaménko zleva plyne ze skalárního součinu $\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}$, protože vektor \mathbf{E}_1 směřuje dolů a vektor $d\mathbf{S}$ směřuje

vzhůru — vektory jsou opačně orientovány.) Rov. (26.39) dává

$$E_1 = \frac{Q}{\varepsilon_r \varepsilon_0 S} = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{(6,90 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1})}{(2,61)} = 2,64 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(e) Jaké je napětí U mezi elektrodami po vsunutí desky dielektrika?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z rov. (26.6), přičemž budeme integrovat podél přímé integrační cesty kolmé k oběma elektrodám. Uvnitř dielektrika je délka integrační cesty b a intenzita elektrického pole je zde E_1 . Uvnitř obou štěrbin nad a pod dielektrikem má integrační cesta délku $d - b$ a intenzita elektrického pole je zde E_0 . Rov. (26.6) pak dává

$$U = \int_{(+)}^{(-)} E ds = E_0(d - b) + E_1 b = (6900 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})(0,0124 \text{ m} - 0,00780 \text{ m}) + (2640 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1})(0,00780 \text{ m}) = 52,3 \text{ V}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota se liší od původního napětí, které bylo 85,5 V.

(f) Jaká je kapacita kondenzátoru s vloženým dielektrikem?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (26.1) je

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{(7,02 \cdot 10^{-10} \text{ C})}{(52,3 \text{ V})} = 1,34 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 13,4 \text{ pF}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota je větší než původní hodnota $C_0 = 8,21 \text{ pF}$.

KONTROLA 6: Nechme v př. 26.8 tloušťku b desky dielektrika vzrůstat. Budou se v důsledku toho následující veličiny zvětšovat, zmenšovat, či zůstanou beze změny? (a) Intenzita elektrického pole E_1 , (b) napětí mezi elektrodami, (c) kapacita kondenzátoru.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Kondenzátor, kapacita

Kondenzátor se skládá ze dvou vzájemně elektricky oddělených vodičů (elektrod), které v případě, že je kondenzátor nabit, mají stejně velké náboje opačných znamének $+Q$ a $-Q$. Jeho kapacita je definována vztahem

$$C = \frac{Q}{U}, \quad (26.2)$$

kde U je napětí mezi elektrodami. Jednotka kapacity v SI je farad ($1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1}$).

Určení kapacity

Obecně můžeme určit kapacitu každého kondenzátoru tak, že: (1) vyjádříme náboj Q kondenzátoru, (2) určíme intenzitu \mathbf{E} elektrického pole vytvořeného náboji na elektrodách kondenzátoru, (3) určíme napětí U na kondenzátoru, (4) vypočteme C podle vztahu (26.2).

Kapacity některých typů kondenzátorů:

Deskový kondenzátor je tvořen rovinnými rovnoběžnými elektrodami. Je-li vzdálenost elektrod d a má-li každá elektroda plochu o obsahu S , je kapacita deskového kondenzátoru

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (26.9)$$

Válcový kondenzátor je tvořen dvěma elektrodami tvaru sousedních válcových ploch délky L , z nichž vnitřní má poloměr a a vnější b . (Předpokládáme $b > a$, $L \gg b$.) Kapacita válcového kondenzátoru je

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}. \quad (26.14)$$

Kulový kondenzátor je tvořen dvěma elektrodami ve tvaru soustředných kulových ploch, z nichž vnitřní má poloměr a a vnější b ($b > a$). Kapacita kulového kondenzátoru je

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}. \quad (26.17)$$

Jestliže v rov. (26.17) $b \rightarrow \infty$ a současně položíme $a = R$, obdržíme vztah pro kapacitu osamocené vodivé koule poloměru R :

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R. \quad (26.18)$$

Paralelně a sériově spojené kondenzátory

Výsledná kapacita C_p , resp. C_s paralelního, resp. sériového spojení kondenzátorů je

$$C_p = \sum_{j=1}^n C_j \quad (n \text{ kondenzátorů spojených paralelně}), \quad (26.19)$$

resp.

$$\frac{1}{C_s} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (n \text{ kondenzátorů spojených sériově}). \quad (26.20)$$

Tyto vzorce můžeme použít i k výpočtu kapacit komplikovanějších sériově-paralelních spojení.

Elektrická energie a hustota energie elektrického pole

Elektrická energie E_{el} nabitého kondenzátoru je

$$E_{el} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2. \quad (26.21, 26.22)$$

Je rovna práci potřebné k nabití kondenzátoru. Tato energie je uložena v elektrickém poli kondenzátoru. *Hustota energie* w_{el} elektrického pole je vyjádřena vztahem

$$w_{el} = \frac{E_{el}}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \quad (26.23)$$

kde V je objem oblasti, v níž je elektrické pole o intenzitě \mathbf{E} .

Kapacita kondenzátoru s dielektrikem

Jestliže je prostor mezi elektrodami kondenzátoru zcela vyplněn dielektrikem, zvětší se jeho kapacita ε_r -krát, kde ε_r je *relativní permitivita* charakterizující materiál (dielektrikum). V prostoru zcela vyplněném dielektrikem musíme ve všech rovnicích elektrostatiky nahradit veličinu ε_0 výrazem $\varepsilon_r \varepsilon_0$.

Procesům probíhajícím v dielektriku nacházejícím se ve vnějším elektrickém poli můžeme fyzikálně porozumět na základě výkladu o působení elektrického pole na permanentní nebo na indukovaný elektrický dipól v dielektriku. Jako výsledek tohoto působení se objeví indukované náboje na povrchu dielektrika, což vede k tomu, že intenzita výsledného elektrického pole v dielektriku je menší než intenzita vnějšího elektrického pole.

Gaussův zákon elektrostatiky v dielektriku

Za přítomnosti dielektrika má *Gaussův zákon elektrostatiky* tvar

$$\varepsilon_0 \oint \varepsilon_r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q, \quad (26.38)$$

resp.

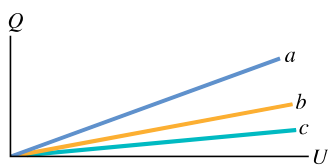
$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

kde \mathbf{D} je elektrická indukce a Q je volný náboj uvnitř Gaussovy plochy. Vliv indukovaného povrchového náboje je vyjádřen relativní permitivitou ε_r , která je zahrnuta do integrálu v rov. (26.38).

OTÁZKY

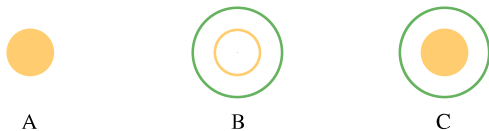
1. Grafy na obr. 26.17 vyjadřují závislost náboje na napětí u tří deskových kondenzátorů. Velikosti ploch elektrod a jejich vzdáleností jsou uvedeny v tabulce. Ke každému grafu z obr. 26.17 přiřaďte odpovídající kondenzátor podle tabulky.

KONDENZÁTOR	PLOCHA	VZDÁLENOST
1	S	d
2	$2S$	d
3	S	$2d$



Obr. 26.17 Otázka 1

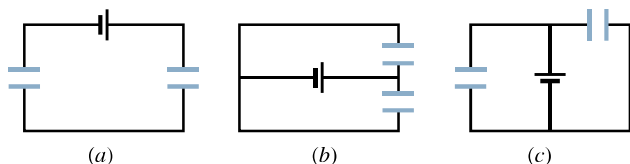
2. Obr. 26.18 ukazuje příčný řez osamocenou plnou kovovou koulí A o poloměru R a dvěma kulovými kondenzátory B a C s vnitřními poloměry R a vnějšími poloměry $2R$. Vnitřní kulová elektroda kondenzátoru B je kulová plocha, zatímco vnitřní kulová elektroda kondenzátoru C je plná koule. Seřaďte objekty A, B a C sestupně podle velikosti jejich kapacit.



Obr. 26.18 Otázka 2

3. Rozhodněte, zda kapacita deskového kondenzátoru vzroste, klesne, nebo se nezmění, když mezi elektrody kondenzátoru vsuneme plochou velmi tenkou hliníkovou fólií tak, že (a) fólie je vodivě spojena s jednou elektrodou, (b) fólie je od elektrod izolována. (Tip: V části (b) uvažujte výslednou kapacitu.)

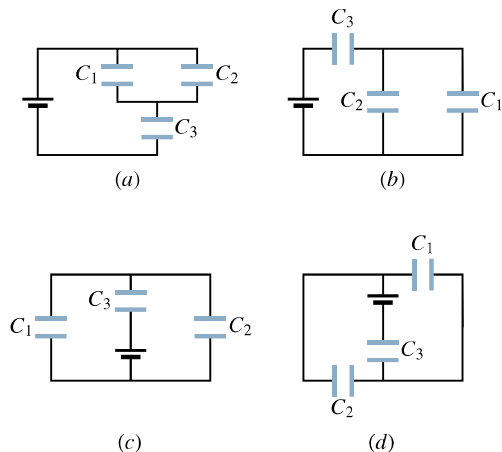
4. Jsou v elektrických obvodech znázorněných na obr. 26.19, kondenzátory spojeny sériově, paralelně, nebo jiným způsobem?



Obr. 26.19 Otázka 4

5. Dva kondenzátory jsou připojeny k baterii: (a) Při kterém spojení kondenzátorů (paralelním, nebo sériovém) je napětí na obou kondenzátorech stejné a rovno napětí na ekvivalentním kondenzátoru? (b) Při které kombinaci kondenzátorů je náboj na obou kondenzátorech stejný a roven náboji na jejich ekvivalentním kondenzátoru?

6. (a) Jsou kondenzátory C_1 a C_3 na obr. 26.20a spojeny do série? (b) Jsou kondenzátory C_1 a C_2 na tomtéž obrázku spojeny paralelně? (c) Čtyři elektrické obvody na obr. 26.20 seřaďte sestupně podle velikosti výsledné kapacity.



Obr. 26.20 Otázka 6

7. Vypočítejte výslednou kapacitu tří kondenzátorů o stejných kapacitách C , jsou-li spojeny (a) sériově, (b) paralelně. (c) Při kterém spojení těchto kondenzátorů bude na jejich ekvivalentním kondenzátoru větší náboj?

8. Kondenzátory o kapacitách C_1 a C_2 ($C_1 > C_2$) jsou připojeny k baterii, nejprve jednotlivě, potom sériově a nakonec paralelně. Seřaďte tato spojení sestupně podle velikosti náboje na nich uloženého.

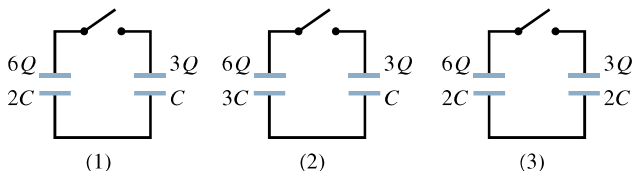
9. (a) Je v př. 26.3 napětí na kondenzátoru C_2 ve srovnání s napětím na kondenzátoru C_1 větší, menší, nebo je stejné? (b) Je náboj kondenzátoru C_2 ve srovnání s nábojem kondenzátoru C_1 větší, menší, nebo stejný?

10. K baterii byl nejprve připojen kondenzátor C_1 , potom byl k němu paralelně připojen kondenzátor C_2 . (a) Je napětí na kondenzátoru C_1 po této změně větší, menší, či stejně velké? (b) Je náboj Q_1 na kondenzátoru C_1 po této změně větší, menší, či zůstal stejně velký? (c) Je kapacita C_{12} paralelně spojených kondenzátorů C_1 a C_2 větší, menší, či stejně velká ve srovnání s kapacitou C_1 ? (d) Je celkový náboj akumulovaný kondenzátory C_1 a C_2 větší, menší, či stejně velký ve srovnání s nábojem, který měl kondenzátor C_1 před připojením kondenzátoru C_2 ?

11. Řešte otázku 10 pro případ, že kondenzátor C_2 byl připojen ke kondenzátoru C_1 sériově.

12. V př. 26.4 zvětšíme kapacitu C_2 . Zjistěte, co se stane s níže uvedenými veličinami: zvětší se, zmenší se, či zůstanou beze změny? (a) Výsledné napětí na každém z kondenzátorů, (b) část celkového náboje Q uložená na kondenzátoru C_1 , (c) část celkového náboje Q uložená na kondenzátoru C_2 .

13. Na obr. 26.21 jsou tři obvody, z nichž každý obsahuje spínač a dva kondenzátory, které jsou na počátku nabitě tak, jak je znázorněno. Ve kterém z těchto obvodů náboj na levém kondenzátoru po sepnutí spínače (a) vzroste, (b) klesne, (c) zůstane beze změny?



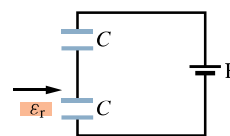
Obr. 26.21 Otázka 13

14. Dvě osamocené kovové koule A a B mají poloměry R a $2R$ a jsou nabitě stejně velkými náboji. Porovnejte velikosti následujících veličin: (a) kapacity koulí, (b) objemové hustoty energie v blízkosti povrchů vně koulí, (c) hustoty energie ve vzdálenosti

$3R$ od středu koulí, (d) celkové energie elektrických polí vytvořených nabitými koulemi.

15. Olejový deskový kondenzátor má mít kapacitu C a má být bezpečně funkční až do napětí U_m . Nebyl však navržen dobře a občas dochází k průrazu. Jak máme návrh změnit, aby s tímž olejem byl plně funkční při stejných hodnotách U_m a C ?

16. Deska dielektrika je vsunuta mezi elektrody jednoho ze dvou stejných kondenzátorů (obr. 26.22). Rozhodněte, zda se hodnoty níže uvedených veličin tohoto kondenzátoru zvětší, zmenší, či zda se nezmění: (a) kapacity, (b) náboje, (c) napětí, (d) elektrické energie. (e) Jak budou znít odpovědi na tytéž otázky pro druhý kondenzátor?



Obr. 26.22 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 26.2 Kapacita

1C. Elektrometr je zařízení na měření statického náboje. Je to vlastně kondenzátor, na jehož elektrody přeneseme náboj neznámé velikosti a přečteme napětí. Jakou minimální hodnotu náboje můžeme změřit elektrometrem o kapacitě 50 pF a napěťové citlivosti $0,15 \text{ V}$?

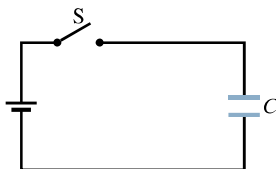
2C. Kovová pilka a klíč (obr. 26.23) nesou náboje $+70 \text{ pC}$



Obr. 26.23 Cvičení 2

a -70 pC , které mezi nimi vyvolávají napětí 20 V . (a) Jaká je kapacita systému těchto dvou předmětů? (b) Co se stane s kapacitou systému, změní-li se hodnoty nábojů na $+200 \text{ pC}$ a -200 pC ? (c) Jak se změní napětí?

3C. Kondenzátor na obr. 26.24 má kapacitu $25 \text{ }\mu\text{F}$ a je nenabitý.



Obr. 26.24 Cvičení 3

Baterie poskytuje napětí 120 V . Jak velký elektrický náboj projde spínačem S po jeho zapnutí?

ODST. 26.3 Výpočet kapacity

4C. Vyjádříme-li ϵ_0 z rov. (26.9), zjistíme, že v mezinárodní soustavě jednotek (SI) je jednotkou této veličiny $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$. Dokaž-

te, že tato jednotka je ekvivalentní jednotce, kterou jsme pro ϵ_0 uvedli dříve, tj. jednotce $\text{C}^2\cdot\text{N}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$.

5C. Deskový kondenzátor má elektrody kruhového tvaru o poloměru $8,2 \text{ cm}$ vzdálené od sebe $1,3 \text{ mm}$. (a) Vypočítejte jeho kapacitu. (b) Jak velký náboj se objeví na elektrodách, když na kondenzátor vložíme napětí 120 V ?

6C. Máme k dispozici dvě ploché kovové desky, každá má obsah $1,00 \text{ m}^2$. Máme z nich zkonstruovat deskový kondenzátor. V jaké vzdálenosti by se musely nacházet jeho elektrody, měla-li být kapacita kondenzátoru $1,00 \text{ F}$? Můžeme takový kondenzátor skutečně zkonstruovat?

7C. Elektrody kulového kondenzátoru mají poloměry $38,0 \text{ mm}$ a $40,0 \text{ mm}$. (a) Vypočítejte jeho kapacitu. (b) Jak velký obsah by musely mít elektrody deskového kondenzátoru se stejnou vzdáleností elektrod, aby měl stejnou kapacitu jako tento kulový kondenzátor?

8C. Chlapec přešel po koberci za suchého počasí a rukou se přiblížil ke kovové klice dveří. Mezi jeho rukou a klikou přeskočila 5 mm dlouhá elektrická jiskra. Tak velká jiskra signalizuje, že mezi jeho tělem a klikou musí být napětí okolo 15 kV . Jak velký náboj se nahromadil na jeho těle chůzí po koberci, když napětí mezi tělem a kobercem dosáhlo uvedeného hodnoty? V úvaze zhruba nahraďte chlapečovo tělo rovnoměrně nabitou vodivou koulí o poloměru 25 cm , elektricky izolovanou od okolí.

9C. Dva stejně velké archy hliníkové fólie jsme umístili rovnoběžně $1,0 \text{ mm}$ od sebe. Takto vzniklý kondenzátor o kapacitě 10 pF byl nabit na napětí 12 V . (a) Vypočítejte obsah každého archu. Poté jsme archy přiblížili na vzdálenost $0,10 \text{ mm}$ při nezměněném náboji. (b) Jaká je nová hodnota kapacity? (c) Jak se změnilo napětí? Vysvětlete, jak na základě těchto změn by mohl být konstruován mikrofón.

10C. Kulová kapka rtuti o poloměru R má kapacitu $C = 4\pi\epsilon_0 R$. Dvě takové kapky spojíme do jedné. Jaká bude její kapacita?

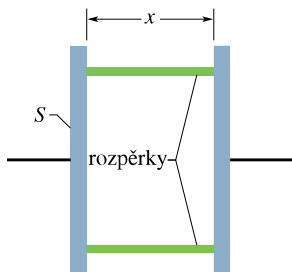
11Ú. Použijte přibližného vztahu $\ln(1+x) \doteq x$ pro $x \ll 1$ (viz dodatek E), a dokažte, že vzorec pro výpočet kapacity válcového kondenzátoru přejde ve vzorec pro výpočet kapacity deskového kondenzátoru, když je vzdálenost mezi elektrodami velmi malá.

12Ú. Předpokládejte, že elektrody kulového kondenzátoru mají přibližně stejné poloměry a, b , kde $a < b$. Za této podmínky se kapacita kulového kondenzátoru blíží kapacitě deskového kondenzátoru se vzdáleností elektrod $d = b - a$. Dokažte, že v takovém případě rov. (26.17) v limitě získá tvar rov. (26.9).

13Ú. Kondenzátor má být zkonstruován tak, aby pracoval s konstantní kapacitou v prostředí s kolísavou teplotou. Na obr. 26.25 je znázorněn kondenzátor deskového typu s dielektrickými rozpěrnými vložkami, které mají udržet elektrody navzájem rovnoběžné. (a) Dokažte, že poměr změny kapacity C a změny teploty T je dán vztahem:

$$\frac{dC}{dT} = C \left(\frac{1}{S} \frac{dS}{dT} - \frac{1}{x} \frac{dx}{dT} \right),$$

kde S je plocha jedné elektrody a x je vzdálenost elektrod. (b) Kdyby byly elektrody hliníkové, jakou hodnotu by měl součinitel teplotní délkové roztažnosti rozpěrek, aby bylo zaručeno, že se kapacita kondenzátoru nebude měnit s teplotou? (Zanedbejte vliv rozpěrek na permitivitu prostředí mezi elektrodami.)

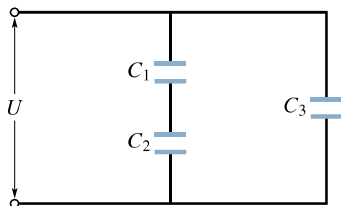


Obr. 26.25 Úloha 13

ODST. 26.4 Kondenzátory spojené paralelně a sériově

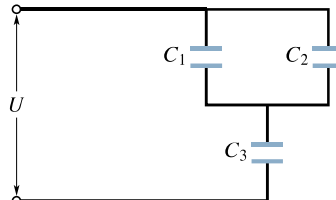
14C. Kolik kondenzátorů o kapacitě $1,00\ \mu\text{F}$ musí být spojeno paralelně, aby celkový náboj na nich byl $1,00\ \text{C}$? Napětí vložené na každý kondenzátor je $110\ \text{V}$.

15C. Vypočítejte výslednou kapacitu bloku tří kondenzátorů spojených podle obr. 26.26. Jejich kapacity mají hodnoty $C_1 = 10,0\ \mu\text{F}$, $C_2 = 5,00\ \mu\text{F}$ a $C_3 = 4,00\ \mu\text{F}$.



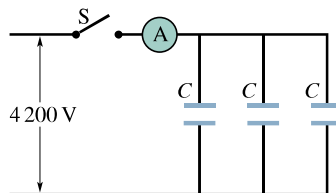
Obr. 26.26 Cvičení 15 a úloha 47

16C. Určete výslednou kapacitu bloku kondenzátorů na obrázku 26.27. Jejich kapacity jsou: $C_1 = 10,0\ \mu\text{F}$, $C_2 = 5,00\ \mu\text{F}$ a $C_3 = 4,00\ \mu\text{F}$.



Obr. 26.27 Cvičení 16, úlohy 24 a 45

17C. Každý ze tří nenabitých kondenzátorů na obr. 26.28 má kapacitu $25,0\ \mu\text{F}$. Po zapnutí spínače se na kondenzátorech ustálí napětí $4\ 200\ \text{V}$. Jak velký elektrický náboj (v coulombech) prošel ampérmetrem?

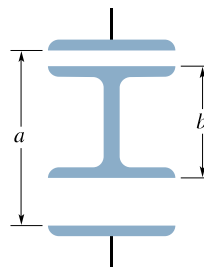


Obr. 26.28 Cvičení 17

18C. Kondenzátor o kapacitě $C_1 = 6,00\ \mu\text{F}$ je spojen do série s kondenzátorem o kapacitě $C_2 = 4,00\ \mu\text{F}$. Vstupní svorky této sestavy kondenzátorů byly připojeny ke zdroji napětí $200\ \text{V}$. (a) Vypočítejte výslednou kapacitu této sestavy. (b) Jak velký náboj je na každém kondenzátoru? (c) Jaké je napětí na každém kondenzátoru?

19C. Zopakujte cvič. 18 se stejnou dvojicí kondenzátorů spojených paralelně.

20Ú. Na obr. 26.29 jsou dva kondenzátory spojené do série.



Obr. 26.29 Úloha 20

Střední část této sestavy kondenzátorů má délku b a je svise pohyblivá. Dokažte, že výsledná kapacita této sestavy je nezávislá na poloze střední části a má velikost $C = \epsilon_0 S / (a - b)$.

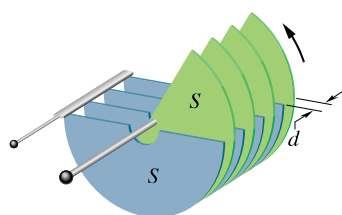
21Ú. (a) Tři stejné kondenzátory jsou spojeny paralelně. Elektrody každého z nich jsou ve vzdálenosti d a mají obsah S . Jakou vzdálenost by musely mít elektrody jednoho kondenzátoru, aby kapacita tohoto jediného kondenzátoru byla rovna kapacitě paralelní kombinace všech tří kondenzátorů? (b) Jakou vzdálenost

elektrod by musel mít jediný kondenzátor, aby se jeho kapacita rovnala kapacitě sériového spojení všech tří kondenzátorů?

22Ú. (a) Dva kondenzátory o kapacitách $C_1 = 2,0 \mu\text{F}$ a $C_2 = 8,0 \mu\text{F}$ jsou spojeni do série a připojeni ke zdroji napětí 300 V. Jaký náboj a jaké napětí je na každém z nich? (b) Nabité kondenzátory byly rozpojeny a odpojeny od zdroje napětí. Poté byly opět spolu spojeny: kladná elektroda jednoho s kladnou elektrodou druhého kondenzátoru a záporná elektroda jednoho se zápornou elektrodou druhého. Jaký náboj a jaké napětí je na každém kondenzátoru nyní? (c) Předpokládejte, že nabité kondenzátory v části (a) této úlohy byly spolu spojeny v uzavřený okruh tak, že spolu byly spojeny elektrody s opačnými znaménky nábojů. Jaký náboj a jaké napětí bude na každém kondenzátoru po ustálení stavu?

23Ú. Na obr. 26.30 vidíme otočný vzduchový kondenzátor, typ používaný k ručnímu ladění rozhlasových přijímačů. Jsou v něm navzájem propojeny jednak všechny sudé elektrody, jednak všechny liché elektrody. Sudé elektrody jsou pevné, liché se mohou otáčet. Uvažujte blok n elektrod střídavé polarizace. Každá elektroda má obsah S a mezi sousedními elektrodami je vzduchová mezera šířky d . Dokažte, že maximální kapacita tohoto kondenzátoru je

$$C = \frac{(n-1)\varepsilon_0 S}{d}$$



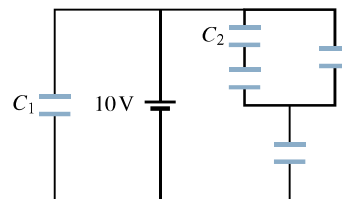
Obr. 26.30 Úloha 23

24Ú. V kondenzátoru C_3 (obr. 26.27) došlo k elektrickému průrazu a kondenzátor se stal pro elektrický proud průchodným. Jaké změny (a) náboje a (b) napětí následovaly na kondenzátoru C_1 ? Předpokládejte, že napětí na svorkách uvedené sestavy kondenzátorů je $U = 100 \text{ V}$.

25Ú. Je dáno několik kondenzátorů o kapacitách $2,0 \mu\text{F}$. Kondenzátory vydrží napětí maximálně 200 V bez elektrického průrazu. Jak byste z těchto kondenzátorů vytvořili sestavu kondenzátorů o výsledné kapacitě (a) $0,40 \mu\text{F}$, (b) $1,2 \mu\text{F}$, má-li být přitom každá z těchto sestav schopna vydržet napětí až do 1 000 V včetně?

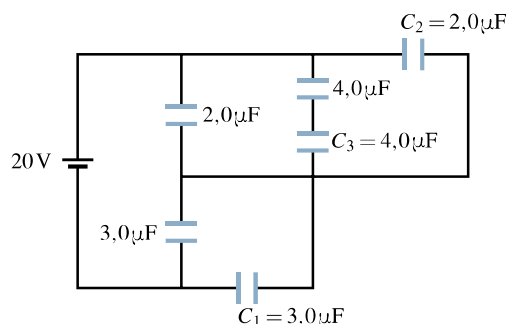
26Ú. Sestava na obr. 26.31 je připojena na napětí 10 V a každý z pěti kondenzátorů má kapacitu $10 \mu\text{F}$. Jaký náboj je na (a) kondenzátoru C_1 a (b) na kondenzátoru C_2 ?

27Ú. Kondenzátor o kapacitě 100 pF je nabit na napětí 50 V a poté odpojen od nabíjecí baterie. Nabitý kondenzátor je paralelně připojen k jinému, nenabitému kondenzátoru. Vypočítejte kapacitu připojeného, původně nenabitého kondenzátoru, jestliže napětí na spojených kondenzátorech kleslo z původních 50 V na 35 V.



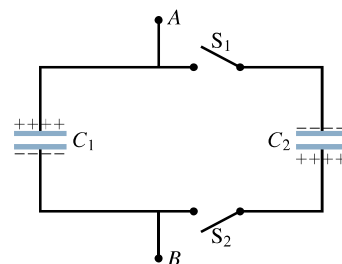
Obr. 26.31 Úloha 26

28Ú. Napětí baterie na obr. 26.32 má hodnotu 20 V. (a) Stanovte výslednou kapacitu sestavy kondenzátorů spojených podle obr. 26.32. (b) Vypočítejte náboj odpovídající této výsledné kapacitě. Určete napětí a náboj na kondenzátoru (c) C_1 , (d) C_2 , (e) C_3 .



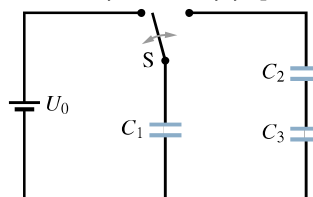
Obr. 26.32 Úloha 28

29Ú. Kondenzátory na obr. 26.33 o kapacitách $C_1 = 1,0 \mu\text{F}$ a $C_2 = 3,0 \mu\text{F}$ jsou nabity každý na napětí 100 V, avšak s opačnou polaritou elektrod. (a) Jaké napětí bude mezi body A a B po zapnutí spínačů S_1 a S_2 ? Jak velký náboj bude na kondenzátoru (b) C_1 , (c) C_2 ?



Obr. 26.33 Úloha 29

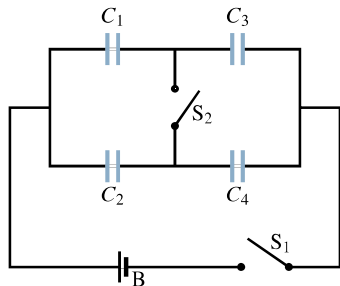
30Ú. Přepínač S na obr. 26.34 byl přepnut do levé polohy. Kondenzátor C_1 se nabil a napětí na jeho elektrodách dosáhlo hodnoty U_0 . Kondenzátory C_2 a C_3 byly zpočátku nenabité. Poté



Obr. 26.34 Úloha 30

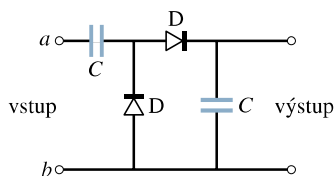
byl přepínač přepnut do pravé krajní polohy. Určete náboje Q_1 , Q_2 a Q_3 na odpovídajících kondenzátorech.

31Ú. Baterie B na obr. 26.35 poskytuje napětí 12 V. (a) Určete náboje na kondenzátorech v případě, že je zapnut pouze spínač S_1 . (b) Určete náboje na kondenzátorech v případě, že jsou sepnuty oba spínače S_1 i S_2 . Kapacity kondenzátorů mají hodnoty $C_1 = 1,0 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,0 \mu\text{F}$, $C_3 = 3,0 \mu\text{F}$ a $C_4 = 4,0 \mu\text{F}$.



Obr. 26.35 Úloha 31

32Ú. Na obr. 26.36 jsou dva stejné kondenzátory o kapacitě C v obvodu se dvěma ideálními diodami D. (Ideální diodou teče kladný náboj pouze ve směru šipky a záporný náboj teče pouze ve směru opačném.) Baterie o napětí 100 V je připojena na vstupní svorky nejprve tak, že svorka a je připojena ke kladnému pólu baterie a svorka b k zápornému. Potom je odpojována a zapojována obráceně, tj. ke kladnému pólu baterie je připojena svorka b . V obou případech určete napětí na výstupních svorkách.



Obr. 26.36 Úloha 32

ODST. 26.5 Energie elektrického pole

33C. Kolik elektrické energie obsahuje jeden krychlový metr vzduchu za „pěkného počasí“, kdy velikost intenzity elektrického pole bývá $150 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$?

34C. Reaktor s řízenou termonukleární fúzí by mohl v případě úspěšné realizace dodávat obrovské množství energie z těžkého vodíku obsaženého v mořské vodě. Chod reaktoru obvykle vyžaduje značné elektrické proudy, které v krátkých časových intervalech procházejí vinutím vytvářejícím magnetické pole. Např. u reaktoru ZT-40 v Los Alamoské laboratoři mají místnosti zaplněné kondenzátory. Kondenzátorový blok má kapacitu $61,0 \text{ mF}$ a napětí $10,0 \text{ kV}$. Vypočítejte jeho energii (a) v joulech, (b) v kilowatthodinách.

35C. Jakou kapacitu by musel mít kondenzátor, aby akumuloval energii $10 \text{ kW} \cdot \text{h}$ při napětí 1000 V ?

36C. Deskový vzduchový kondenzátor má kapacitu 130 pF . (a) Jaká je energie jeho elektrického pole, je-li napětí na konden-

zátoru $56,0 \text{ V}$? (b) Lze v tomto případě vypočítat hustotu energie elektrického pole v prostoru mezi elektrodami? Vysvětlíte to.

37C. Kondenzátor je nabit na napětí U . O kolik procent je nutno zvýšit toto napětí, chceme-li zvýšit jeho energii (tj. energii jeho elektrického pole) o 10% ?

38C. Deskový vzduchový kondenzátor o ploše elektrod 40 cm^2 a vzdálenosti elektrod $1,0 \text{ mm}$ je nabit na napětí 600 V . Určete (a) jeho kapacitu, (b) velikost náboje na každé z elektrod, (c) jeho energii, (d) intenzitu elektrického pole mezi elektrodami, (e) hustotu energie elektrického pole mezi elektrodami.

39C. Dva kondenzátory s kapacitami $2,0 \mu\text{F}$ a $4,0 \mu\text{F}$ jsou připojeny paralelně ke zdroji napětí 300 V . Vypočítejte celkovou energii elektrických polí obou kondenzátorů.

40C. (a) Vypočítejte hustotu energie elektrického pole elektronu ve vzdálenosti r od jeho středu. (b) Jaká by byla podle tohoto vztahu hustota energie v limitě pro $r \rightarrow 0$, kdybychom elektron považovali za bodový náboj?

41Ú. Nabitá osamocená kovová koule o průměru 10 cm má potenciál 8000 V vzhledem k hodnotě $\varphi = 0$ v nekonečnu. Vypočítejte hustotu energie elektrického pole blízko povrchu koule.

42Ú. Blok paralelně spojených kondenzátorů o kapacitách $5,00 \mu\text{F}$ se používá k akumulování elektrické energie. Kolik stojí nabití 2000 kondenzátorů v bloku na napětí 50000 V předpokladu, že cena $1 \text{ kW} \cdot \text{h}$ je $1,75 \text{ Kč}$?

43Ú. Jeden kondenzátor je nabit tak, že jeho energie je $4,0 \text{ J}$. Druhý nenabitý kondenzátor je pak k němu připojen paralelně. (a) Vypočítejte, zda došlo tímto připojením ke změně celkové energie elektrického pole kondenzátorů. (b) Jestliže ano, jak tento rozdíl vysvětlíte?

44Ú. Vypočítejte akumulovanou elektrickou energii v případech tří různých spojení kondenzátorů z úlohy 22. Porovnejte tyto elektrické energie a vysvětlíte, proč se liší.

45Ú. Podle obr. 26.27 určete pro každý z kondenzátorů jeho (a) náboj, (b) napětí, (c) energii. Uvažujte číselné hodnoty ze cvič. 16 a napětí $U = 100 \text{ V}$.

46Ú. Deskový kondenzátor mající elektrody o obsahu S ve vzdálenosti d byl nabit na napětí U . Nabíjecí baterie pak byla odpojována a elektrody oddáleny do vzdálenosti $2d$. Prostřednictvím veličin S , d , U vyjádřete (a) nové napětí na elektrodách, (b) počáteční a koncovou energii kondenzátoru, (c) práci potřebnou k oddálení elektrod.

47Ú. V situaci znázorněné na obr. 26.26 určete pro každý z kondenzátorů jeho (a) náboj, (b) napětí, (c) energii. Uvažujte číselné hodnoty ze cvič. 15 při napětí $U = 100 \text{ V}$.

48Ú. Válcový kondenzátor má poloměry elektrod a , b , jak je znázorněno na obr. 26.6. Ukažte, že polovina jeho elektrické energie se nachází uvnitř válce, jehož poloměr je $r = \sqrt{ab}$.

49Ú. Dokažte, že se elektrody deskového kondenzátoru navzájem přitahují silou $F = Q^2/(2\epsilon_0 S)$. Nejdříve vypočítejte práci potřebnou ke zvětšení vzdálenosti elektrod z hodnoty x na hodnotu $x + dx$ při nezměněné velikosti náboje Q .

50Ú. Užitím výsledku z úlohy 49 dokažte, že síla působící na jednotku plochy každé elektrody kondenzátoru (tzv. *elektrostatický tlak*) má velikost $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$. (Tento vztah je platný obecně pro vodič libovolného tvaru s intenzitou velikosti E v blízkosti jeho povrchu.)

51Ú*. Na mýdlovou bublinu poloměru R_0 je pomalu předáván náboj Q . V důsledku vzájemného odpuzování povrchových nábojů se poloměr bubliny mírně zvětší na velikost R . Následkem expanze se tlak vzduchu uvnitř bubliny sníží na velikost $p = p_0 V_0/V$, kde p_0 je atmosférický tlak, V_0 je počáteční objem a V je koncový objem. Dokažte, že mezi uvedenými veličinami platí vztah

$$Q^2 = 32\pi^2 \epsilon_0 p_0 R(R^3 - R_0^3).$$

(*Tip:* Uvažujte síly působící na malou plošku nabitě bubliny. Tyto síly jsou vyvolány tlakem plynu, atmosférickým tlakem a elektrostatickým tlakem — viz úlohu 50.)

ODST. 26.6 Kondenzátor s dielektrikem

52C. Vzduchový deskový kondenzátor má kapacitu 1,3 pF. Zdvojnásobení vzdálenosti jeho elektrod a současně vložení vosku mezi ně vede ke zvětšení jeho kapacity na 2,6 pF. Určete relativní permitivitu vosku.

53C. Vzduchový kondenzátor o kapacitě 7,4 pF má zvětšit svou kapacitu tak, aby akumuloval energii 7,4 μJ při napětí 652 V. Které dielektrikum z tab. 26.1 lze využít pro vyplnění prostoru mezi jeho elektrodami, aby se dosáhlo uvedené hodnoty energie s nejmenší odchylkou?

54C. Ke zhotovení deskového kondenzátoru máte k dispozici dvě měděné destičky (jako elektrody), list slídy (tloušťky 0,1 mm, $\epsilon_r = 5,4$), destičku skla (tloušťky 2,0 mm, $\epsilon_r = 7,0$) a destičku parafinu (tloušťky 1,0 cm, $\epsilon_r = 2,0$). Které z těchto dielektrik vložíte mezi měděné elektrody, chcete-li dosáhnout největší kapacity?

55C. Deskový vzduchový kondenzátor má kapacitu 50 pF. (a) Jaká je vzdálenost jeho elektrod, jestliže obsah každé z elektrod je 0,35 m²? (b) Jak velkou kapacitu bude mít tento kondenzátor, bude-li prostor mezi jeho elektrodami zcela vyplněn materiálem s relativní permitivitou $\epsilon_r = 5,6$?

56C. Koaxiální kabel dálkového vedení má vnitřní poloměr 0,10 mm a vnější poloměr 0,60 mm. Vypočtete jeho kapacitu připadající na 1 m délky. Předpokládejte, že prostor mezi vodiči je zcela vyplněn polystyrenem.

57Ú. Určitý materiál má relativní permitivitu 2,8 a dielektrickou pevnost 18 MV·m⁻¹. Tento materiál je použit jako dielektrikum v deskovém kondenzátoru. Jaký minimální obsah musí mít elektrody kondenzátoru, aby měl kapacitu 7,0·10⁻² μF a vydržel přitom bez elektrického průrazu napětí 4,0 kV?

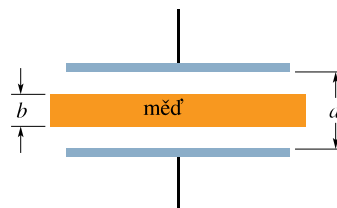
58Ú. Máte vyrobit kondenzátor o kapacitě přibližně 1 nF s průrazným napětím ne menším než 10 000 V. Můžete k tomu použít stěnu vysoké sklenice z Pyrexu (varného skla) jako dielektrika tak, že pokryjete vnitřní a vnější zakřivený povrch skla hliníkovou fólií. Sklenice má výšku 15 cm, vnitřní poloměr 3,6 cm

a vnější poloměr 3,8 cm. Jaká bude (a) kapacita, (b) průrazné napětí takového kondenzátoru?

59Ú. Máte navrhnout přenosný deskový kondenzátor s dielektrikem, který může akumulovat energii 250 kJ. (a) Jaký minimální objem musí mít kondenzátor, jestliže použijete jedno z dielektrik, jejichž dielektrické pevnosti jsou uvedeny v tab. 26.1? (b) Moderní kondenzátor může akumulovat energii 250 kJ při objemu 0,0870 m³. Jakou relativní permitivitu musí mít jeho dielektrikum, jestliže by mělo dielektrickou pevnost stejnou jako dielektrikum v případě (a)?

60Ú. Dva deskové kondenzátory mají stejně velkou plochu elektrod S a stejnou vzdálenost elektrod d . Relativní permitivita dielektrika mezi elektrodami jednoho z nich je $\epsilon_r + \Delta\epsilon_r$ a u druhého kondenzátoru je $\epsilon_r - \Delta\epsilon_r$. (a) Určete jejich výslednou kapacitu, jsou-li spojeny paralelně. (b) Jaký je náboj kondenzátoru s větší kapacitou, je-li na obou paralelně spojených kondenzátorech náboj Q ?

61Ú. Měděná deska tloušťky b je vsunuta doprostřed mezi elektrody deskového kondenzátoru s elektrodami o obsahu S tak, jak ukazuje obr. 26.37. (a) Jaká je kapacita kondenzátoru po vsunutí desky? (b) Jaký je poměr akumulované energie před a po vsunutí desky, jestliže náboj na elektrodách zůstane nezměněn? (c) Jak velká práce je vykonána při vsunutí desky? Je deska vtahována dovnitř, nebo musí být do uvedeného prostoru vnější silou vtlačována?



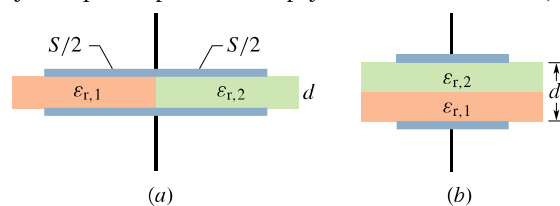
Obr. 26.37 Úloha 61

62Ú. Řešte úlohu 61 za předpokladu, že nikoli náboj, ale napětí na elektrodách je udržováno konstantní.

63Ú. Deskový kondenzátor s elektrodami o obsahu S je vyplněn dvěma dielektriky tak, jak je znázorněno na obr. 26.38a. Dokažte, že pro jeho kapacitu platí vztah

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \frac{\epsilon_{r,1} + \epsilon_{r,2}}{2}.$$

Ověřte tento vztah pro limitní případy. (*Tip:* Odůvodněte, že toto spojení odpovídá paralelnímu spojení dvou kondenzátorů.)



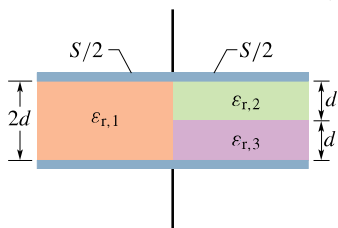
Obr. 26.38 Úlohy 63 a 64

64Ú. Deskový kondenzátor s elektrodami o obsahu S je vyplněn dvěma dielektriky tak, jak ukazuje obr. 26.38b. Dokažte, že pro jeho kapacitu platí

$$C = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} \frac{\varepsilon_{r,1}\varepsilon_{r,2}}{\varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{r,2}}.$$

Ověřte platnost tohoto vztahu pro limitní případy. (*Tip:* Odůvodněte, že toto spojení odpovídá sériovému spojení dvou kondenzátorů.)

65Ú. Jaká je kapacita kondenzátoru s elektrodami o obsahu S , který je znázorněn na obr. 26.39? (*Tip:* Viz úlohy 63 a 64.)



Obr. 26.39 Úloha 65

ODST. 26.8 Dielektrika a Gaussův zákon elektrostatiky

66C. Deskový kondenzátor má kapacitu 100 pF, obsah elektrod 100 cm² a slídkové dielektrikum ($\varepsilon_r = 5,4$). Vypočtěte (a) velikost intenzity elektrického pole ve slídkě, (b) velikost volných nábojů na elektrodách, (c) velikost indukovaného povrchového náboje na slídkě.

67C. V př. 26.8 předpokládejte, že při vsouvání desky dielektrika mezi elektrody deskového kondenzátoru zůstává baterie připojena. Po jejím vsunutí mezi elektrody vypočtěte (a) kapacitu, (b) náboje na elektrodách kondenzátoru, (c) velikost intenzity elektrického pole v mezeře, (d) velikost intenzity elektrického pole v desce dielektrika.

68Ú. Prostor mezi dvěma soustřednými vodivými kulovými velmi tenkými vrstvami o poloměrech b a a (kde $b > a$) je

vyplněn látkou o relativní permitivitě ε_r . Mezi vnitřní a vnější vrstvou je napětí U . Určete (a) kapacitu této soustavy, (b) volný náboj Q na vnitřní vrstvě, (c) náboj Q' indukovaný podél povrchu vnitřní vrstvy.

69Ú. Na dvě rovnoběžné desky o obsahu 100 cm² byly přeneseny náboje stejných velikostí $8,9 \cdot 10^{-7}$ C, ale opačných znamének. Intenzita elektrického pole uvnitř dielektrika, vyplňujícího prostor mezi deskami, je $1,4 \cdot 10^6$ V·m⁻¹. (a) Vypočtěte relativní permitivitu dielektrika, (b) určete velikost náboje indukovaného na povrchu dielektrika.

70Ú. Deskový kondenzátor má elektrody o obsahu 0,12 m², které jsou od sebe vzdáleny 1,2 cm. Baterie nabije kondenzátor na napětí 120 V a pak je odpojena. Deska dielektrika, mající tloušťku 4,0 mm a relativní permitivitu 4,8, je pak umístěna symetricky mezi elektrody. (a) Jakou kapacitu má kondenzátor před vložením desky? (b) Jakou kapacitu má kondenzátor s vloženou deskou? (c) Jak velká je volný náboj Q kondenzátoru před vložením a po vložením desky dielektrika? (d) Jaká je velikost intenzity elektrického pole v prostoru mezi elektrodami a dielektrikem? (e) Jaká je velikost intenzity elektrického pole v dielektriku? (f) Jaké je napětí na elektrodách při vložené desce dielektrika? (g) Jak velká je práce vnějších sil potřebná pro vložení desky?

71Ú. Uvažujte kondenzátor z př. 26.8 (obr. 26.16): (a) Jaká část energie je uložena ve vzduchových mezerách? (b) Jaká část energie je uložena v desce?

72Ú. Deska dielektrika o tloušťce b je vložena mezi elektrody deskového kondenzátoru, jejichž vzdálenost je d . Dokažte, že kapacita tohoto kondenzátoru je vyjádřena vztahem

$$C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{\varepsilon_r d - b(\varepsilon_r - 1)}.$$

(*Tip:* Odvoďte tento vztah podle postupu v př. 26.8.) Dává uvedený vztah správný číselný výsledek př. 26.8? Ověřte, že tento vztah je platný i pro speciální případy, je-li $b = 0$, $\varepsilon_r = 1$, $b = d$.

27

Proud a odpor



*Chlouba Německa a technický zázrak své doby, vzducholoď **Hindenburg**, byla téměř tak dlouhá jako tři fotbalová hřiště — byl to největší létající stroj, který kdy byl postaven. Ačkoli ho nadnášelo šestnáct nádrží naplněných vysoce hořlavým a ve směsi se vzduchem výbušným vodíkem, mnohokrát přeletěl Atlantický oceán bez nehody. Avšak 6. května 1937 krátce po 19.21 h, právě když se Hindenburg chystal přistát na námořní a letecké základně Lakehurst ve státě New Jersey v USA, došlo ke katastrofě. Posádka nejprve čekala, až se zklidní bouřka, a potom spustila námořníkům z pozemní obsluhy manévrovací lana. Najednou bylo vidět, jak se asi ve třetině délky směrem od zádi vnější plášť vzducholodi vlní. O několik sekund později z tohoto místa vyšlehly plameny a červená záře oslnila celé okolí. Za 32 s spadla hořící vzducholoď na zem. Proč po tolika úspěšných letech vzducholoď plněných vodíkem právě tato vzducholoď shořela v plamenech?*

27.1 POHYBUJÍCÍ SE NÁBOJE A ELEKTRICKÉ PROUDY

V kap. 22 až 26 jsme se podrobně zabývali *elektrostatikou*, tedy elektrickými náboji v klidu a jejich polem. V této kapitole začneme studovat *elektrické proudy*, tedy elektrické náboje v pohybu.

Elektrické proudy se vyskytují všude kolem nás, od obrovských proudů při úderu blesku až k nepatrným proudům v nervových vláknech, které řídí pohyby našich svalů. Každý dobře zná elektrický proud v domovní elektroinstalaci, v žárovkách a v elektrických spotřebičích. Svazek elektronů se pohybuje ve vakuu v obrazovce televizního přijímače — i to je elektrický proud. Nabité částice *obou* znamének protékají v ionizovaném plynu zářivek, v bateriích tranzistorových radiopřijímačů nebo v automobilových bateriích. Elektrické proudy najdeme také v polovodičových součástkách kapesních kalkulaček a v čípech, které řídí mikrovlnné trouby nebo elektrické pračky.

Nabité částice zachycené ve Van Allenových radiačních pásech se jako vlny převalují tam a zpět nad zemskou atmosférou mezi severním a jižním magnetickým pólem. Ohromné toky protonů, elektronů a iontů letí směrem od Slunce celou sluneční soustavou jako *sluneční vítr*. Kosmické paprsky, tvořené hlavně protony o velmi vysoké energii, prolétávají naší Galaxií a některé zasahují Zemi.

Přestože jakýkoli elektrický proud je vždy proudem pohybujících se nábojů, ne všechny pohybující se náboje vytvářejí elektrický proud. Abychom mohli říci, že určitou plochou prochází elektrický proud, musí vzniknout výsledný tok náboje touto plochou, jak si vysvětlíme v následujících dvou příkladech.

1. Volné, vodivostní elektrony se v izolovaném kusu měděného drátu chaoticky pohybují rychlostí řádově $10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Představíme-li si rovinu protínající takový drát, budou elektrony rovinou procházet *v obou směrech* miliardkrát za sekundu. Žádný výsledný tok náboje nevzniká, a žádný proud tedy drátem neprochází. Připojíme-li však konce drátu k baterii, i její malé napětí mírně upřednostní tok elektronů v jednom směru, takže vyvolá výsledný tok náboje průřezem drátu a drátem tedy začne procházet elektrický proud.

2. Tok vody v zahradní hadici můžeme považovat za usměrněný tok kladných nábojů (protonů v molekulách vody) řádově několika milionů coulombů za sekundu. Žádný výsledný tok náboje však neexistuje, protože současně ve stejném množství a ve stejném směru teče záporný náboj (elektrony v molekulách vody).

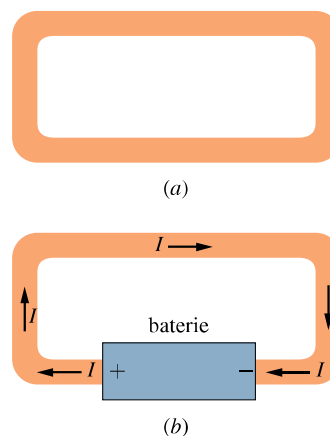
V této kapitole výrazně omezíme předmět našeho studia a v rámci klasické fyziky se budeme zabývat *ustálenými*

proudy vodivostních elektronů pohybujících se v kovovém vodiči, jako je například měděný drát.

27.2 ELEKTRICKÝ PROUD

Na obr. 27.1a vidíme izolovanou vodivou smyčku. Jak už víme, má celá smyčka tentýž potenciál, bez ohledu na to, zda nese nějaký náboj. Žádné elektrické pole nemůže existovat ani uvnitř vodiče smyčky ani vně smyčky rovnoběžně s jejím povrchem. Ačkoli jsou ve smyčce přítomny *vodivostní elektrony*, nepůsobí na ně žádná výsledná elektrická síla a nevzniká tedy žádný proud.

Vložíme-li do vodivé smyčky baterii podle obr. 27.1b, nebude už potenciál smyčky všude stejný. Elektrické pole uvnitř materiálu, z něhož je smyčka vyrobena, působí elektrickou silou na vodivostní elektrony, vyvolává jejich pohyb a způsobuje vznik **proudu**. Za velmi krátkou dobu dosáhne tok elektronů jisté konstantní hodnoty a proud ve smyčce pak bude **ustálený** (stacionární, tj. nezávislý na čase).



Obr. 27.1 (a) Smyčka z měděného drátu v elektrostatické rovnováze. Celá smyčka má tentýž potenciál, takže intenzita elektrického pole je nulová ve všech bodech měděného drátu. (b) Vložením baterie vyvoláme rozdíl potenciálů, tedy napětí mezi konci smyčky připojenými ke svorkám baterie. Tím se vytváří uvnitř smyčky elektrické pole, které vyvolává pohyb nábojů ve smyčce, a tak vzniká proud I .

Obr. 27.2 znázorňuje část vodiče, část vodivé smyčky, kterou prochází proud. Jestliže náboj dQ projde např. rovinným řezem a za dobu dt , pak proud protékající průřezem vodiče je definován vztahem

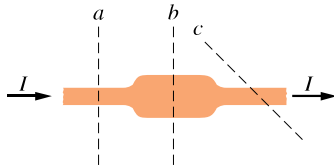
$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{definice proudu}). \quad (27.1)$$

Náboj, který proteče průřezem vodiče během časového in-

tervalu od 0 do t , určíme integrací

$$Q = \int dQ = \int_0^t I dt, \quad (27.2)$$

přítom proud I může být funkcí času.



Obr. 27.2 Ustálený proud I ve vodiči má stejnou velikost v průřezech a , b a c .

V ustáleném stavu teče stejný proud I všemi průřezy b a c i všemi rovinami, které protínají celý vodič, bez ohledu na jejich polohu nebo orientaci, neboť elektrický náboj se zachovává. Za každý elektron, který do vodiče na jednom jeho konci vstoupí, vystoupí jiný elektron na jeho druhém konci. Podobně je tomu např. při ustáleném toku vody v zahradní hadici. Za každou kapku vody, která vteče do hadice na jejím začátku, musí jiná kapka vystříknout ven tryskou na jejím konci a celkové množství vody v hadici se zachovává.

Jednotkou proudu v soustavě SI je coulomb za sekundu a tato jednotka se nazývá **ampér** (A): $1 \text{ ampér} = 1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$. Ampér je jednou ze základních jednotek SI. Jak jsme řekli v kap. 22, coulomb je definován pomocí ampéru. S přesnou definicí ampéru se seznámíme v kap. 30.

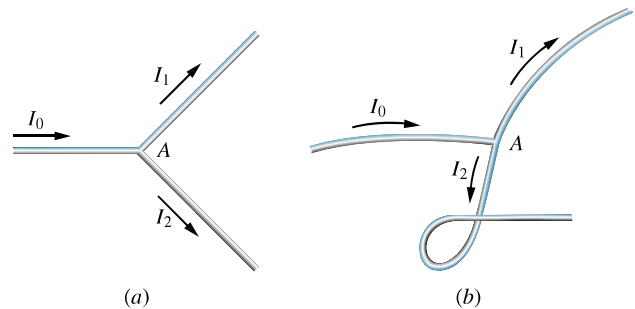
Proud definovaný rov. (27.1) je skalár, protože elektrický náboj i čas jsou skaláry. Proud často znázorňujeme šipkami jako na obr. 27.1b, abychom vyznačili směr pohybu nábojů. Tyto šipky však nepopisují nějaké vektory. Na obr. 27.3a je vodič, který se rozvětňuje do dvou větví. Protože se náboj zachovává, proudy ve větvích musí být takové, aby jejich součet dal proud v nerozvětveném vodiči, tedy

$$I_0 = I_1 + I_2. \quad (27.3)$$

Obr. 27.3b ukazuje, že ohnutí nebo otočení vodiče nemá vliv na platnost rov. (27.3). Proudové šipky ukazují jen jeden ze dvou možných směrů toku ve vodiči, ne směr v prostoru.

Směr proudu

Na obr. 27.1b jsme nakreslili proudové šipky ve směru, ve kterém by se vlivem elektrického pole pohybovaly smyčkovou kladně nabitě částice. Byly by to nosiče kladného náboje a pohybovaly by se směrem od kladného pólu baterie



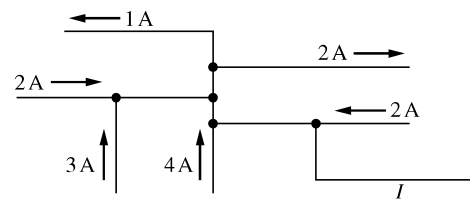
Obr. 27.3 Vztah $I_0 = I_1 + I_2$ platí v bodě A nezávisle na tom, jak jsou vodiče orientovány v prostoru. Proudové šipky jsou skaláry, nikoli vektory.

k jejímu zápornému pólu. Ve skutečnosti však nosiči náboje v měděné smyčce na obr. 27.1b jsou elektrony se záporným nábojem. V elektrickém poli se pohybují v opačném směru, než ukazují šipky, tedy od záporného pólu ke kladnému. Z historických důvodů však používáme tuto konvenci:

Proudové šipky kreslíme ve směru, ve kterém by se pohyboval kladný náboj. Děláme to i v případě, kdy skutečné nosiče náboje jsou záporné a pohybují se tedy v opačném směru.

Tuto konvenci můžeme používat proto, že ve většině situací předpokládaný pohyb nosičů kladného náboje v jednom směru je ekvivalentní skutečnému pohybu nosičů záporného náboje v opačném směru. (Pokud by ovšem ekvivalentní nebyl, museli bychom samozřejmě uvažovat skutečný pohyb nosičů náboje. Tak je tomu např. při Hallově jevu v polovodičích, čl. 29.4.)

KONTROLA 1: Obrázek znázorňuje část obvodu. Jaká je velikost a směr proudu I ve vodiči na obr. vpravo dole?



PŘÍKLAD 27.1

Voda protéká zahradní hadicí s objemovým průtokem $R = 450 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Jaký je odpovídající proud záporného náboje?

ŘEŠENÍ: Proud záporného náboje neseného molekulami vody je dán rychlostí, kterou molekuly vody procházejí libovolným průřezem hadice, vynásobené záporným nábojem,

který nese každá molekula vody. Jestliže ρ je hustota vody a m_m je její molární hmotnost, pak počet molů za sekundu, který protéká průřezem vymezeným rovinou, je $R\rho/m_m$. Jestliže N je počet molekul vody a N_A je Avogadrova konstanta, pak počet dN/dt molekul za sekundu, který prochází průřezem, je

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{R\rho N_A}{m_m} = \\ &= (450 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1})(1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})}{(0,018 \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1})} = \\ &= 1,51 \cdot 10^{25} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Každá molekula vody má 10 elektronů (8 v atomu kyslíku a 1 v každém ze dvou vodíkových atomů). Každý elektron nese náboj $-e$, takže proud odpovídající tomuto pohybu záporného náboje je

$$\begin{aligned} I &= \frac{dQ}{dt} = 10e \frac{dN}{dt} = \\ &= 10(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,51 \cdot 10^{25} \text{ s}^{-1}) = \\ &= 2,42 \cdot 10^7 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1} = 2,42 \cdot 10^7 \text{ A} = \\ &= 24,2 \text{ MA}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tento proud záporného náboje je přesně vykompenzován proudem kladného náboje, který se nachází v jádrech atomů, jimiž je tvořena molekula vody. Výsledný tok elektrického náboje hadicí je tedy roven nule.

27.3 HUSTOTA PROUDU

Někdy nás zajímá úhrnný proud I , jindy dáme přednost lokálnímu pohledu a studujeme tok náboje v určitém bodě uvnitř vodiče. Kladný nosič náboje v daném bodě se pohybuje ve směru intenzity elektrického pole \mathbf{E} v tomto bodě. Abychom popsali pohyb nosičů náboje, zavedeme **hustotu (elektrického) proudu \mathbf{J}** . Je to vektorová veličina a má stejný směr jako intenzita elektrického pole v daném bodě průřezu vodiče. Její velikost J je rovna proudu procházejícímu elementární ploškou průřezu vodiče kolmou ke směru proudu, dělenému velikostí této plošky. Proud dI protékající elementární ploškou je $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$, kde $d\mathbf{S}$ je vektor elementu plochy (kolmý k dané plošce). Celkový proud celým průřezem vodiče pak je

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (27.4)$$

Jestliže je proud v celém průřezu vodiče konstantní a jeho směr je rovnoběžný s vektorem $d\mathbf{S}$, pak hustota proudu \mathbf{J}

je také konstantní a rovnoběžná s $d\mathbf{S}$. V takovém případě lze rov. (27.4) upravit do tvaru

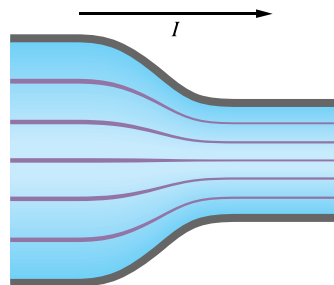
$$I = \int J dS = J \int dS = JS,$$

což dává

$$J = \frac{I}{S}, \quad (27.5)$$

kde S je obsah celého průřezu vodiče. Z rov. (27.4), resp. (27.5) vidíme, že jednotkou hustoty proudu v soustavě SI je ampér na metr čtverečný, $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$.

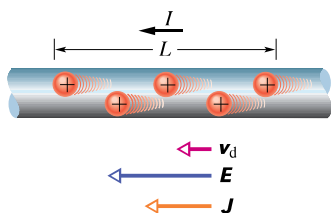
V kap. 23 jsme ukázali, že průběh vektoru intenzity elektrického pole můžeme znázornit pomocí siločár. Na obr. 27.4 je znázorněno, jak se průběh vektoru hustoty proudu dá znázornit obdobnými čarami, nazývanými **proudové čáry**. Proud, který na obr. 27.4 teče směrem doprava, přechází z vodiče o větším průřezu do vodiče o menším průřezu. Protože se elektrický náboj zachovává, náboj, který prochází libovolným průřezem, a tedy ani celkový proud jím procházející se nemění. Změní se však hustota proudu, a to tak, že ve vodiči o menším průřezu je větší. Vzdálenost mezi proudovými čarami odpovídá hustotě proudu — jsou-li proudové čáry těsněji u sebe, je hustota proudu větší.



Obr. 27.4 Proudové čáry znázorňující vektory hustoty proudu při toku elektrického náboje zužujícím se vodičem.

Driftová rychlost

Jestliže vodičem neprochází žádný proud, pohybují se jeho vodivostní elektrony chaoticky a nepřevládá žádný výsledný pohyb v nějakém směru. Jestliže vodičem prochází proud, elektrony se také pohybují chaoticky, ale navíc jsou unášeny **driftovou rychlostí \mathbf{v}_d** ve směru opačném, než je směr intenzity elektrického pole, která vyvolává jejich pohyb. Driftová rychlost je nepatrná ve srovnání s rychlostí chaotického pohybu. Například v měděném vodiči v domovní instalaci je driftová rychlost elektronů nanejvýš $10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, zatímco rychlost chaotického pohybu je asi $10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (Názorný příklad nám dává roj rychlých komárů, zvolna unášený vánkem.)



Obr. 27.5 Kladný nosič náboje se pohybuje driftovou rychlostí v_d ve směru přiloženého elektrického pole \mathbf{E} . Podle používané konvence je orientace vektoru hustoty proudu \mathbf{J} stejná jako orientace šipky znázorňující směr proudu I .

Pomocí obr. 27.5 najdeme vztah mezi driftovou rychlostí v_d vodivostních elektronů ve vodiči protékaném proudem a hustotou proudu \mathbf{J} . Podle zmíněné konvence je na obr. 27.5 znázorněn pohyb kladně nabitých nosičů ve směru intenzity \mathbf{E} . Předpokládejme, že všechny tyto náboje se pohybují stejnou driftovou rychlostí v_d a že hustota proudu \mathbf{J} je konstantní v celém průřezu vodiče, jehož obsah je S . Počet nosičů náboje na úseku vodiče délky L je nLS , kde n je počet nosičů v jednotkovém objemu, tedy **koncentrace nosičů**. Nese-li každý nosič náboj e , je na úseku délky L celkový náboj

$$Q = (nSL)e.$$

Protože všechny náboje ve vodiči se pohybují rychlostí v_d , projde tento celkový náboj libovolným průřezem vodiče za dobu

$$t = \frac{L}{v_d}.$$

Podle rov. (27.1) je proud I roven náboji, který projde průřezem vodiče za jednotku času. Odtud plyne

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{nSLe}{L/v_d} = nSv_d e. \quad (27.6)$$

Z této rovnice vypočítáme driftovou rychlost v_d a užitím rov. (27.5) dostaneme

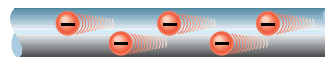
$$v_d = \frac{I}{nSe} = \frac{\mathbf{J}}{ne}.$$

Užitím vektorů můžeme psát

$$\mathbf{J} = (ne)\mathbf{v}_d. \quad (27.7)$$

Součin ne , jehož jednotkou v soustavě SI je coulomb na krychlový metr ($\text{C}\cdot\text{m}^{-3}$), je objemová hustota náboje. Pro kladné nosiče náboje, jaké předpokládáme, je hustota náboje (ne) kladná a rov. (27.7) vyjadřuje, že vektory \mathbf{J} a \mathbf{v}_d mají stejný směr.

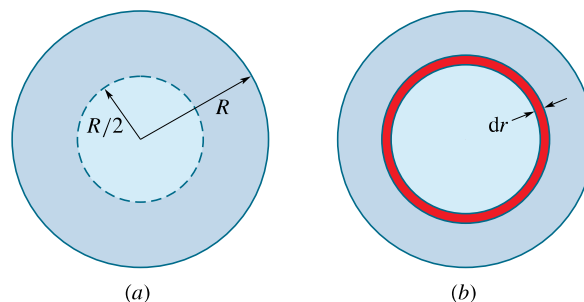
KONTROLA 2: Na obrázku jsou nakresleny vodivostní elektrony pohybující se vodičem zprava doleva. Určete, které z těchto veličin jsou orientovány doleva a které doprava: (a) proud I , (b) hustota proudu \mathbf{J} , (c) intenzita elektrického pole \mathbf{E} ve vodiči.



PŘÍKLAD 27.2

Hustota proudu ve válcovém vodiči o poloměru $R = 2,0$ mm má velikost $J = 2,0 \cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$ a je konstantní v celém průřezu vodiče.

(a) Jak velký proud I protéká vnější částí vodiče vymezenou poloměry $R/2$ a R (obr. 27.6a)?



Obr. 27.6 Příklad 27.2. (a) Průřez vodiče o poloměru R . (b) Tenký prstenec o šířce dr a obvodu $2\pi r$. Jeho plocha je $dS = 2\pi r dr$.

ŘEŠENÍ: Protože hustota proudu je konstantní v celém průřezu vodiče, můžeme k výpočtu proudu použít rov. (27.5), $J = I/S$. Počítáme však jen proud procházející částí S' celého průřezu, kde

$$\begin{aligned} S' &= \pi R^2 - \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{3R^2}{4}\right) = \\ &= \frac{3\pi}{4} (0,002 \text{ m})^2 = 9,424 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Z rov. (27.5) plyne

$$I = JS'$$

a po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned} I &= (2,0 \cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2})(9,424 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2) = \\ &= 1,9 \text{ A}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Předpokládejme nyní, že hustota proudu v průřezu vodiče se mění s poloměrem r podle vztahu $J = ar^2$, kde $a = 3,0 \cdot 10^{11} \text{ A}\cdot\text{m}^{-4}$ a poloměr r je dán v metrech. Jak velký proud protéká nyní stejnou částí vodiče jako v úloze (a)?

ŘEŠENÍ: Protože hustota proudu není konstantní v celém průřezu vodiče, musíme použít obecnější rov. (27.4) a integrovat hustotu proudu přes vymezenou část vodiče od $r = R/2$ do $r = R$. Vektor hustoty proudu \mathbf{J} (ve směru osy vodiče) a vektor elementu plochy $d\mathbf{S}$ (kolmý k průřezu vodiče) mají stejnou orientaci, takže

$$\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = J dS \cos 0 = J dS.$$

Nyní potřebujeme vyjádřit dS tak, abychom mohli integrovat v mezích od $r = R/2$ do $r = R$. Protože velikost hustoty proudu J je dána jako funkce poloměru r , vyjádříme velikost dS plochy jako $2\pi r dr$, kde $2\pi r$ je obvod kruhového prstence o šířce dr (obr. 27.6b). Integrační proměnnou je tedy poloměr r a z rov. (27.4) plyne

$$\begin{aligned} I &= \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int J dS = \\ &= \int_{R/2}^R ar^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi a \int_{R/2}^R r^3 dr = \\ &= 2\pi a \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R/2}^R = \frac{\pi a}{2} \left(R^4 - \frac{R^4}{16} \right) = \\ &= \frac{15}{32} \pi a R^4 = \frac{15}{32} \pi (3,0 \cdot 10^{11} \text{ A} \cdot \text{m}^{-4}) (0,002 \text{ m})^4 = \\ &= 7,1 \text{ A}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

PŘÍKLAD 27.3

Jeden konec hliníkového drátu o průměru 2,5 mm je přivařen ke konci měděného drátu o průměru 1,8 mm. Takto vyrobeným vodičem protéká ustálený proud $I = 17 \text{ mA}$.

(a) Jaká je hustota proudu v každé z obou částí vodiče?

ŘEŠENÍ: Hustotu proudu v každé části vodiče můžeme považovat za konstantní (s výjimkou nejbližšího okolí kontaktu, kde se mění průměr vodiče). Průřez S_{Al} hliníkového vodiče je

$$\begin{aligned} S_{\text{Al}} &= \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 = \\ &= 4,91 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

a hustota proudu podle rov. (27.5) je

$$\begin{aligned} J_{\text{Al}} &= \frac{I}{S_{\text{Al}}} = \frac{(17 \cdot 10^{-3} \text{ A})}{(4,91 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)} = \\ &= 3,5 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}. \end{aligned}$$

Snadno spočítáme, že průřez měděného vodiče je $S_{\text{Cu}} = 2,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$, takže hustota proudu je

$$\begin{aligned} J_{\text{Cu}} &= \frac{I}{S_{\text{Cu}}} = \frac{(17 \cdot 10^{-3} \text{ A})}{(2,54 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)} = \\ &= 6,7 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je driftová rychlost vodivostních elektronů v měděném drátu? Předpokládejme, že každý atom mědi přispívá v průměru jedním vodivostním elektronem.

ŘEŠENÍ: Driftovou rychlost vypočítáme pomocí rov. (27.7) ($\mathbf{J} = ne\mathbf{v}_d$), nejprve však musíme určit n , tedy počet elektronů v jednotce objemu. Za uvedeného předpokladu, že na jeden atom připadá jeden vodivostní elektron, se n rovná počtu atomů v jednotce objemu a vypočte se ze vztahu

$$\frac{n}{N_A} = \frac{\rho}{m_m},$$

tj.

$$\frac{\text{počet atomů v jednom m}^3}{\text{počet atomů v jednom molu}} = \frac{\text{hmotnost jednoho m}^3}{\text{hmotnost jednoho molu}},$$

kde ρ je hustota mědi, N_A je Avogadrova konstanta a m_m je molární hmotnost mědi. Tedy

$$\begin{aligned} n &= \frac{N_A \rho}{m_m} = \\ &= \frac{(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})(9,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3})}{(64 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1})} = \\ &= 8,47 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}, \text{ tj. } 8,47 \cdot 10^{28} \text{ elektronů v jednom m}^3. \end{aligned}$$

Užitím rov. (27.7) pak vypočteme

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{J_{\text{Cu}}}{ne} = \frac{(6,7 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2})}{(8,47 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = \\ &= 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 1,8 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Můžeme se zeptat: Jestliže se elektron pohybuje tak pomalu, jak to, že se světla v místnosti rozsvítí okamžitě, když vypínačem zapojíme proud? Tento zdánlivý rozpor vzniká tehdy, když neodlišujeme driftovou rychlost elektronů od rychlosti, kterou se šíří podél vodiče změny elektrického pole. Změny pole se šíří rychlostí, která se prakticky rovná rychlosti světla. Elektrony všude ve vodiči i v žárovce se začnou pohybovat prakticky současně driftovou rychlostí. Je to podobné, jako když otevřete kohoutek, ke kterému je připojena zahradní hadice plná vody. Tlaková vlna podél hadice se šíří rychlostí zvuku ve vodě. Přitom však rychlost, kterou se voda pohybuje v hadici (měřená například pomocí značkovacího barviva) je mnohem menší.

PŘÍKLAD 27.4

Křemíkovou tyčinkou o obdélníkovém průřezu šířky $d = 3,2 \text{ mm}$ a výšky $h = 250 \mu\text{m}$ protéká proud $I = 5,2 \text{ mA}$, s konstantní hustotou v celém průřezu. Křemík je polovodič typu n a je dopován přesně stanoveným množstvím fosforu. Jak uvidíme v čl. 27.8, dopování způsobuje výrazný vzrůst počtu n nosičů náboje v jednotce objemu ve srovnání s čistým křemíkem. V tomto příkladě je $n = 1,5 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$.

(a) Jaká je hustota proudu v křemíkové tyčince?

ŘEŠENÍ: Z rov. (27.5) plyne

$$J = \frac{I}{dh} = \frac{(5,2 \cdot 10^{-3} \text{ A})}{(3,2 \cdot 10^{-3} \text{ m})(250 \cdot 10^{-6} \text{ m})} = 6\,500 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je driftová rychlost elektronů?

ŘEŠENÍ: Z rov. (27.7) plyne

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{(6\,500 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2})}{(1,5 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = 0,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 27 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že hustota proudu ($6\,500 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$) v tomto polovodiči je srovnatelná s hustotou proudu v měděném vodiči ($6\,700 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$) v př. 27.3. To znamená, že množství náboje protékajícího jednotkovou plochou za stejnou dobu je v obou případech zhruba stejné. Avšak driftová rychlost elektronů v polovodiči ($0,27 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) je mnohem větší než driftová rychlost elektronů v měděném vodiči ($4,9 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

Pokud si znovu tento příklad projdete, uvidíte, že velký rozdíl driftových rychlostí je způsoben tím, že počet nosičů náboje v jednotce objemu je v polovodiči mnohem menší. Jestliže jsou tedy hustoty proudu srovnatelné, pak je to tím, že v polovodiči je sice vodivostních elektronů méně než ve vodiči, ale pohybují se rychleji než ve vodiči.

27.4 ODPOR A REZISTIVITA

Jestliže ke koncům měděné a skleněné tyče stejného tvaru přiložíme stejné napětí, naměříme velmi odlišné proudy. Je to způsobeno tím, že měděná a skleněná tyč mají různý elektrický odpor. **Odpor** neboli **rezistanci** mezi libovolnými dvěma body vodiče určíme tak, že přiložíme napětí U mezi tyto body a změříme proud, který vodičem prochází. Odpor R pak je

$$R = \frac{U}{I} \quad (\text{definice } R). \quad (27.8)$$

Z rov. (27.8) plyne, že jednotkou odporu v soustavě SI je volt na ampér. Tato jednotka se vyskytuje tak často, že dostala svůj zvláštní název **ohm** (označení Ω). Tedy

$$1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}. \quad (27.9)$$

Součástka, jejíž funkcí v elektrickém obvodu je vytvářet určitý odpor, se nazývá **rezistor** (obr. 27.7). Ve schématu elektrického obvodu znázorňujeme rezistor podle normy

ISO \square , podle americké normy \square . Jestliže rov. (27.8) napíšeme ve tvaru

$$I = \frac{U}{R},$$

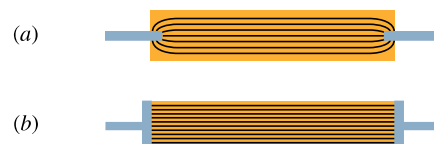
vidíme, že slovo „odpor“ je výstižné. Pro dané napětí totiž platí, že čím větší je odpor, který proudu klade vodič, tím menší proud vodičem prochází. Je zřejmé, že odpor je *vlastnost* rezistoru. Dříve se užíval termín **odpor** i pro součástku, tedy pro sám rezistor. Takové nedůslednosti lze běžně tolerovat v zájmu stručnosti vyjadřování, pokud nehrozí nedorozumění. Zde se však zabýváme problematikou natolik detailně, že rozlišení mezi veličinou (odpor, rezistance) a objektem (rezistor) je funkční, a budeme ho proto dodržovat.



Obr. 27.7 Rezistory. Barevné proužky na rezistorech označují hodnotu jejich odporu.

Převrácenou hodnotou odporu je **vodivost** (konduktance) $G = 1/R$; její jednotkou v SI je **siemens**, $S = \Omega^{-1}$.

Odpor vodiče může být ovlivněn způsobem, jakým je k němu napětí přiloženo. Na obr. 27.8 vidíme, jak totéž napětí může být přiloženo k vodiči dvěma různými způsoby. Jak napovídá hustota proudových čar, bude proud a tedy i naměřený odpor v obou případech jiný. Pokud neřekneme výslovně jinak, budeme předpokládat, že napětí je k vodiči přiloženo podle obr. 27.8b.



Obr. 27.8 Dva způsoby jak přiložit napětí k vodivé tyči. Předpokládáme, že tmavě šedé přívody mají zanedbatelný odpor. Jestliže jsou připojeny podle (a), je naměřený odpor větší než při připojení podle (b).

Nezabývejme se nyní určitým rezistorem, ale materiálem, z něhož je rezistor vyroben. Namísto napětí přiloženého k rezistoru použijeme intenzitu elektrického pole E

v určitém bodě materiálu rezistoru. Namísto celkového proudu I procházejícího rezistorem budeme pracovat s hustotou proudu \mathbf{J} ve sledovaném bodě. Namísto odporu R celého vodiče použijeme veličinu nazvanou **rezistivita** (dříve *měrný odpor*) materiálu, označovanou ρ a definovanou vztahem

$$\rho = \frac{E}{J} \quad (\text{definice rezistivity}). \quad (27.10)$$

(Srovnejte tento vztah s definicí (27.8).)

Dosadíme-li do definičního vztahu (27.10) jednotky E a J v soustavě SI, odvodíme, že jednotkou rezistivity ρ je $\Omega \cdot \text{m}$:

$$\frac{\text{jednotka } E}{\text{jednotka } J} = \frac{\text{V} \cdot \text{m}^{-1}}{\text{A} \cdot \text{m}^{-2}} = \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot \text{m} = \Omega \cdot \text{m}.$$

(Nezaměňujte jednotku rezistivity *ohm-metr* a měřicí přístroj *ohmmetr*, který se používá k měření odporu.) V tab. 27.1 jsou uvedeny rezistivity některých materiálů.

Tabulka 27.1 Rezistivity ρ a teplotní součinitelé rezistivity α některých materiálů při pokojové teplotě (20 °C)

MATERIÁL	$\frac{\rho}{\Omega \cdot \text{m}}$	$\frac{\alpha}{\text{K}^{-1}}$
	<i>typické kovy</i>	
stříbro	$1,62 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
měď	$1,69 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$
hliník	$2,75 \cdot 10^{-8}$	$4,4 \cdot 10^{-3}$
wolfram	$5,25 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-3}$
železo	$9,68 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
platina	$10,6 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$
manganin ^a	$48,2 \cdot 10^{-8}$	$0,002 \cdot 10^{-3}$
	<i>typické polovodiče</i>	
křemík čistý	$2,5 \cdot 10^3$	$-70 \cdot 10^{-3}$
křemík typu ^b n	$8,7 \cdot 10^{-4}$	
křemík typu ^c p	$2,8 \cdot 10^{-3}$	
	<i>typické izolanty</i>	
sklo	$10^{10} - 10^{14}$	
tavený křemen	$\doteq 10^{16}$	

^a Speciální slitina s malou hodnotou α .

^b Čistý křemík dopovaný fosforem tak, že počet nosičů náboje v jednotkovém objemu je 10^{23} m^{-3} .

^c Čistý křemík dopovaný hliníkem tak, že počet nosičů náboje v jednotkovém objemu je 10^{23} m^{-3} .

Rov. (27.10) můžeme přepsat do vektorového tvaru

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \quad (27.11)$$

Vztahy (27.10) a (27.11) platí jen pro elektricky **izotropní** materiály, tedy materiály, jejichž elektrické vlastnosti jsou stejné ve všech směrech.

Často používáme také veličinu nazývanou **konduktivita** materiálu, označovanou σ . Je definována jako převrácená hodnota rezistivity

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (\text{definice konduktivity}). \quad (27.12)$$

Jednotkou konduktivity v SI je $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Definice konduktivity σ nám umožňuje napsat rov. (27.11) v ekvivalentním tvaru

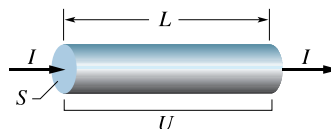
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (27.13)$$

Výpočet odporu pomocí rezistivity

Nejprve musíme upozornit na významný rozdíl:

Odpor (neboli rezistance) je vlastnost objektu (vodiče, rezistoru). Rezistivita je vlastnost materiálu.

Známe-li rezistivitu látky, jako je například měď, můžeme vypočítat odpor vodiče z této látky vyrobeného. Nechť S je průřez vodiče, L jeho délka a nechť mezi jeho konci je napětí U (obr. 27.9). Jestliže proudové čáry znázorňující hustotu proudu jsou stejnoměrně rozloženy v celém



Obr. 27.9 Napětí U přiložené mezi konce vodiče o délce L a průřezu S způsobí, že vodičem prochází proud I .

průřezu vodiče, budou elektrické pole a hustota proudu ve všech bodech uvnitř vodiče konstantní a podle rov. (25.42) a (27.5) platí

$$E = \frac{U}{L} \quad \text{a} \quad J = \frac{I}{S}. \quad (27.14)$$

Z rov. (27.14) dosadíme do rov. (27.10):

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{U/L}{I/S}. \quad (27.15)$$

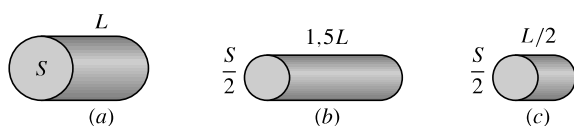
Avšak U/I je odpor R , takže z rov. (27.15) plyne

$$R = \rho \frac{L}{S}. \quad (27.16)$$

Vztah (27.16) je použitelný pouze v případě homogenního izotropního vodiče konstantního průřezu, k němuž je přiloženo napětí v souladu s obr. 27.8b.

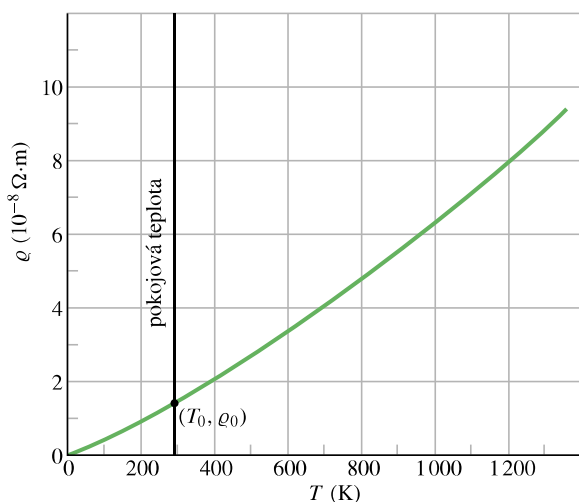
Makroskopické veličiny U , I a R jsou veličiny, které odečítáme přímo na měřicích přístrojích, když měříme na určitém vodiči v elektrickém obvodu. Mikroskopické veličiny \mathbf{E} , \mathbf{J} a ρ používáme, když se zabýváme elektrickými vlastnostmi materiálu.

KONTROLA 3: Na obrázku jsou nakresleny tři válcové měděné vodiče a je vyznačen jejich průřez a délka. Uspořádejte vodiče sestupně podle proudu, který jimi bude protékat, jestliže k jejich koncům přiložíme napětí U .



Závislost na teplotě

Hodnoty většiny fyzikálních veličin se mění s teplotou a ani rezistivita není výjimkou. Na obr. 27.10 je jako příklad znázorněna rezistivita mědi v širokém rozsahu teplot.



Obr. 27.10 Rezistivita mědi v závislosti na teplotě. Tečka na křivce vyznačuje obvyklý referenční bod ($T_0 = 20^\circ\text{C}$, $\rho_0 = 1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$).

Vztah mezi teplotou a rezistivitou mědi je téměř lineární v širokém teplotním rozsahu a toto tvrzení platí i pro jiné kovy. Znázorněnou závislost můžeme aproximovat lineárním vztahem

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0), \quad (27.17)$$

kteří je dostatečně přesný pro většinu inženýrských výpočtů. Zde T_0 je určitá zvolená referenční teplota a ρ_0 je rezistivita při této teplotě. Obvykle volíme $T_0 = 20^\circ\text{C}$, což je tzv. pokojová teplota; při ní je rezistivita mědi $\rho_0 = 1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

V rov. (27.17) vystupuje jen rozdíl teplot a nezáleží tedy na tom, zda použijeme Celsiovu nebo Kelvinovu teplotní stupnici, protože velikost teplotního stupně je v obou stupnicích stejná. Veličina α v rov. (27.17) se nazývá **teplotní součinitel rezistivity** a její hodnota se určí tak, aby se rezistivita vypočtená z rov. (27.17) co nejvíce blížila rezistivitě určené experimentálně ve zvoleném rozsahu teplot. Hodnoty α pro některé kovy jsou uvedeny v tab. 27.1.

Vzducholoď Hindenburg

Když se zepelín* *Hindenburg* připravoval k přistání, manévrovací lana byla spuštěna dolů k pozemní obsluze. Protože pršelo, lana byla mokrá a mohla tedy vést proud. Lana tak uzemnila kovovou konstrukci vzducholodi, k níž byla upevněna. Mokrá lana tím vytvořila vodivou dráhu mezi konstrukcí vzducholodi a zemí, takže elektrostatický potenciál kovové konstrukce byl stejný jako potenciál země. Nebyl však uzemněn vnější plášť vzducholodi. Přitom *Hindenburg* byl první zepelín, jehož vnější plášť byl nařten těsnicím materiálem o vysoké rezistivitě. Tak se stalo, že plášť měl stále elektrický potenciál atmosféry ve výšce asi 43 m. Protože byla právě bouřka, byl tento potenciál poměrně vysoký vzhledem k potenciálu země.

Při manévrování s lany se pravděpodobně roztrhla jedna z nádrží vodíku, ten unikl do prostoru mezi nádrží a vnější plášť a způsobil pozorované vlnění pláště. To byla nebezpečná situace. Plášť byl vlhký, pokrytý vodivou dešťovou vodou a jeho potenciál byl výrazně odlišný od potenciálu kostry vzducholodi. Podél vlhkého pláště zřejmě protekl elektrický náboj a potom přeskočila jiskra ke kovové konstrukci vzducholodi přes prostor vyplněný uniklým vodíkem a vodík zapálila. Oheň se během okamžiku rozšířil k ostatním nádržím s vodíkem a vzducholoď padala k zemi. Kdyby měl těsnicí materiál vnějšího pláště *Hindenburgu* menší rezistivitu, jak tomu bylo u zepelínů před ním a po něm, žádná katastrofa by *Hindenburg* pravděpodobně nepotkala.

* Hrabě Ferdinand von Zeppelin (1838–1917) byl německý inženýr a průkopník letectví. Zkonstruoval úspěšně vzducholodi doutníkového tvaru, vyztužené hliníkovou konstrukcí, plněné plynem a poháněné benzinovými motory. Společnost Luftschiffsbau Zeppelin, kterou založil, vyrobila přes sto vzducholodí nazývaných zepelíny.

PŘÍKLAD 27.5

(a) Jaká je intenzita elektrického pole v měděném vodiči v příkladu 27.3?

ŘEŠENÍ: V př. 27.3a jsme vypočítali, že hustota proudu J je $6,7 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. V tab. 27.1 najdeme rezistivitu mědi $1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Pomocí rov. (27.11) vypočteme

$$E = \rho J = (1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})(6,7 \cdot 10^3 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}) = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad (\text{měď}). \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je intenzita elektrického pole v křemíku typu n z př. 27.4?

ŘEŠENÍ: V př. 27.4 jsme vypočítali, že $J = 6500 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. V tab. 27.1 najdeme $\rho = 8,7 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{m}$. Pomocí rov. (27.11) vypočteme

$$E = \rho J = (8,7 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{m})(6500 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}) = 5,7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \quad (\text{křemík typu } n). \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že intenzita elektrického pole v polovodiči je mnohem větší než intenzita elektrického pole v měděném vodiči. Jestliže si sami příklad přepočítáte, zjistíte, že tento rozdíl je způsoben velmi odlišnou rezistivitou obou materiálů. Příčina, proč je v polovodiči mnohem větší intenzita elektrického pole, je obdobná příčině toho, že driftová rychlost elektronů v polovodiči je mnohem větší než driftová rychlost elektronů v kovu (viz př. 27.4). Jsou-li hustoty proudu v obou vzorcích srovnatelné, musí být intenzita elektrického pole v polovodiči mnohem větší, aby elektrony byly elektrickým polem více urychleny a získaly vyšší driftovou rychlost.

PŘÍKLAD 27.6

Kus železa má tvar kvádru o rozměrech $1,2 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$.

(a) Jaký je odpor tohoto kvádru měřený mezi protilehlými čtvercovými stěnami?

ŘEŠENÍ: Podle tab. 27.1 je rezistivita železa při pokojové teplotě $9,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Čtvercové plochy na koncích kvádru mají obsah $(1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = 1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Pro odpor dostáváme z rov. (27.16)

$$R = \rho \frac{L}{S} = \frac{(9,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})(0,15 \text{ m})}{(1,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)} = 1,0 \cdot 10^{-4} \Omega = 100 \mu\Omega. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaký je odpor železného kvádru měřený mezi dvěma protilehlými obdélníkovými stěnami?

ŘEŠENÍ: Obsah obdélníka je $(1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})(0,15 \text{ m}) = 1,80 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Z rov. (27.16) plyne

$$R = \rho \frac{L}{S} = \frac{(9,68 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})(1,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})}{(1,80 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2)} = 6,5 \cdot 10^{-7} \Omega = 0,65 \mu\Omega. \quad (\text{Odpověď})$$

Tento odpor je mnohem menší než v předcházejícím případě, protože vzdálenost L je menší a plocha S je větší. V obou částech příkladu předpokládáme, že hustota proudu v železe je homogenní (jako na obr. 27.8b). V opačném případě by rov. (27.16) nebyla platná.

27.5 OHMŮV ZÁKON

Jak jsme již uvedli v čl. 27.4, rezistor je vodič o určitém odporu nezávislém na tom, jaká je velikost nebo polarita přiloženého napětí. Některé vodivé součástky však mohou mít odpor, který na přiloženém napětí závisí.

Obr. 27.11a naznačuje, jak takovou součástku poznáme. Přiložíme k ní napětí U , měníme jeho velikost a polaritu a měříme proud I procházející součástkou. Dohodneme se, že polaritu napětí označíme jako kladnou, jestliže levá svorka na obr. 27.11 bude mít vyšší potenciál než pravá svorka. Směr proudu zleva doprava budeme považovat za kladný a označíme znaménkem plus (+). Opačnou polaritu napětí U (kdy pravá svorka má vyšší potenciál) pak označíme jako zápornou a odpovídající proud označíme znaménkem minus (-).

Na obr. 27.11b je nakreslen graf závislosti proudu I na napětí U pro jistou součástku. Grafem této závislosti je přímka procházející počátkem, takže poměr I/U (což je směrnice této přímky) je stejný pro všechny hodnoty napětí U . To znamená, že odpor $R = U/I$ součástky nezávisí na velikosti a polaritě přiloženého napětí U .

Na obr. 27.11c je nakreslen graf pro jinou součástku. Proud touto součástkou prochází pouze tehdy, když polarita přiloženého napětí je kladná a napětí je větší než asi 1,5 V. Závislost mezi proudem I a napětím U u této součástky je výrazně nelineární.

Oba uvedené typy součástek odlišíme tak, že řekneme, že některé se řídí Ohmovým zákonem a jiné součástky nikoli.

Pro součástku řídící se Ohmovým zákonem je proud jí protékající přímo úměrný přiloženému napětí.

(Ohmův „zákon“, jak jsme viděli, je splněn jen v určitých situacích, z historických důvodů se však přesto označuje jako zákon.) Součástka charakterizovaná grafem na

obr. 27.11b splňuje Ohmův zákon (je to rezistor o odporu $1\,000\ \Omega$). Součástka z obr. 27.11c je polovodičová dioda s přechodem p - n ; ta se Ohmovým zákonem neřídí. V moderní mikroelektronice se téměř všude používají součástky, pro které Ohmův zákon neplatí. Každá kalkulačka je takových součástek plná.

Často se mívá, že vztahem $U = RI$ je vyjádřen Ohmův zákon. To však *není* přesné. Tato rovnice je *definiční rovnicí* pro odpor a dá se použít pro všechny vodiče, ať už pro ně Ohmův zákon platí nebo ne. Jestliže měříme napětí U na nějaké součástce a proud I , který součástkou prochází (může to být i dioda), vždy můžeme spočítat její odpor při daném napětí U podle vztahu $R = U/I$; ten obecně nemusí být konstantní. Podstatou Ohmova zákona je tvrzení, že odpor R konstantní *je*, tedy že graf závislosti proudu na napětí je lineární neboli že odpor R nezávisí* na napětí U .

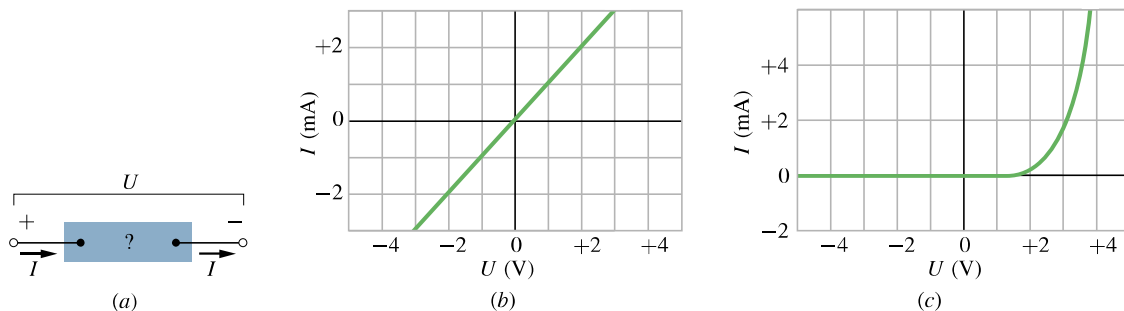
Ohmův zákon tvrdí, že odpor R je vlastností *součástky* a nezávisí na velikosti ani polaritě přiloženého napětí.

Ohmův zákon můžeme vyjádřit obecněji, když se zaměříme na vodivé *materiály*, nikoli pouze na vodiče nebo součástky. Analogií vztahu $U = RI$ je materiálový vztah (27.11), tj. $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$.

Vodivý *materiál* splňuje Ohmův zákon, jestliže jeho rezistivita nezávisí na velikosti a směru intenzity přiloženého elektrického pole.

Všechny homogenní materiály, ať už to jsou vodiče, jako měď, nebo polovodiče, jako je křemík (dopovaný nebo čistý), splňují velmi dobře Ohmův zákon, není-li intenzita elektrického pole příliš silná. Odchylky od Ohmova zákona se projeví až ve velmi silných polích. Ovšem různé *sou-*

* Obecně zavádíme *diferenciální odpor* $R_d = dU/dI$. Pro součástku neřídící se Ohmovým zákonem není totožný s odporem $R = U/I$. Pro součástku řídící se Ohmovým zákonem platí $R_d = R$ vždy.



Obr. 27.11 (a) Součástka, k jejímž svorkám je přiloženo napětí U , které vyvolá průchod proudu I . (b) Graf závislosti proudu I na napětí U , je-li součástkou rezistor o odporu $1\,000\ \Omega$. (c) Stejný graf, je-li součástkou polovodičová dioda s přechodem p - n .

částky z těchto materiálů sestavené v různém uspořádání (např. přechod p - n) se již Ohmovým zákonem neřídí.

KONTROLA 4: V tabulce jsou uvedeny hodnoty proudu I (v ampérech) procházejícího dvěma různými součástkami pro několik hodnot napětí U (ve voltech). Pomocí těchto údajů určete, pro kterou součástku neplatí Ohmův zákon.

SOUČÁSTKA 1		SOUČÁSTKA 2	
$\frac{U}{V}$	$\frac{I}{A}$	$\frac{U}{V}$	$\frac{I}{A}$
2,00	4,50	2,00	1,50
3,00	6,75	3,00	2,20
4,00	9,00	4,00	2,80

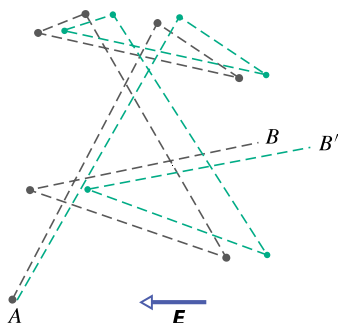
27.6 MIKROSKOPICKÝ POHLED NA OHMŮV ZÁKON

Abychom zjistili, *proč* pro určité materiály platí Ohmův zákon, musíme se podívat podrobně na proces vedení proudu na atomární úrovni. Zde se budeme zabývat pouze vodivostí kovů, jako je např. měď. Náš rozbor bude založen na *modelu volných elektronů*. Podle tohoto modelu se vodivostní elektrony mohou volně pohybovat v celém objemu kovu podobně jako molekuly plynu v uzavřené nádobě. Pro vysvětlení vodivosti budou podstatné srážky elektronů s atomy kovu, zatímco vzájemné srážky mezi elektrony nemění celkovou energii ani hybnost elektronového plynu a nejsou tedy pro vodivost podstatné.

Podle klasické fyziky by rychlosti elektronů měly odpovídat Maxwellovu rozdělení rychlostí podobně jako rychlosti molekul v plynu. Při takovém rozdělení (viz čl. 20.7) by střední rychlost elektronů byla úměrná odmocnině z absolutní teploty. Pohyb elektronů se však neřídí zákony fyziky klasické, ale kvantové. Ukazuje se, že

kvantové realitě odpovídá mnohem více předpoklad, že se všechny elektrony pohybují stejnou rychlostí v_F (Fermiho rychlost) téměř nezávislou na teplotě. Pro měď je $v_F = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Jestliže přiložíme elektrické pole ke kovovému vodiči, poněkud se změní chaotický pohyb elektronů a elektrony se začnou velmi pomalu pohybovat *driftovou rychlostí* v_d ve směru opačném, než je směr intenzity elektrického pole. Jak jsme viděli v př. 27.3b, driftová rychlost v typickém kovovém vodiči je asi $4 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tedy o mnoho řádů menší než Fermiho rychlost ($1,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$). Obr. 27.12 naznačuje souvislost mezi oběma rychlostmi. Šedé čáry znázorňují možné náhodné dráhy elektronu bez vnějšího elektrického pole. Elektron se šestkrát srazí, než se dostane z bodu A do bodu B . Zelené čáry znázorňují, jak by se mohl elektron pohybovat v elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} . Vidíme, že elektron je vytrvale unášen doprava a dostane se nakonec do bodu B' , a ne do bodu B . Obr. 27.12 byl nakreslen za předpokladu, že $v_d \doteq 0,02v_F$. Ve skutečnosti je $v_d \doteq 10^{-13}v_F$ a drift znázorněný na obrázku je tedy mnohonásobně zvětšen.



Obr. 27.12 Šedé čáry znázorňují chaotický pohyb elektronu z bodu A do bodu B bez přiloženého elektrického pole. Zelené čáry ukazují, jak by mohla trajektorie elektronu vypadat v elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} . V obou případech se elektron šestkrát srazí. Všimněte si stálého unášení elektronu ve směru $-\mathbf{E}$. (Ve skutečnosti by zelené čáry měly být lehce zakřiveny, aby mezi srážkami odpovídaly parabolickým dráhám elektronu v elektrickém poli.)

Pohyb elektronu v elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} je tedy kombinací chaotického pohybu způsobeného náhodnými srážkami a unášivého pohybu vyvolaného elektrickým polem. Když uvážíme všechny volné elektrony, vidíme, že se (v každém okamžiku) neuspořádaně pohybují ve všech možných směrech, takže se jejich chaotické pohyby navzájem vykompenzují (přesněji: vektorový součet rychlostí chaotického pohybu všech elektronů je v každém okamžiku roven nule) a nepřispívají k unášivému pohybu driftovou

rychlostí. Driftová rychlost je tedy dána jen působením elektrického pole na elektrony (mezi srážkami).

Nachází-li se elektron o hmotnosti m v elektrickém poli, jehož intenzita má velikost E , pohybuje se podle druhého Newtonova zákona se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \quad (27.18)$$

Elektrony se srážejí tak, že po typické srážce elektron úplně „zapomene“ — můžeme-li to tak říci — na svůj předcházející pohyb. Každý elektron se tedy po každé nahodilé srážce začíná znovu pohybovat úplně náhodným směrem. Je-li střední doba mezi srážkami τ , elektrony získají střední driftovou rychlost $v_d = a\tau$. A nejen to — kdybychom stanovili driftové rychlosti všech elektronů v libovolném časovém okamžiku, zjistili bychom, že jejich střední driftová rychlost je rovněž $a\tau$. V libovolném okamžiku tedy mají elektrony střední driftovou rychlost $v_d = a\tau$. Pomocí rov. (27.18) vypočteme

$$v_d = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \quad (27.19)$$

Dosadíme-li tento výsledek do rov. (27.7) ($J = nev_d$), dostaneme

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{eE\tau}{m}$$

a odtud plyne

$$E = \left(\frac{m}{e^2 n \tau} \right) J.$$

Porovnáním s rov. (27.11) ($E = \rho J$) dostaneme

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}. \quad (27.20)$$

Vztah (27.20) můžeme považovat za potvrzení toho, že pro kovy platí Ohmův zákon, pokud prokážeme, že pro kovy je rezistivita ρ nezávislá na intenzitě přiloženého elektrického pole \mathbf{E} . Protože n , m a e jsou konstanty, zbývá nám zdůvodnit, že střední doba mezi srážkami τ je konstantní, nezávislá na intenzitě přiloženého elektrického pole. Dobu τ však můžeme opravdu považovat za konstantní, protože driftová rychlost v_d , kterou elektrony získají působením elektrického pole, je řádově 10^{13} krát menší než Fermiho rychlost v_F , takže přiložené pole prakticky neovlivní rychlost elektronů, a tedy ani τ .

K popisu elektronů v kovu z hlediska kvantové teorie se ještě vrátíme v čl. 42.5.

PŘÍKLAD 27.7

(a) Jaká je střední volná doba τ mezi srážkami pro vodivostní elektrony v mědi?

ŘEŠENÍ: Z rov. (27.20) plyne

$$\tau = \frac{m}{ne^2\varrho}$$

Počet n vodivostních elektronů v jednotce objemu mědi jsme spočítali v př. 27.3b, rezistivitu mědi ϱ najdeme v tab. 27.1. Jmenovatel zlomku má tedy hodnotu

$$(8,47 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2(1,69 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}) = \\ = 3,66 \cdot 10^{-17} \text{ C}^2 \cdot \Omega \cdot \text{m}^{-2} = 3,66 \cdot 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1},$$

kde jsme výslednou jednotku určili takto:

$$\frac{\text{C}^2 \cdot \Omega}{\text{m}^2} = \frac{\text{C}^2 \cdot \text{V}}{\text{m}^2 \cdot \text{A}} = \frac{\text{C}^2 \cdot \text{J} \cdot \text{C}^{-1}}{\text{m}^2 \cdot \text{C} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pro střední volnou dobu τ mezi srážkami vychází

$$\tau = \frac{(9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})}{(3,66 \cdot 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1})} = 2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je střední volná dráha λ elektronu mezi dvěma srážkami? Předpokládejme, že Fermiho rychlost je $v_F = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

ŘEŠENÍ: V čl. 20.6 jsme definovali střední volnou dráhu jako střední vzdálenost, kterou částice proběhne mezi dvěma srážkami. V tomto příkladě je doba mezi dvěma srážkami volného elektronu τ a rychlost pohybu elektronu je v_F , takže

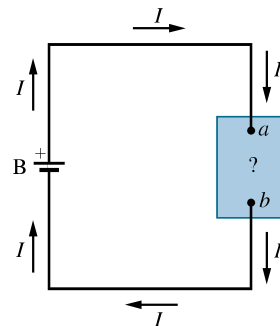
$$\lambda = \tau v_F = (2,5 \cdot 10^{-14} \text{ s})(1,6 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) = \\ = 4,0 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 40 \text{ nm}. \quad (\text{Odpověď})$$

To je asi 150krát větší délka než vzdálenost mezi nejbližšími sousedními atomy v krystalové mřížce mědi.

27.7 VÝKON V ELEKTRICKÝCH OBVODECH

V elektrickém obvodu na obr. 27.13 je baterie B spojena s nějakou blíže neurčenou vodivou součástkou pomocí vodičů, o nichž předpokládáme, že jejich odpor je zanedbatelný. Součástkou může být rezistor, akumulátorová baterie nebo cokoli jiného. Na svorkách baterie je napětí U , a protože baterie je spojena vodiči se součástkou, je stejné napětí i na svorkách součástky, přičemž svorka a má vyšší potenciál než svorka b .

Protože vývody baterie jsou *vně* baterie vodivě spojeny a napětí baterie je konstantní, prochází obvodem ustálený proud I od svorky a ke svorce b . Náboj, který projde mezi těmito svorkami za dobu dt , je $I dt$. Podél trajektorie, po



Obr. 27.13 Baterie B dodává proud I do obvodu s nějakou blíže neurčenou vodivou součástkou.

níž se tento náboj dQ pohybuje, poklesne elektrický potenciál o hodnotu U , a proto elektrická potenciální energie poklesne o hodnotu

$$dE_p = dQ U = I dt U.$$

Zákon zachování energie nám říká, že pokles elektrické potenciální energie podél trajektorie od a do b musí být doprovázen přeměnou energie do nějaké jiné formy. **Výkon** P s tímto přenosem spojený se definuje jako rychlost přenosu energie, tj. dE_p/dt , takže

$$P = UI \quad (\text{výkon} = \text{rychlost} \\ \text{přenosu elektrické energie}). \quad (27.21)$$

Jednotkou výkonu podle rov. (27.21) je voltampér. Platí

$$1 \text{ V} \cdot \text{A} = \left(1 \frac{\text{J}}{\text{C}}\right) \left(1 \frac{\text{C}}{\text{s}}\right) = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W}.$$

Výkon daný rov. (27.21) udává rychlost přenosu energie od baterie k součástce. Je-li součástkou elektromotor připojený k nějakému mechanickému zařízení, elektrická energie se přeměňuje v práci tohoto zařízení. Je-li součástkou akumulátorová baterie, nabíjí se a elektrická energie se přeměňuje v chemickou energii uloženou v akumulátoru. Je-li součástkou rezistor, elektrická energie je v něm disipována.

Pro rezistor můžeme pomocí rov. (27.8) ($R = U/I$) a (27.21) napsat vztah pro rychlost disipace energie, tedy disipovaný výkon, ve tvaru

$$P = I^2 R \quad (\text{disipace energie rezistorem}) \quad (27.22)$$

neboli

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (\text{disipace energie rezistorem}). \quad (27.23)$$



Spirála z drátu uvnitř opékače topinek má značný odpor. Když spirálou prochází proud, elektrická energie se přeměňuje v teplo a teplota spirály vzrůstá. Ze spirály pak vychází viditelné světlo i infračervené záření, které chléb opeče (nebo připálí).

Co se stane s touto energií? Pohybující se náboje se srážejí s atomy v rezistoru a předávají část své energie těmto atomům, a tím se zvětšuje vnitřní energie materiálu. To vede ke zvyšování teploty rezistoru a ten se stává zdrojem tepelného toku. Tomuto nevratnému procesu říkáme **disipace energie**.

Musíme však odlišovat rov. (27.22) a (27.23) od rov. (27.21). Vztah $P = IU$ se dá použít vždy, když jde o přenos elektrické energie v obecné situaci, zatímco vztahy $P = I^2R$, či $P = U^2/R$ platí pouze v případě přeměny elektrické potenciální energie v rezistoru. (V elektrotechnice se zpravidla mluví o Joulově teple nebo s ohledem na funkci rezistoru o ztrátovém, resp. tepelném výkonu rezistoru.)

KONTROLA 5: K rezistoru o odporu R je přiloženo napětí U a prochází jím proud I . Seřadte sestupně ztrátové výkony (rychlosti přeměny elektrické energie v teplo) v rezistoru při těchto změnách v obvodu: (a) napětí U se zdvojnásobí a odpor R se nezmění, (b) proud I se zdvojnásobí a odpor R se nezmění, (c) odpor R se zdvojnásobí a napětí U se nezmění, (d) odpor R se zdvojnásobí a proud I se nezmění.

PŘÍKLAD 27.8

Vodič zhotovený ze slitiny niklu, chromu a železa (nazývané nichrom) má odpor $R = 72 \Omega$. Určete výkon elektrické energie v těchto případech: (1) napětí na celém vodiči je 120 V, (2) vodič rozpůlíme a napětí 120 V je přiloženo ke každé polovině vodiče.

ŘEŠENÍ: Užitím rov. (27.23) v prvním případě dostaneme

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{(120 \text{ V})^2}{72 \Omega} = 200 \text{ W.} \quad (\text{Odpověď})$$

Ve druhém případě je odpor poloviny drátu $(72 \Omega)/2 = 36 \Omega$, takže rychlost disipace energie pro každou polovinu drátu je

$$P' = \frac{(120 \text{ V})^2}{36 \Omega} = 400 \text{ W.} \quad (\text{Odpověď})$$

Celkový výkon v obou polovinách je 800 W, tedy čtyřikrát větší než v celém vodiči v prvním případě. Mohlo by vás tedy napadnout, že byste si koupili ohřívací spirálu, rozpůlili ji, znovu zapojili paralelně a získali čtyřikrát více tepla. Proč to nejde?

PŘÍKLAD 27.9

Vodičem o délce $L = 2,35 \text{ m}$ a průměru $d = 1,63 \text{ mm}$ prochází proud $I = 1,24 \text{ A}$. Ztrátový výkon ve vodiči je $P = 48,5 \text{ mW}$. Z čeho je vodič vyroben?

ŘEŠENÍ: Materiál vodiče určíme podle jeho rezistivity. Užitím rov. (27.16) a (27.22) dostaneme

$$P = I^2 R = \frac{I^2 \rho L}{S} = \frac{4I^2 \rho L}{\pi d^2},$$

kde $S = \pi d^2/4$ je průřez vodiče. Rezistivita materiálu, z něhož je vodič vyroben, tedy je

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\pi P d^2}{4I^2 L} = \frac{\pi (48,5 \cdot 10^{-3} \text{ W})(1,63 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{4(1,24 \text{ A})^2 (2,35 \text{ m})} = \\ &= 2,80 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

V tab. 27.1 zjistíme, že takovou rezistivitu má hliník.

27.8 POLOVODIČE

Polovodičové součástky jsou srdcem mikroelektronické revoluce, která tak výrazně ovlivnila náš život. V tab. 27.2 jsou porovnány vlastnosti křemíku, typického polovodiče, a vlastnosti mědi, typického kovového vodiče. Vidíme, že čistý křemík má mnohem méně nosičů náboje, mnohem větší rezistivitu a velký záporný teplotní součinitel rezistivity. S rostoucí teplotou rezistivita mědi roste a rezistivita čistého křemíku naopak klesá.

Tabulka 27.2 Některé elektrické vlastnosti mědi a křemíku^a

VLASTNOST	MĚĎ	KŘEMÍK
druh materiálu	kov	polovodič
koncentrace nosičů náboje n/m^{-3}	$9 \cdot 10^{28}$	$1 \cdot 10^{16}$
rezistivita $\rho/\Omega \cdot m$	$2 \cdot 10^{-8}$	$3 \cdot 10^3$
teplotní součinitel rezistivity α/K^{-1}	$+4 \cdot 10^{-3}$	$-70 \cdot 10^{-3}$

^a Kvůli snadnějšímu porovnání jsou hodnoty zaokrouhleny na jednu platnou číslici.

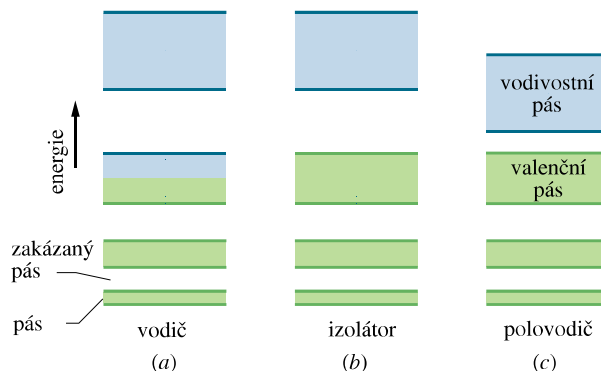
Rezistivita čistého křemíku je tak vysoká, že je to prakticky izolátor, a v mikroelektronice se téměř nepoužívá. Použití křemíku umožňuje okolnost, že se jeho rezistivita dá snížit kontrolovatelným způsobem přidáním nepatrného množství určitých cizích, *příměsových atomů* (viz tab. 27.1). Tento proces se nazývá **dopování**.

Rozdíl v rezistivitě (a tedy i v konduktivitě) polovodičů a kovových vodičů se dá pochopit, jestliže se podrobněji podíváme na **energiové hladiny** jejich elektronů. V čl. 8.9 jsme viděli, že energie elektronů v izolovaném atomu je *kvantována*, to znamená, že je omezena jen na určité hodnoty neboli *hladiny*, jak je nakresleno na obr. 8.17. Elektron může *obsadit* kteroukoli z těchto energiových hladin (tzn. může mít jí odpovídající energii), ale nemůže mít žádnou energii mezi hladinami.

Elektrony v pevných látkách také obsazují kvantované hladiny, ale vzájemná blízkost atomů způsobuje „rozmazení“ nesmírného počtu jejich energiových hladin do několika **pásů** (obr. 27.14). Elektron může obsadit energiovou hladinu uvnitř pásu, ale nemůže mít žádnou energii připadající do **zakázaných pásů**, které energiové pásy oddělují. Počet elektronů, které mohou obsadit jednu energiovou hladinu, je navíc omezen zákony kvantové fyziky. Elektron může získat větší energii *jedine* tak, že dostane energii dostačující k obsazení nezaplněné vyšší energiové hladiny buď v téměř, nebo ve vyšším pásu.

V kovu, jako je měď (obr. 27.14a), se nejvyšší obsazená hladina energie nachází blízko středu energiového pásu. Elektrony tak mohou snadno přejít na velké množství volných hladin výše v pásu, i když dostanou jen malé množství energie. Energii jim může dodat elektrické pole přiložené k vodiči. Elektrické pole uvádí některé z elektronů tohoto pásu do pohybu vodičem, zvyšuje jejich kinetickou energii, a tak je pozvedá na vyšší energiové hladiny. Takové elektrony jsou tedy **vodivostní elektrony** a tvoří proud vodičem. Elektrony v nižších pásích se nemohou podílet na vedení proudu, protože přiložené elektrické pole jim nedokáže poskytnout energii potřebnou k přechodu na prázdné hladiny.

V izolátoru (obr. 27.14b) je nejvyšší obsazený pás úplně zaplněn. Nejbližší vyšší dostupné prázdné energiové



Obr. 27.14 Energiové hladiny elektronu v pevné látce tvoří pásy dovolených a zakázaných energií. Zelenou barvou jsou nakresleny částečně nebo úplně zaplněné pásy. (a) V kovovém vodiči leží nejvyšší energiová hladina uprostřed energiového pásu (pás je částečně zaplněn). (b) V izolátoru je nejvyšší obsazený pás úplně zaplněn a zakázaný pás mezi ním a prázdným pásem umístěným nad ním je poměrně široký. (c) Polovodič připomíná izolátor s tím rozdílem, že zakázaný pás mezi valenčním a vodivostním pásem je poměrně úzký.

hladiny leží v prázdném pásu, který je oddělen od nejvyššího zaplněného pásu značně širokým zakázaným pásem. Dokud přiložené elektrické pole nedodá elektronům energii dostatečnou k přeskočení na prázdné hladiny, nemůže procházet žádný proud.

Polovodič (obr. 27.14c) se podobá izolátoru s tím rozdílem, že zakázaný pás mezi nejvyšším zaplněným pásem (nazývaným **valenční pás**) a prázdným pásem umístěným nad ním (nazývaným **vodivostním pásem**) je poměrně úzký, takže pravděpodobnost, že tepelně excitovaný elektron přeskóčí přes zakázaný pás, není zanedbatelně malá. Mnohem významnější však je, že určité záměrně přidané příměsi mohou dodávat nosiče náboje do vodivostního pásu. Většina polovodičových součástek, jako např. tranzistory nebo diody, se skládá z několika oblastí křemíku dopovaných různými příměsovými atomy.

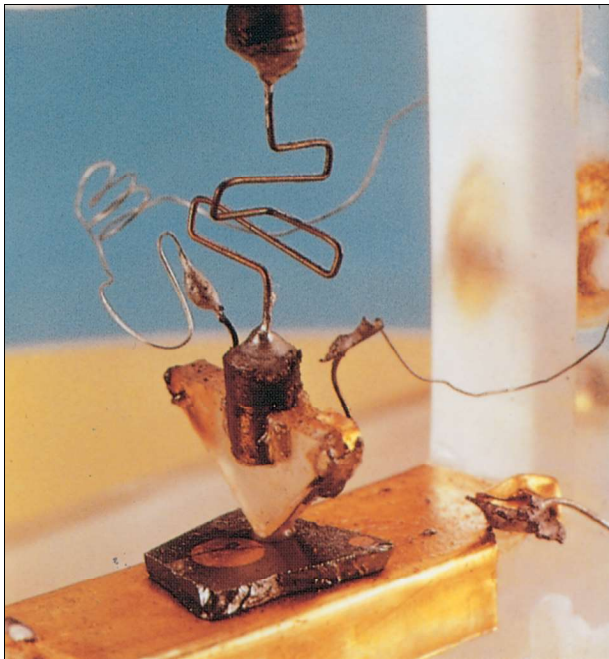
Vraťme se zpět k rov. (27.20) pro rezistivitu vodiče

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}, \quad (27.24)$$

kde n je počet nosičů náboje v jednotkovém objemu a τ je střední volná doba mezi srážkami. (Tuto rovnici jsme odvodili pro vodiče, ale dá se použít i pro polovodiče.) Položme si nyní otázku, jak se veličiny n a τ mění, když roste teplota.

Ve vodiči je koncentrace n velká a prakticky konstantní, její hodnota se s teplotou významně nemění. Vzrůst rezistivity kovů s teplotou (obr. 27.10) je způsoben vzrůstem frekvence srážek nosičů náboje, a tedy snížením střední volné doby τ mezi srážkami v rov. (27.24).

V polovodiči je n malé, ale s rostoucí teplotou se zvětšuje velmi rychle, protože teplem je excitováno stále více nosičů náboje. Rezistivita polovodiče tedy s rostoucí teplotou klesá, což vyjadřuje záporné znaménko teplotního součinitele rezistivity v tab. 27.2. Podobně jako v kovu se i v polovodiči zvyšuje frekvence srážek, ale tento jev je překryt rychlým nárůstem počtu nosičů elektrického náboje.



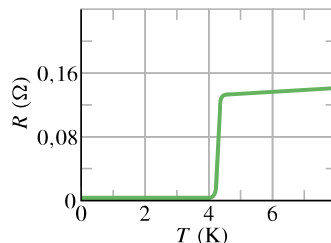
První tranzistor, elektronická součástka vyrobená z polovodičového materiálu. Dnes najdeme tisíce a miliony takových součástek na tenké polovodičové destičce o velikosti několika milimetrů nebo centimetrů.

27.9 SUPRAVODIČE

Holandský fyzik Kamerlingh Onnes v roce 1911 objevil, že při velmi nízkých teplotách, nižších než asi 4 K, rezistivita rtuti úplně vymizí (obr. 27.15). Tento jev, nazývaný **supravodivost**, v sobě skrývá velké možnosti využití v moderních zařízeních, protože by bylo velice užitečné, kdyby mohl elektrický náboj téci bez jakýchkoli ztrát. Například proud vybuzeň v supravodivém prstenci přetrvává několik roků, aniž by se významněji snižoval. Elektronky, které tvoří tento proud, potřebují zdroj energie jen v počátečním okamžiku a už nikdy více.

Před rokem 1986 brzdily rozvoj supravodivých technologií vysoké náklady potřebné k dosažení extrémně nízkých teplot. V roce 1986 však byly objeveny nové keramické materiály, které se stávají supravodivými při výrazně vyšších

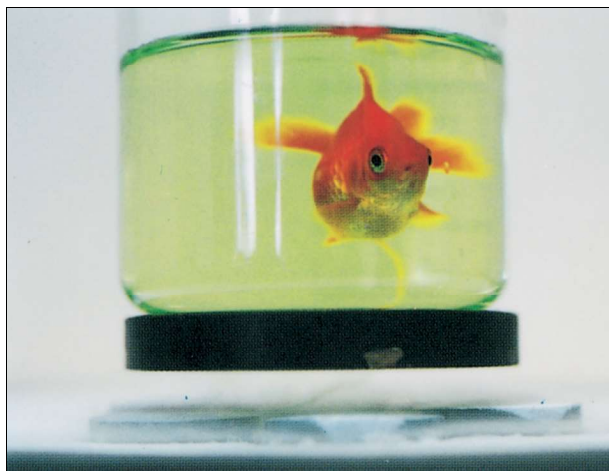
teplotách (a takové teploty jsou dosažitelné snadněji a levněji, např. kapalným vzduchem). Praktické použití supravodivých součástek při pokojové teplotě se může brzo stát skutečností.



Obr. 27.15 Odpor rtuti klesne prudce k nule při teplotě kolem 4 K.

Supravodivost se v mnohém liší od obyčejné vodivosti. Nejlepší běžné vodiče, jako je stříbro a měď, se nemohou stát supravodivými při žádné teplotě. Nové keramické supravodiče jsou vlastně izolátory, pokud nemají dostatečně nízkou teplotu k tomu, aby přešly do supravodivého stavu.

Supravodivost se dá vysvětlit tak, že se elektrony, které vedou elektrický proud, pohybují v párech. Jeden z elektronů z páru elektricky naruší molekulární strukturu supravodivého materiálu tak, že v jeho nejbližším okolí vznikne na krátký okamžik nadbytek kladného náboje. Druhý elektron z páru je potom k tomuto kladnému náboji přitahován. Teorie říká, že taková koordinace mezi elektrony jim brání srážet se s molekulami, a tak zanikne elektrický odpor. Před rokem 1986 tato teorie dobře vysvětlovala vlastnosti *nízkoteplotních supravodičů*. Ukázalo se však, že k vysvětlení vlastností *vysokoteplotních supravodičů* jsou potřebné nové teorie.



Magnet ve tvaru disku se vznáší nad supravodivým materiálem chlazeným kapalným dusíkem. Zlatá ryбка se dívá, co všechno už lidé umějí.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Elektrický proud

Elektrický proud I ve vodiči je definován vztahem

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (27.1)$$

Zde dQ je náboj, který za dobu dt projde průřezem vodiče. Podle konvence je směr elektrického proudu určen jako směr pohybu kladného náboje. Jednotkou elektrického proudu v soustavě SI je *ampér* (A).

Hustota proudu

Proud (skalár) souvisí s vektorem *hustoty proudu* \mathbf{J} vztahem

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}, \quad (27.4)$$

kde $d\mathbf{S}$ je vektor kolmý k elementu plochy o obsahu dS a integruje se přes průřez vodiče. Orientace \mathbf{J} je stejná jako orientace intenzity elektrického pole, která vyvolává proud.

Driftová rychlost nosičů náboje

Je-li ve vodiči elektrické pole o intenzitě \mathbf{E} , (kladné) nosiče náboje se pohybují *driftovou rychlostí* \mathbf{v}_d ve směru intenzity \mathbf{E} . Rychlost \mathbf{v}_d souvisí s hustotou proudu vztahem

$$\mathbf{J} = (ne)\mathbf{v}_d, \quad (27.7)$$

kde ne je objemová hustota náboje.

Odpor vodiče

Odpor neboli rezistance R vodiče (součástky) je definován vztahem

$$R = \frac{U}{I} \quad (\text{definice } R), \quad (27.8)$$

kde U je napětí přiložené na vodič a I proud procházející vodičem. Jednotkou odporu v soustavě SI je *ohm* (Ω): $1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}$. *Rezistivita* ρ a *konduktivita* σ materiálu jsou definovány takto:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \quad (\text{definice } \rho \text{ a } \sigma), \quad (27.12)$$

kde E je velikost intenzity elektrického pole. Jednotkou rezistivity v soustavě SI je $\Omega \cdot \text{m}$. Zobecněním uvedeného vztahu je vektorová rovnice

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \quad (27.11)$$

Odpor R vodiče o délce L a průřezu S určíme podle vztahu

$$R = \rho \frac{L}{S}. \quad (27.16)$$

Změna rezistivity s teplotou

Rezistivita ρ většiny materiálů se mění s teplotou. Pro řadu materiálů, včetně kovů, lze závislost rezistivity ρ na teplotě T aproximovat lineárním vztahem

$$\rho - \rho_0 = \rho_0 \alpha (T - T_0). \quad (27.17)$$

Zde T_0 je referenční teplota, ρ_0 je rezistivita při teplotě T_0 a α je teplotní součinitel rezistivity (v určitém teplotním intervalu).

Ohmův zákon

Pro *vodič* (součástku) platí *Ohmův zákon* tehdy, jestliže jeho odpor R definovaný rov. (27.8), $R = U/I$, nezávisí na přiloženém napětí U . Pro *materiál* platí Ohmův zákon tehdy, jestliže jeho rezistivita definovaná rov. (27.10), $\rho = E/J$, nezávisí na velikosti a směru elektrické intenzity \mathbf{E} .

Rezistivita kovů

Za předpokladu, že vodivostní elektrony kovu se volně pohybují jako molekuly plynu, lze odvodit vztah pro rezistivitu kovu:

$$\rho = \frac{m}{e^2 n \tau}. \quad (27.20)$$

Zde n je počet elektronů v jednotkovém objemu (koncentrace elektronů) a τ je střední doba mezi srážkami elektronu s atomy kovu. Protože τ je prakticky nezávislé na E , platí pro kovy Ohmův zákon.

Výkon

Výkon P přenosu energie v součástce, na níž je napětí U a kterou prochází proud I , je roven

$$P = UI \quad (\text{výkon při přenosu elektrické energie}). \quad (27.21)$$

Disipace energie rezistorem

Je-li součástkou rezistor, lze psát rov. (27.21) ve tvaru

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R} \quad (\text{disipace energie rezistorem}). \quad (27.22, 27.23)$$

V rezistoru je elektrická potenciální energie disipována prostřednictvím srážek nosičů náboje s atomy.

Polovodiče

Polovodiče jsou materiály s malým počtem vodivostních elektronů a s neobsazenými energiovými hladinami ve vodivostním pásu, který leží poměrně blízko valenčního pásu. Rezistivita polovodiče může být blízká rezistivitě kovu, je-li polovodič do-

popán jinými atomy, které dodávají elektrony do vodivostního pásu.

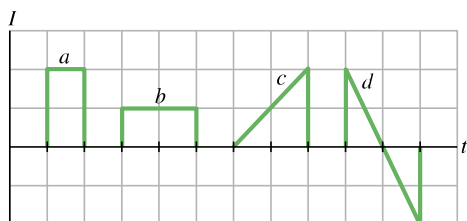
Supravodiče

Supravodiče jsou materiály, jejichž rezistivita při velmi nízkých

teplotách zcela vymizí. Nedávno byly objeveny materiály, které jsou supravodivé i při poměrně „vysokých“ teplotách (např. v kalném vzduchu).

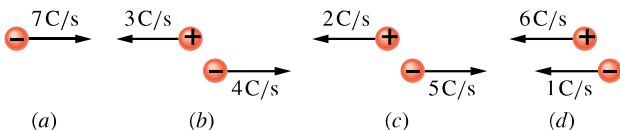
OTÁZKY

1. Na obr. 27.16 je znázorněn proud I ve vodiči ve čtyřech různých časových intervalech. Uspořádejte tyto případy sestupně podle velikosti celkového náboje, který projde vodičem.



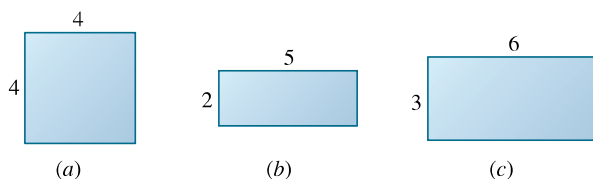
Obr. 27.16 Otázka 1

2. Na obr. 27.17 jsou nakresleny čtyři situace, kdy se kladné a záporné náboje pohybují ve vodorovném směru, a jsou uvedeny velikosti rychlostí přenosu náboje. Uspořádejte tyto situace sestupně podle velikosti výsledného procházejícího proudu.



Obr. 27.17 Otázka 2

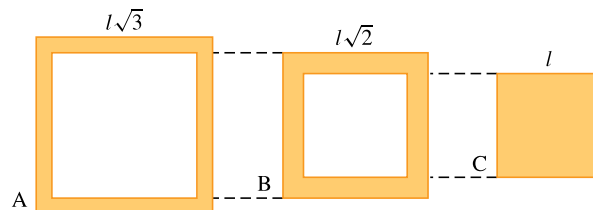
3. Na obr. 27.18 jsou nakresleny průřezy tří stejně dlouhých vodičů zhotovených ze stejného materiálu. Rozměry vodičů jsou dány v milimetrech. Uspořádejte vodiče sestupně podle jejich odporu (měřeného v podélném směru mezi konci vodičů).



Obr. 27.18 Otázka 3

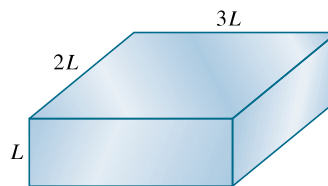
4. Natahujeme válcový vodič tak, že zůstává stále válcový. Co se stane s odporem měřeným mezi konci vodiče v podélném směru: zvětší se, zmenší se, nebo se nezmění?

5. Na obr. 27.19 jsou nakresleny čtvercové průřezy tří stejně dlouhých vodičů zhotovených ze stejného materiálu. Vodič B se dá těsně vložit do vodiče A, vodič C se dá těsně vložit do vodiče B. Uspořádejte sestupně podle odporu (měřeného v podélném směru) uvedené kombinace vodičů: jednotlivé vodiče A, B, C, kombinace A + B, B + C, A + B + C.



Obr. 27.19 Otázka 5

6. Na obr. 27.20 je vodič ve tvaru kvádrů o rozměrech L , $2L$, $3L$. Ke dvěma protilehlým stěnám vodiče je přiloženo napětí U , podobně jako na obr. 27.8b. Uspořádejte dvojice stěn levá-pravá, horní-dolní, přední-zadní sestupně podle (a) intenzity elektrického pole ve vodiči, (b) hustoty proudu uvnitř vodiče, (c) proudu procházejícího vodičem, (d) driftové rychlosti elektronů ve vodiči.



Obr. 27.20 Otázka 6

7. V tabulce jsou uvedeny délky tří měděných tyčí, jejich průměry a napětí mezi jejich konci. Uspořádejte tyče sestupně podle (a) intenzity elektrického pole v tyčích, (b) hustoty proudu v tyčích, (c) driftové rychlosti elektronů.

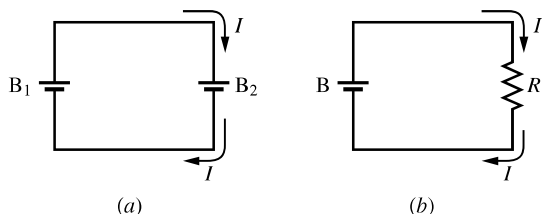
TYČ	DÉLKA	PRŮMĚR	NAPĚTÍ
1	L	$3d$	U
2	$2L$	d	$2U$
3	$3L$	$2d$	$2U$

8. V tabulce jsou uvedeny konduktivity a koncentrace elektronů čtyř materiálů A, B, C, D. Uspořádejte materiály sestupně podle střední doby mezi srážkami vodivostních elektronů.

MATERIÁL	A	B	C	D
konduktivita	σ	2σ	2σ	σ
koncentrace elektronů	n	$2n$	n	$2n$

9. Tři dráty stejného průměru postupně zapojíme mezi dva body, mezi nimiž je stále stejné napětí. Rezistivity a délky vodičů jsou ρ a L (u drátu A), $1,2\rho$ a $1,2L$ (u drátu B), $0,9\rho$ a L (u drátu C). Uspořádejte dráty sestupně podle výkonu, s jakým se v nich vyvíjí teplo.

10. V obvodu na obr. 27.21a nabíjí baterie B_1 baterii B_2 . Proud procházející baterií B_2 a napětí na baterii B_2 mohou být (a) 3 A a 4 V, (b) 2 A a 5 V, (c) 6 A a 2 V. Uspořádejte uvedené dvojice hodnot proudu a napětí sestupně podle rychlosti přenosu elektrické energie z baterie B_1 do baterie B_2 .



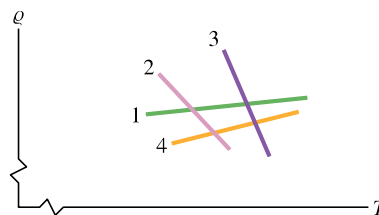
Obr. 27.21 Otázky 10 a 11

11. V obvodu na obr. 27.21b je spojena baterie B a rezistor o odporu R . Odpor R a proud I rezistorem mohou být (a) 4 Ω a 2 A, (b) 3 Ω a 3 A, (c) 3 Ω a 2 A. Uspořádejte tyto možnosti

sestupně podle rychlosti, jakou je elektrická energie disipována v rezistoru.

12. Je odpor vlákna žárovky značené 500 W/230 V větší, nebo menší než odpor vlákna žárovky značené 100 W/230 V?

13. Na obr. 27.22 jsou vyznačeny závislosti rezistivity čtyř materiálů na teplotě. (a) Které materiály jsou kovy a které jsou polovodiče? U kterých materiálů způsobí zvýšení teploty (b) zvýšení koncentrace vodivostních elektronů, (c) zvětšení počtu srážek vodivostních elektronů?



Obr. 27.22 Otázka 13

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 27.2 Elektrický proud

1C. Svazek elektronů dopadajících na stínítko televizní obrazovky odpovídá proudu 200 μ A. Kolik elektronů dopadá na stínítko obrazovky za sekundu?

2C. Rezistorem o odporu 10 Ω prochází po dobu 4,0 min proud 5,0 A. Kolik (a) coulombů, (b) elektronů projde za tuto dobu průřezem rezistoru?

3Ú. Pás van der Graafova generátoru široký 50 cm se pohybuje rychlostí 30 $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ mezi zdrojem náboje a dutou koulí. Přenos náboje na kouli odpovídá proudu 100 μ A. Vypočítejte povrchovou hustotu náboje pásu.

4Ú. Izolovaná vodivá koule má poloměr 10 cm. Jeden vodič do ní přivádí proud 1,000 002 0 A, druhý vodič z ní odvádí proud 1,000 000 0 A. Za jak dlouho potenciál koule vzroste o 1 000 V?

ODST. 27.3 Hustota proudu

5C. V tabulce je uveden výpis z normy (USA), která udává maximální bezpečný (přípustný) proud I_m pro měděné vodiče různých průměrů d s pryžovou izolací. Nakreslete graf závislosti maximální bezpečné hustoty proudu jako funkci průměru vodiče. Který typ vodiče má největší bezpečnou hustotu proudu?

Typ vodiče (CW)	4	6	8	10	12	14	16	18
d/mm	5,20	4,13	3,28	2,60	2,06	1,64	1,30	1,03
I_m/A	70	50	35	25	20	15	6	3

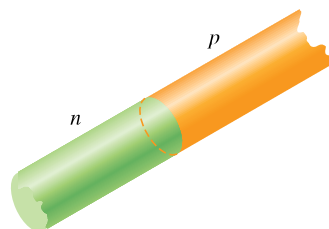
6C. Svazek iontů obsahuje $2,0\cdot 10^8$ kladně nabitých iontů v krychlovém centimetru, každý iont nese náboj $+2e$. Všechny ionty se pohybují k severu rychlostí $1,0\cdot 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Jakou velikost a směr má hustota proudu \mathbf{J} ? (b) Můžete vypočítat celkový proud I v tomto iontovém svazku? Jestliže ne, jakou další informaci byste k tomu potřebovali?

7C. Malý, ale měřitelný proud $1,2\cdot 10^{-10}$ A prochází měděným drátem o průměru 2,5 mm. Předpokládejte, že proud je v celém průřezu vodiče konstantní, a vypočítejte (a) hustotu proudu, (b) driftovou rychlost elektronů (viz př. 27.3).

8C. Pojistka v elektrickém obvodu je v podstatě tenký drátek, který se má přetavit a tak rozpojit obvod, jestliže proud překročí danou hodnotu. Předpokládejte, že se drátek přetaví, když hustota proudu dosáhne $440 \text{ A}\cdot\text{cm}^{-2}$. Jaký průměr musí mít (válcový) drátek, aby vydržel bez přetavení maximální proud 0,50 A?

9C. V plynové výbojce poteče proud, je-li napětí mezi elektrodami uvnitř trubice dostatečně velké. Plyn se ionizuje, elektrony se pohybují směrem ke kladné elektrodě a kladně nabitě ionty směrem k záporné elektrodě. Jaká je velikost a směr proudu ve vodíkové výbojce, v níž $3,1\cdot 10^{18}$ elektronů a $1,1\cdot 10^{18}$ protonů projde za sekundu průřezem trubice?

10C. Přechod p - n je vytvořen ze dvou polovodičů ve tvaru válce o poloměru 0,165 mm (obr. 27.23). Při určitém zapojení prochází přechodem $3,50\cdot 10^{15}$ elektronů za sekundu z polovodiče n do polovodiče p a $2,25\cdot 10^{15}$ děr za sekundu z polovodiče p do polovodiče n . (Díra se chová jako částice s nábojem $+e$.) Vypočítejte (a) celkový proud, (b) hustotu proudu procházejícího přechodem.



Obr. 27.23 Cvičení 10

11Ú. Protony ve slunečním větru se v blízkosti Země pohybují rychlostí $470 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ a jejich koncentrace je $8,70 \text{ cm}^{-3}$. (a) Vypočítejte hustotu proudu protonů. (b) Kdyby magnetické pole Země protony nevychylovalo, dopadly by na Zemi. Jak velký elektrický proud by na Zemi dopadal?

12Ú. Svazek letících α -částic, z nichž každá nese náboj $Q = +2e$ a má energii 20 MeV , vytváří proud $0,25 \mu\text{A}$. (a) Kolik α -částic dopadne na rovinný povrch za $3,0 \text{ s}$, jestliže svazek směřuje kolmo k němu? (b) Kolik α -částic se v každém okamžiku nachází ve 20 cm dlouhém úseku svazku? (c) Jakým napětím musela být α -částice urychlena z klidu, aby získala energii 20 MeV ?

13Ú. Jak dlouho elektronům trvá, než se dostanou z autobaterie do startéru? Předpokládejte, že prochází proud 300 A a elektrony se pohybují měděným vodičem o průřezu $0,21 \text{ cm}^2$ a délce $0,85 \text{ m}$. (Viz př. 27.3.)

14Ú. V hypotetické výzkumné laboratoři jaderných reakcí je při velmi vysoké teplotě helium úplně ionizováno, takže každý heliový atom je rozdělen na kladně nabitě jádro (α -částici) a dva volné elektrony. Vnější elektrické pole způsobí, že α -částice se pohybují driftovou rychlostí $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ směrem na východ a elektrony rychlostí $88 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na západ. Koncentrace α -částic je $2,8 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$. Vypočítejte výslednou hustotu proudu a určete směr proudu.

15Ú. (a) Hustota proudu ve válcovém vodiči o poloměru R se mění podle vztahu

$$J = J_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right),$$

kde r je vzdálenost od osy válce. Hustota proudu tedy dosahuje maximální hodnoty J_0 v ose vodiče ($r = 0$) a lineárně klesá k nule na povrchu vodiče ($r = R$). (a) Vypočítejte proud ve vodiči a vyjádřete ho pomocí proudové hustoty J_0 a průřezu vodiče $S = \pi R^2$. (b) Uvažujte jinou situaci: hustota proudu má největší hodnotu J_0 na povrchu válcového vodiče a lineárně klesá k nule v ose vodiče podle vztahu $J = J_0 r/R$. Opět vypočítejte proud. Proč vychází jiný proud než v otázce (a)?

ODST. 27.4 Odpor a rezistivita

16C. Ocelová tramvajová kolejnice má průřez $56,0 \text{ cm}^2$. Jaký je odpor $10,0 \text{ km}$ kolejí? Rezistivita oceli je $3,00 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$.

17C. Drát má průměr $1,0 \text{ mm}$, délku $2,0 \text{ m}$ a odpor $50 \text{ m}\Omega$. Jaká je rezistivita materiálu?

18C. Nichromový drát (slitina niklu, chromu a železa užívaná často v topných člancích) je $1,0 \text{ m}$ dlouhý a má průřez $1,0 \text{ mm}^2$. Při napětí $2,0 \text{ V}$ jím prochází proud $4,0 \text{ A}$. Vypočítejte konduktivitu σ nichromu.

19C. Člověka může zabít už elektrický proud 50 mA , pokud prochází v blízkosti jeho srdce. Opravář uchopí upocenými rukama dva vodiče a propojí je tak svým tělem. Jaké napětí mu může být osudné, je-li odpor jeho těla 2000Ω ?

20C. Cívka je vytvořena navinutím 250 závitů izolovaného měděného drátu o průměru $1,3 \text{ mm}$ v jedné vrstvě na válcové jádro

o poloměru 12 cm . Jaký je její odpor? Tloušťku izolace zanedbejte. (Použijte údajů z tab. 27.1.)

21C. Drát dlouhý $4,00 \text{ m}$ o průměru $6,00 \text{ mm}$ má odpor $15,0 \text{ m}\Omega$ a je k němu přiloženo napětí $23,0 \text{ V}$. (a) Jaký proud prochází drátem? (b) Jaká je hustota proudu v drátu? (c) Vypočítejte rezistivitu materiálu drátu a určete, co je to za materiál (použijte údajů v tab. 27.1).

22C. Měděné vinutí motoru má odpor 50Ω při teplotě 20°C , když motor neběží. Je-li motor několik hodin v chodu, odpor se zvýší na 58Ω . Jakou teplotu má přítom vinutí? Zanedbejte změny rozměrů vinutí. (Použijte údajů v tab. 27.1.)

23C. (a) Při jaké teplotě by byl odpor měděného vodiče dvakrát větší než jeho odpor při teplotě 20°C ? (Považujte teplotu 20°C za referenční teplotu v rov. (27.17) a porovnejte svoji odpověď s obr. 27.10.) (b) Platí výsledek pro všechny měděné vodiče, bez ohledu na jejich tvar nebo velikost?

24C. Použijte údaje z obr. 27.11c a nakreslete graf závislosti odporu polovodičové diody na přiloženém napětí.

25C. Housenka dlouhá $4,0 \text{ cm}$ se plazí ve směru pohybu elektronů po neizolovaném měděném drátu o průměru $5,2 \text{ mm}$, kterým prochází proud 12 A . (a) Jaké je napětí mezi konci housenky? (b) Má její ocas vyšší, nebo nižší potenciál než její hlava? (c) Jak dlouho by housenka trvala, než by se odplazila o $1,0 \text{ cm}$, kdyby rychlost jejího plazení byla stejná jako driftová rychlost elektronů v drátu?

26C. Válcovou měděnou tyč délky L a průřezu S vytáhneme na dvojnásobnou délku, aniž by se změnil její objem. (a) Jaký je její nový průřez? (b) Jaký odpor má po vytažení, jestliže původně měla odpor R ?

27C. Drát o odporu $6,0 \Omega$ je protažen otvorem matrice tak, že se jeho délka ztrojnásobí. Vypočítejte odpor vytaženého drátu za předpokladu, že rezistivita a hustota materiálu se nezměnily.

28C. Určitý drát má odpor R . Jaký odpor má jiný drát ze stejného materiálu, jsou-li jeho délka a průměr poloviční?

29Ú. Drát A a trubice B jsou vyrobeny ze stejného materiálu a mají stejnou délku 1 m . Drát má průměr $1,0 \text{ mm}$, trubice má vnější průměr $2,0 \text{ mm}$ a vnitřní průměr $1,0 \text{ mm}$. Vypočítejte poměr jejich odporů R_A/R_B .

30Ú. Měděný a železný drát mají stejnou délku a je k nim přiloženo stejné napětí. (a) Jaký musí být poměr jejich poloměrů, aby jimi procházel stejný proud? (b) Je možné najít takové poloměry drátů, aby hustota proudu byla stejná?

31Ú. Hliníková tyč je $1,3 \text{ m}$ dlouhá a má čtvercový průřez o straně $5,2 \text{ mm}$. (a) Jaký odpor naměříme mezi jejími konci? (b) Jaký by musel být průměr válcové měděné tyče téže délky, aby měla stejný odpor?

32Ú. Kovová válcová tyč o průměru $5,50 \text{ mm}$ je $1,60 \text{ m}$ dlouhá. Odpor (měřený mezi jejími konci) při teplotě 20°C je $1,09 \cdot 10^{-3} \Omega$. (a) Z jakého je materiálu? (b) Ze stejného materiálu je vyroben kotouč o průměru $2,00 \text{ cm}$ a tloušťce $1,00 \text{ mm}$. Jaký je jeho odpor měřený mezi protějšími kruhovými plochami za předpokladu, že obě jsou ekvipotenciálními plochami?

33Ú. Elektrický kabel je tvořen svazkem 125 tenkých drátů, každý z nich má odpor $2,65 \mu\Omega$. Prochází jím celkový proud $0,750 \text{ A}$. (a) Jaký proud prochází každým drátem kabelu? (b) Jaké je napětí na kabelu? (c) Jaký je odpor kabelu?

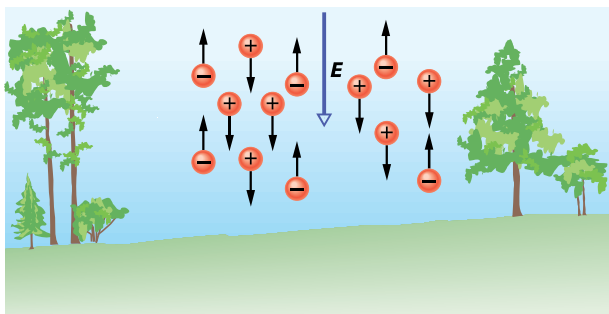
34Ú. Je-li k válcovému vodiči o délce 10 m a poloměru $0,30 \text{ mm}$ přiloženo napětí 115 V , je hustota proudu ve vodiči $1,4 \cdot 10^4 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. Vypočítejte odpor vodiče.

35Ú. Zábleskovou žárovkou prochází proud $0,30 \text{ A}$ při napětí $2,9 \text{ V}$. Odpor vlákna žárovky při pokojové teplotě (20°C) je $1,1 \Omega$. Jaká je teplota vlákna při záblesku? Vlákno je z wolframu.

36Ú. Vzdálenost mezi přední a zadní stěnou kvádry je $15,8 \text{ cm}$, obsah každé z nich je $3,50 \text{ cm}^2$ a odpor (měřený mezi nimi) je 935Ω . Koncentrace vodivostních elektronů v materiálu, z něhož je kvádr vyroben, je $5,33 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$. Mezi přední a zadní stěnu kvádry je přiloženo napětí $35,8 \text{ V}$. (a) Jaký proud prochází kvádrem? (b) Jaká je hustota proudu (předpokládáme-li, že je konstantní v celém průřezu)? (c) Jaká je driftová rychlost vodivostních elektronů? (d) Jaká je intenzita elektrického pole v kvádru?

37Ú. Z mědi i z hliníku se vyrábějí vysokonapěťové vodiče, kterými může procházet proud až $60,0 \text{ A}$. Odpor jednoho kilometru takového vodiče má být $0,150 \Omega \cdot \text{km}^{-1}$. Vypočítejte pro oba materiály (a) hustotu proudu, (b) hmotnost jednoho metru kabelu. Hustota mědi je $8960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hliníku je $2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

38Ú. V nižších vrstvách zemské atmosféry jsou záporné a kladné ionty vznikající ionizačním účinkem záření radioaktivních prvků v zemské kůře a kosmických paprsků. V určité oblasti má intenzita atmosférického elektrického pole velikost $120 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ a je orientována svisle dolů. Elektrické pole způsobuje, že kladné jednomocné ionty o koncentraci 620 cm^{-3} se pohybují směrem dolů a záporné jednomocné ionty o koncentraci 550 cm^{-3} se pohybují nahoru (obr. 27.24). Naměřená konduktivita je $2,70 \cdot 10^{-14} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Vypočítejte (a) driftovou rychlost iontů za předpokladu, že je stejná pro kladné i záporné ionty, (b) hustotu proudu.



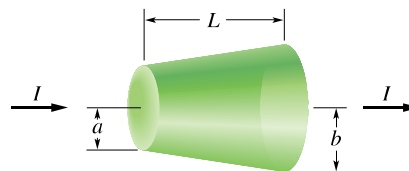
Obr. 27.24 Úloha 38

39Ú. Typové číslo CW určuje průměr drátu takto: zvětší-li se o 6, průměr drátu se zmenší na polovinu, zvětší-li se o 1, průměr drátu se zmenší faktorem $2^{1/6}$ (viz cvič. 5). Určete odpor 10 m

měděného drátu typu CW22, víte-li, že 400 m dlouhý měděný drát typu CW10 má odpor $1,00 \Omega$.

40Ú. Jestliže se kovová tyč zahřívá, nemění se jen její odpor, ale také její délka a průřez. Vztah $R = \rho L/S$ napovídá, že při měření rezistivity ρ při různých teplotách je třeba vzít v úvahu změny všech tří veličin s teplotou. (a) O kolik procent se změní odpor R , délka L a průřez S měděného vodiče, změní-li se jeho teplota o 1°C ? Teplotní součinitel délkové roztažnosti mědi je $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. (b) Jaký závěr z toho můžete vyvodit?

41Ú. Rezistor má tvar komolého kužele (obr. 27.25). Poloměry jeho kruhových podstav jsou a , b a jeho výška je L . Jestliže se kužel zužuje jen málo, můžeme předpokládat, že zvolíme-li libovolný průřez kolmý k ose, bude v něm hustota proudu konstantní (a ovšem jiná než v jiném průřezu). (a) Vypočítejte odpor rezistoru. (b) Ověřte si, že váš vzorec pro odpor se zjednoduší na $\rho(L/S)$ ve zvláštním případě, že se kužel vůbec nezužuje (tedy pro $a = b$, tj. pro válec).



Obr. 27.25 Úloha 41

ODST. 27.6 Mikroskopický pohled na Ohmův zákon

42Ú. Ukažte, že podle modelu elektrické vodivosti volných elektronů v kovu a klasické fyziky by rezistivita kovů byla úměrná \sqrt{T} , kde T je teplota měřená v kelvinech (viz rovnici (20.27)).

ODST. 27.7 Výkon v elektrických obvodech

43C. Student poslouchá radiopřijímač napájený ze zdroje o napětí $9,0 \text{ V}$, puštěný na plný výkon $7,0 \text{ W}$ od $9,00 \text{ h}$ ráno do $14,00 \text{ h}$ odpoledne. Jak velký elektrický náboj projde za tu dobu radiopřijímačem?

44C. Rentgenovou lampou prochází proud $7,0 \text{ mA}$ při napětí 80 kV . Jaký je odpovídající výkon ve watttech?

45C. Při průchodu proudu $3,0 \text{ A}$ rezistorem se v něm vyvíjí teplo s výkonem $100 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaký je jeho odpor?

46C. Naplno svítící světlomety jedoucího automobilu odebírají proud 10 A při napětí 12 V z generátoru poháněného motorem. Předpokládejte, že účinnost generátoru je 80% (to znamená, že výstupní elektrický výkon je roven 80% vstupního mechanického výkonu). Vypočítejte, jaký výkon musí mít motor, aby světlomety naplno svítily.

47C. Topná spirála je připojena na napětí 230 V , odpor rozpalené spirály je 14Ω . (a) S jakým výkonem se ve spirále vyvíjí teplo? (b) Jestliže jedna kilowatthodina elektrické energie stojí $1,75 \text{ Kč}$, kolik zaplatíme, budeme-li spirálou topit $5,0 \text{ h}$?

48C. Topná spirála o výkonu 500 W je připojena na napětí 230 V. (a) Jaký je odpor rozpálené spirály? (b) Jakou rychlostí (měřenou v $\text{C}\cdot\text{s}^{-1}$) je přenášen elektrický náboj elektronů libovolným průřezem spirály?

49C. Rezistor o neznámém odporu je připojen ke svorkám 3,00 V baterie. Elektrická energie je v rezistoru disipována rychlostí 0,540 W. Tentýž rezistor je připojen ke svorkám 1,50 V baterie. Jakým výkonem je pak disipována elektrická energie?

50C. Měděný drát s pryžovou izolací typu CW10 o průměru 2,6 mm má normou stanovený maximální bezpečný proud 25 A (viz cvič. 5). Při tomto proudu vypočtete: (a) hustotu proudu, (b) intenzitu elektrického pole, (c) napětí mezi konci drátu, je-li jeho délka 300 m, (d) výkon, s jakým se v 300 m dlouhém drátu vyvíjí teplo.

51C. Ke koncům měděného drátu o průměru 1 mm a délce 33,0 m je přiloženo napětí 1,20 V. Vypočtete: (a) proud, (b) hustotu proudu, (c) intenzitu elektrického pole, (d) výkon, s jakým se v drátu vyvíjí teplo.

52Ú. Ke koncům vodiče o délce L , průřezu S a rezistivitě ρ je přiloženo napětí U . Vaším úkolem je změnit přiložené napětí U a současně protáhnout drát tak, aby se disipovaný výkon elektrické energie v drátu zvětšil 30krát a proud 4krát. Jaká bude nová délka a nový průřez drátu?

53Ú. Válcový rezistor o poloměru 5,0 mm a délce 2,0 cm je vyroben z materiálu o rezistivitě $3,5\cdot 10^{-5} \Omega\cdot\text{m}$. Vypočtete (a) hustotu proudu, (b) přiložené napětí, je-li výkon disipovaný rezistorem roven 1,0 W.

54Ú. Jednoduchý topný článek je zhotoven tak, že ke koncům drátu z nichromu o průřezu $2,60\cdot 10^{-6} \text{m}^2$ a rezistivitě $5,00\cdot 10^{-7} \Omega\cdot\text{m}$ je přiloženo napětí 75,0 V. (a) Jak dlouhý je drát, je-li elektrická energie v článku disipována s výkonem 5 000 W? (b) Jaká musí být délka drátu, jestliže přiložené napětí se změní na 100 V a rychlost disipace má zůstat stejná?

55Ú. Žárovka o příkonu 100 W je připojena na napětí 230 V. (a) Kolik bychom zaplatili, kdyby žárovka svítila nepřetržitě celý měsíc? Předpokládejte, že 1 kW·h elektrické energie stojí 1,75 Kč. (b) Jaký je odpor svítilic žárovky? (c) Jaký proud prochází žárovkou? (d) Je odpor zhasnuté žárovky větší, stejný, nebo menší?

56Ú. Teplomet o příkonu 1 250 W pracuje při napětí 230 V. (a) Jaký proud prochází teplometem? (b) Jaký je odpor topné spirály? (c) Kolik tepla se vyvine v teplometu za 1 hodinu?

57Ú. Topný článek z nichromového drátu je připojen na napětí 110 V. Elektrická energie je v něm disipována výkonem 500 W. Teplota drátu je 800°C . Jaká by byla rychlost disipace energie, kdyby byl drát ponořen do chladicí olejové lázně a jeho teplota udržována na 200°C ? Přiložené napětí se nemění, teplotní součinitel rezistivity nichromu při 800°C je $4,0\cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$.

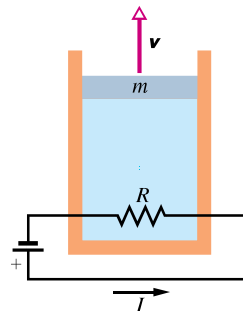
58Ú. Na měděný terč dopadá svazek deuteronů urychlených v cyklotronu tak, že každý deuteron ve svazku má energii

16 MeV. Elektrický proud přenášený svazkem je $15 \mu\text{A}$. (a) Jakou rychlostí vnikají deuterony do mědi? (b) S jakým výkonem se v měděném terči vyvíjí teplo?

59Ú. V lineárním urychlovači vzniká pulzující svazek elektronů, proud pulzu je 0,50 A, délka pulzu je 0,10 μs . (a) Kolik urychlených elektronů je v každém pulzu? (b) Jaká je střední hodnota proudu při 500 pulzech za sekundu? (c) Jaký je střední a špičkový výkon urychlovače, je-li energie každého urychleného elektronu 50 MeV?

60Ú. Spirála navinutá z nichromového drátu je ponořena do kapaliny v kalorimetru. Ke spirále je přiloženo napětí 12 V a prochází jí proud 5,2 A. Kapalina v kalorimetru vře a vypařuje se stálou rychlostí $21 \text{mg}\cdot\text{s}^{-1}$. Vypočtete měrné skupenské teplo varu kapaliny (vyjádřené v jednotce $\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$). (Viz čl. 19.7.)

61Ú. Na obr. 27.26 je nakreslen elektrický obvod se spirálou umístěnou uvnitř tepelně izolovaného válce s ideálním plynem. Válec je uzavřen pístem, který se pohybuje bez tření. Spirálou prochází proud 240 mA, její odpor je 550Ω , hmotnost pístu je 12 kg. Jak velkou rychlost v se musí píst zvedat, aby se teplota plynu ve válci neměnila?



Obr. 27.26 Úloha 61

62Ú. Topné těleso o příkonu 500 W pracuje při napětí 115 V. (a) O kolik procent se sníží jeho tepelný výkon, jestliže napětí klesne na 110 V? Předpokládejte, že odpor se nezmění. (b) Nyní vezměte v úvahu i změnu odporu s teplotou. Bude pokles tepelného výkonu větší, nebo menší, než jste vypočítali v části (a)?

PRO POČÍTAČ

63Ú. Odpor rezistoru byl měřen při několika teplotách, výsledky jsou uvedeny v tabulce. Zadejte údaje z tabulky do počítače a proveďte lineární regresi závislosti odporu R na teplotě T . Pomocí parametrů lineární regrese vypočtete odpor při teplotě (a) 20°C , (b) 0°C . Určete teplotní součinitel odporu při referenční teplotě (c) 20°C , (d) 0°C . (e) Určete odpor rezistoru při teplotě 265°C .

$T/^\circ\text{C}$	50	100	150	200	250	300
R/Ω	139	171	203	234	266	298

28

Obvody



*Paúhoř elektrický (*Electrophorus electricus*) číhá v řekách Jižní Ameriky a ryby, jimiž se živí, zabíjí pulzem elektrického proudu. Dělá to tak, že podél svého těla vytvoří napětí až několika set voltů, takže elektrický proud tekoucí okolní vodou, od úhořovy hlavy k ocasu, může dosáhnout až jednoho ampéru. Kdybyste se při plavání k paúhoři neopatrně přiblížili, asi byste se velice divili (samozřejmě až poté, co byste se vzpamatovali z velmi bolestivého zážitku): Jak je možné, že tento tvor dokáže vyprodukovat tak velký proud a sám sobě neublíží?*

28.1 „PUMPOVÁNÍ“ NÁBOJŮ

Chceme-li přinutit nosiče náboje, aby protékaly rezistorem, musíme vytvořit napětí (tedy rozdíl potenciálů) mezi jeho konci. Můžeme to udělat tak, že vezmeme dvě vodivé koule, jednu nabitou kladným nábojem a druhou záporným, a spojíme je přes rezistor. To má ale velkou vadu: jak teče náboj, koule se vybíjejí a za krátkou dobu budou mít obě koule stejný potenciál a tok náboje se zastaví.

Aby náboje tekly neustále, potřebujeme mít nějakou „nábojovou pumpu“, tedy zařízení, které udržuje napětí mezi svými svorkami a přitom je za tím účelem schopné konat práci při přemísťování nosičů náboje. Takové zařízení se nazývá zdroj elektromotorického napětí. Říkáme pak, že zdroj vytváří **elektromotorické napětí** (zkratka emn). Elektromotorické napětí jako veličinu označujeme symbolem \mathcal{E} .



Největší baterie na světě v Chino v Kalifornii je schopna dodávat výkon až 10 MW. Používá se ve špičkách v elektrické síti společnosti Southern California Edison.

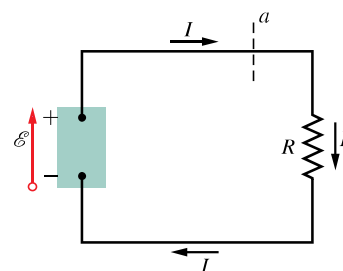
Běžnými zdroji emn jsou *baterie* používané jako zdroje energie, od náramkových hodinek až po ponorky. Náš život však nejvíce ovlivňují jiné zdroje emn, a to *elektrické generátory*, které vytvářejí napětí pro domácnost i pro pracoviště. Jinými zdroji emn jsou *sluneční články*. Známe je např. z fotografií umělých družic (tam jsou navzájem pospojovány a sestavovány do velkých panelů). Postupně však pronikají i do domácností. Méně známými zdroji emn jsou *palivové články* sloužící jako zdroj energie v raketoplánu nebo *termoelektrické baterie* používané v některých kosmických lodích nebo na vzdálených polárních stanicích v Antarktidě. Zdrojem emn však nemusí vždy být nějaký přístroj. Některé živé organismy, například električtí paúhoři, ale i lidé, ba i určité rostliny, mají *fyzilogické zdroje* emn.

Přestože se vyjmenovaná zařízení výrazně liší způsobem své činnosti, všechna mají tutéž základní funkci: mohou konat práci přemísťováním nosičů náboje a udržují napětí mezi svými svorkami.

28.2 PRÁCE, ENERGIE A ELEKTROMOTORICKÉ NAPĚTÍ

Na obr. 28.1 je nakreslen zdroj emn \mathcal{E} (předpokládáme, že je to baterie) zapojený do jednoduchého obvodu s rezistorem R . Svorka zdroje o vyšším elektrickém potenciálu se nazývá kladný pól a označuje se symbolem $+$, druhá svorka se nazývá záporný pól a označuje se symbolem $-$. Elektromotorické napětí zdroje znázorňujeme šipkou, která vychází ze záporného pólu a směřuje ke kladnému pólu (obr. 28.1). Orientace šipky udává směr, kterým se uvnitř zdroje pohybují kladné náboje. Ve vnějším obvodu protéká elektrický proud ve stejném směru (na obr. 28.1 ve směru otáčení hodinových ručiček).*

Obr. 28.1 Jednoduchý elektrický obvod, v němž zdroj emn koná práci na nosičích náboje a udržuje ustálený proud I rezistorem.



Uvnitř zdroje emn se kladné náboje pohybují z oblasti nižšího elektrického potenciálu, a tedy nižší potenciální

* Ve fyzice tedy mají všechny šipky směr proudu. V elektrotechnice obvykle značí šipky směr poklesu potenciálů (úbytků napětí). Směry šipek jsou tedy ve fyzice oproti elektrotechnice opačné uvnitř zdrojů emn. Na ostatních prvcích obvodů se směry šipek shodují.

energie (u záporného pólu), do oblasti vyššího potenciálu, a tedy vyšší potenciální energie u kladného pólu. Pohybují se tedy právě v *opačném* směru, než v jakém by je intenzita elektrického pole mezi svorkami (orientovaná od kladného pólu k zápornému) uváděla do pohybu.

Z toho vyplývá, že ve zdroji emn musí být nějaký zdroj energie, který mu umožňuje konat práci při přemísťování nábojů do míst, kde je potřebujeme mít. Zdroj energie může být chemický, např. v bateriích nebo v palivových článcích. Může užívat mechanickou práci, jak je tomu u elektrických generátorů. Teplotního rozdílu se využívá v termočláncích, a konečně zářivé (elektromagnetické) energie dodávané Sluncem ve slunečních článcích.

Rozeberme si nyní obvod na obr. 28.1 z hlediska práce a přenosu energie. V každém časovém intervalu dt prochází libovolným řezem protínajícím obvod — např. rovinou a — (kladný) náboj dQ . Stejně velký náboj prochází i libovolným jiným řezem; musí také vstoupit do zdroje emn jeho záporným pólem a vystoupit z něj pólem kladným. Aby se náboj dQ takto pohyboval, musí zdroj vykonat práci dW_z . Pomocí této práce definujeme emn zdroje

$$\mathcal{E} = \frac{dW_z}{dQ} \quad (\text{definice emn zdroje}). \quad (28.1)$$

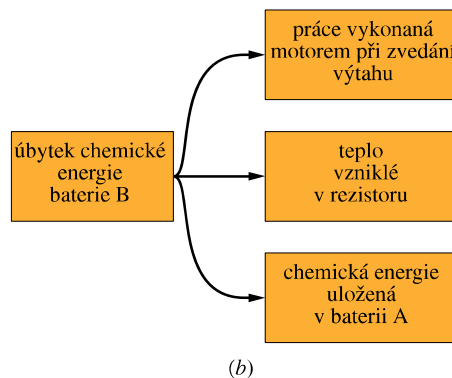
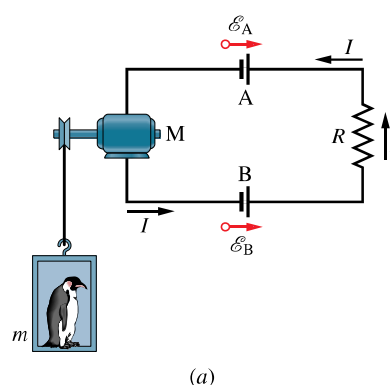
Vidíme, že emn zdroje je rovno práci, kterou zdroj vykoná při přemísťování kladného jednotkového náboje uvnitř zdroje od záporného pólu ke kladnému. Jednotkou emn v soustavě SI je joule na coulomb, $\text{J} \cdot \text{C}^{-1}$; tuto jednotku jsme v kap. 25 nazvali **volt**.

Ideální zdroj emn je takový, který neklade žádný odpor pohybu nosičů náboje uvnitř zdroje od pólu k pólu, nemá tedy žádný vnitřní odpor. Napětí mezi jeho póly je rovno \mathcal{E} , tedy jeho emn. Např. ideální baterie o $\mathcal{E} = 12,0 \text{ V}$ má vždy napětí $12,0 \text{ V}$ mezi svými póly bez ohledu na zátěž.

Reálný zdroj emn, například reálná baterie, klade určitý odpor nosičům náboje pohybujícím se uvnitř zdroje, má tedy určitý vnitřní odpor. Pokud reálný zdroj emn není zapojen do obvodu, neprotéká jím proud a jeho vnitřní odpor se neprojevuje: napětí mezi jeho svorkami, tzv. **svorkové napětí**, je rovno jeho emn. Prochází-li však zdrojem proud, liší se napětí mezi jeho svorkami od emn. Vlastnostmi skutečných baterií se budeme zabývat v čl. 28.4.

Je-li zdroj zapojen do obvodu, předává energii nosičům náboje, které jím procházejí. Nosiče náboje pak předávají získanou energii jinému zařízení zapojenému do obvodu, například svítící žárovce. Na obr. 28.2a je nakreslen obvod se dvěma ideálními akumulátorovými bateriemi A a B, rezistorem R a elektromotorem M, který zvedá výtah a používá přitom energii, kterou dostává od nosičů

náboje v obvodu. Všimněte si, že baterie jsou zapojeny tak, že by vyvolávaly pohyb nosičů náboje v obvodu každá v opačném směru. Výsledný směr proudu v obvodu určuje baterie o větším emn, což je v našem případě baterie B. Chemická energie v baterii B se tedy postupně zmenšuje tak, jak se předává energii nosičům náboje procházejícím baterií. Avšak chemická energie baterie A se zvětšuje, protože proud uvnitř ní teče od kladného pólu k zápornému. Baterie B tedy nabíjí baterii A. Baterie B také dodává energii motoru M a rezistoru R . Na obr. 28.2b jsou znázorněny všechny toky energií z baterie B, z nichž každý snižuje její chemickou energii.



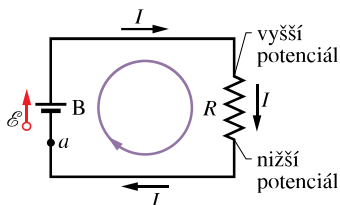
Obr. 28.2 (a) Baterie B určuje směr proudu v obvodu, neboť $\mathcal{E}_B > \mathcal{E}_A$. (b) Přenos energie v obvodu (za předpokladu, že v motoru nedochází k žádným ztrátám energie).

28.3 VÝPOČET PROUDU V JEDNODUCHÉM OBVODU

Vysvětlíme si dva způsoby, jak vypočítat proud v jednoduchém obvodu na obr. 28.3 tvořeném jedinou smyčkou. První způsob je založen na úvahách o zachování energie, druhý používá pojmu potenciál. Obvod se skládá z ideální baterie B o emn \mathcal{E} , rezistoru o odporu R a ze dvou spojovacích vodičů. (Nebude-li řečeno jinak, předpokládáme

vždy, že spojovací vodiče mají nulový odpor. Jejich jediným úkolem je vytvořit vodivou dráhu, po níž se mohou pohybovat nosiče náboje.)

Obr. 28.3 Jednoduchý obvod, v němž je rezistor o odporu R připojen k ideální baterii B o elektromotorickém napětí \mathcal{E} . Všemi částmi obvodu protéká stejný proud I .



Energiová metoda

Z rov. (27.22), $P = I^2 R$, plyne, že za časový interval dt je v rezistoru na obr. 28.3 disipována energie $I^2 R dt$. (Protože předpokládáme, že spojovací vodiče mají nulový odpor, neztrácí se v nich žádná energie.) Během téhož časového intervalu projde baterií B náboj $dQ = I dt$, takže podle rov. (28.1) baterie vykoná práci

$$dW_z = \mathcal{E} dQ = \mathcal{E} I dt.$$

Podle zákona zachování energie se práce vykonaná baterií musí rovnat Joulovu teplotu vzniklému v rezistoru, tedy

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt.$$

Odtud plyne

$$\mathcal{E} = IR.$$

Interpretujme tuto rovnici. Elektromotorické napětí \mathcal{E} je energie připadající na jednotkový náboj, kterou baterie předá nábojům. Veličina IR je energie připadající na jednotkový náboj odevzdaná pohybujícími se náboji do rezistoru. Energie, kterou nábojům předá baterie, je pak rovna energii, kterou náboje odevzdají do rezistoru. Z poslední rovnice pro proud I v obvodu plyne

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (28.2)$$

Potenciálová metoda

Zvolme libovolný bod obvodu na obr. 28.3 za počáteční, postupujme obvodem v určitém směru a sčítáme algebraicky (tj. s přihlédnutím ke znaménku) úbytků napětí podél obvodu. Když se vrátíme zpět do počátečního bodu, dostaneme se i k počátečnímu potenciálu. Dříve než to skutečně provedeme, vyslovíme obecné tvrzení, které platí nejen pro jednoduchý obvod, jaký je např. na obr. 28.3, ale i pro libovolný obvod složený z mnoha **smyček**, o nichž budeme mluvit v čl. 28.6.

Smyčkové pravidlo: Algebraický součet úbytků napětí při průchodu libovolnou uzavřenou smyčkou je nulový.

Toto tvrzení se často označuje jako *Kirchhoffův zákon o napětí* nebo též *druhý Kirchhoffův zákon* podle německého fyzika Gustava Roberta Kirchhoffa. Pravidlo má analogii ve výroku, že každý bod na svahu hory má jen jednu nadmořskou výšku. Jestliže vyjdeme z kteréhokoli bodu, obejdeme horu a vrátíme se do výchozího bodu, musí být algebraický součet změn nadmořských výšek během cesty roven nule.

Začneme v bodě a (obr. 28.3), jehož potenciál označme φ_a , a postupujme např. ve směru otáčení hodinových ručiček podél obvodu, dokud nepřejdeme opět do bodu a . Při postupu zaznamenávejme změny potenciálu. Náš výchozí bod má potenciál záporného pólu baterie. Protože baterie je ideální, napětí mezi jejími póly je rovno jejímu elektromotorickému napětí \mathcal{E} . Projdeme-li baterií k jejímu kladnému pólu, je změna potenciálu rovna $+\mathcal{E}$.

Když postupujeme podél horního spojovacího vodiče k hornímu konci rezistoru, potenciál se nemění, protože vodič má zanedbatelný odpor. Celý spojovací vodič má tedy stejný potenciál jako kladný pól baterie a stejný potenciál má i horní konec rezistoru. Když však projdeme rezistorem, změní se potenciál o hodnotu $-IR$.

Podél dolního spojovacího vodiče se vrátíme do bodu a . Protože tento vodič má také zanedbatelný odpor, potenciál se přitom opět nemění. V bodě a musí být opět potenciál φ_a . Protože jsme obešli celou uzavřenou smyčku, musí se potenciál ve výchozím bodě změnit o algebraický součet úbytků potenciálu podél smyčky rovnat potenciálu v koncovém bodě, tedy

$$\varphi_a + \mathcal{E} - IR = \varphi_a.$$

Potenciál φ_a na obou stranách rovnice se vyruší, takže dostaneme

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

Proud vypočtený z této rovnice, $I = \mathcal{E}/R$, je stejný jako při použití energiové metody, viz rov. (28.2).

Použijeme-li smyčkové pravidlo při postupu proti směru otáčení hodinových ručiček podél obvodu, dostaneme

$$-\mathcal{E} + IR = 0$$

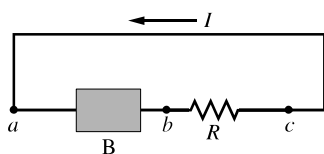
a opět vychází $I = \mathcal{E}/R$. Uzavřenou smyčkou tedy můžeme procházet v libovolném směru.

Abychom se připravili na složitější obvody, zformulujeme dvě pravidla, jak určit změny potenciálu při postupu podél smyčky:

Smyčkové pravidlo pro rezistory: Při průchodu rezistorem ve směru proudu I se potenciál změní o hodnotu $-IR$, při průchodu rezistorem v opačném směru o hodnotu $+IR$.

Smyčkové pravidlo pro zdroje emn: Při průchodu ideálním zdrojem emn ve směru šipky znázorňující toto napětí se potenciál změní o hodnotu $+\mathcal{E}$, při průchodu v opačném směru o hodnotu $-\mathcal{E}$.

KONTROLA 1: Na obrázku je jednoduchý obvod s baterií B a rezistorem R , kterým prochází proud I (spojovací vodiče mají zanedbatelný odpor). (a) Má šipka znázorňující emn baterie ukazovat doleva, nebo doprava? Určete (b) proud, (c) elektrický potenciál, (d) elektrickou potenciální energii nosiče náboje v bodech a , b , c a uspořádejte je sestupně podle jejich velikosti.

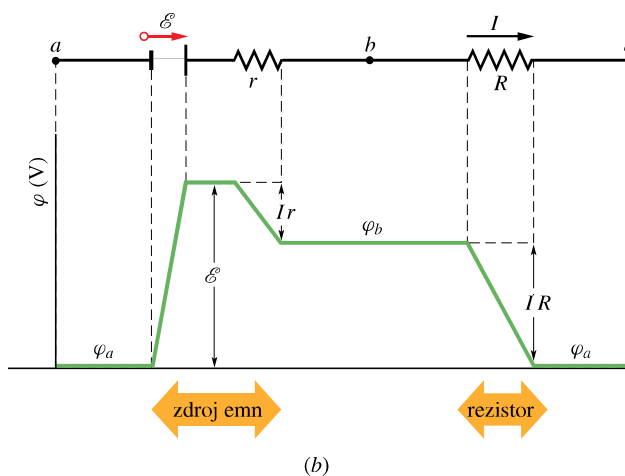
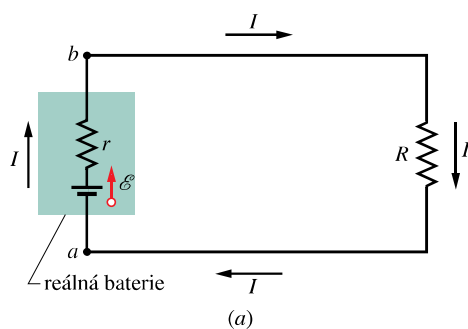


28.4 JINÉ JEDNODUCHÉ OBVODY

V tomto odstavci si rozšíříme poznatky o jednoduchých obvodech.

Vnitřní odpor

Na obr. 28.4a je reálná baterie o vnitřním odporu r spojená s rezistorem o odporu R . Vnitřní odpor baterie je vlastně



Obr. 28.4 (a) Jednoduchý obvod s reálnou baterií o vnitřním odporu r a elektromotorickém napětí \mathcal{E} . (b) Nahoře je nakreslen obvod rozvinutý do úsečky. V grafu vidíme změny potenciálu při průchodu obvodem ve směru otáčení hodinových ručiček. Potenciál φ_a je zvolen jako nulový a ostatní potenciály v obvodu jsou vztaženy k této nulové hladině.

elektrický odpor materiálu baterie, a proto je neodstranitelnou vlastností baterie. Na obr. 28.4a je reálná baterie symbolicky nakreslena tak, jako by ji šlo rozdělit na ideální baterii o elektromotorickém napětí \mathcal{E} a rezistor o odporu r . Na pořadí, v jakém tyto symboly zakreslíme, nezáleží.

Použijeme smyčkové pravidlo tak, že vyjdeme z bodu a a budeme postupovat ve směru otáčení hodinových ručiček. Sestavíme tak rovnici

$$\mathcal{E} - Ir - IR = 0 \quad (28.3)$$

a z ní vypočteme proud

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (28.4)$$

Všimněte si, že tento vztah přechází v rov. (28.2), je-li baterie ideální, tj. je-li $r = 0$.

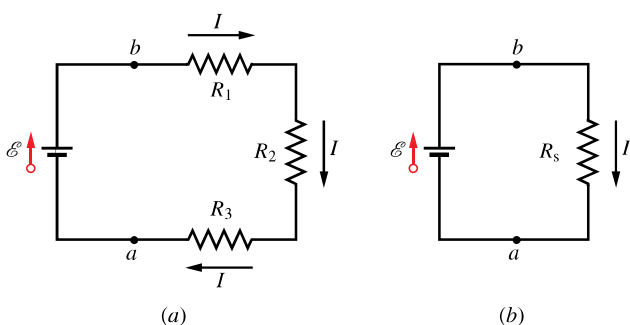
Na obr. 28.4b je průběh elektrického potenciálu podél obvodu. (Aby graf na obr. 28.4b lépe vystihoval uzavřený obvod, představme si ho stočený do ruličky tak, že bod a vlevo splyne s bodem a vpravo.) Uvědomte si, že průchod obvodem a návrat do výchozího bodu je podobný putování kolem (potenciálové) hory a návratu do počáteční nadmořské výšky.

Pokud výslovně neřekneme, že jde o reálnou baterii, nebo pokud nebude zadán vnitřní odpor baterie, budeme v této knize vždy předpokládat, že baterie je ideální. Baterie v reálném světě jsou ovšem reálné a ne vždy můžeme jejich vnitřní odpor zanedbat.

Sériové zapojení rezistorů

Na obr. 28.5a jsou tři rezistory zapojené **sériově** neboli **za sebou** a připojené k ideální baterii o elektromotorickém napětí \mathcal{E} .

Při **sériovém zapojení** prochází všemi rezistory stejný proud a celkové napětí přiložené na rezistory je rovno součtu napětí na jednotlivých rezistorech.



Obr. 28.5 (a) Tři rezistory jsou zapojeny sériově mezi body a a b . (b) Ekvivalentní obvod, v němž je trojice rezistorů nahrazena rezistorem o odporu R_s .

Hledáme odpor R_s sériové kombinace tří rezistorů na obr. 28.5a. Jinými slovy, hledáme odpor jediného (ekvivalentního) rezistoru, kterým můžeme nahradit trojici rezistorů, aniž by se při stálém napětí mezi body a , b změnil proud I v obvodu. Použijeme smyčkové pravidlo, vyjdeme z bodu a a obejdeme obvod ve směru otáčení hodinových ručiček. Dostaneme

$$\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_3 = 0,$$

tedy

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (28.5)$$

Kdybychom trojici rezistorů nahradili jediným rezistorem o odporu R_s podle obr. 28.5b, dostali bychom

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_s}. \quad (28.6)$$

Porovnáme-li rov. (28.5) a (28.6), obdržíme

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3.$$

Výsledek lze snadno rozšířit na sériovou kombinaci n rezistorů:

$$R_s = \sum_{j=1}^n R_j \quad (n \text{ rezistorů zapojených sériově}). \quad (28.7)$$

Je zřejmé, že při sériovém zapojení rezistorů je ekvivalentní odpor R_s větší než odpor kteréhokoli z rezistorů.

28.5 NAPĚTÍ V OBVODECH

Často chceme určit rozdíl potenciálů (tedy napětí) mezi dvěma body obvodu. Jaké je například napětí mezi body b a a v obvodu na obr. 28.4a? Abychom ho vypočítali, vyjdeme z bodu b a postupujeme obvodem ve směru otáčení hodinových ručiček k bodu a přes rezistor R . Jestliže φ_a a φ_b jsou potenciály v bodech a , b , pak

$$\varphi_b - IR = \varphi_a,$$

protože podle pravidla pro rezistory se při průchodu rezistorem ve směru toku proudu potenciál snižuje. Odvozenou rovnici přepíšeme ve tvaru

$$\varphi_b - \varphi_a = U = +IR, \quad (28.8)$$

z něhož je zřetelně vidět, že potenciál v bodě b je vyšší než potenciál v bodě a . Dosazením z rov. (28.4) dostaneme

$$U = \mathcal{E} \frac{R}{R + r}, \quad (28.9)$$

kde r je vnitřní odpor zdroje emn.

Napětí mezi libovolnými dvěma body elektrického obvodu určíme takto: Vyjdeme z jednoho z těchto bodů, postupujeme po libovolné cestě obvodem ke druhému bodu a přitom algebraicky sčítáme dílčí napětí.

Vypočteme znovu rozdíl $\varphi_b - \varphi_a$, tak, že vyjdeme z bodu b , ale do bodu a budeme postupovat přes baterii proti směru otáčení hodinových ručiček. Tak obdržíme

$$\varphi_b + Ir - \mathcal{E} = \varphi_a$$

neboli

$$U = \mathcal{E} - Ir. \quad (28.10)$$

Dosazením rov. (28.4) dojdeme opět k výsledku (28.9).

Rozdíl $\varphi_b - \varphi_a$ je podle obr. 28.4 roven napětí U na svorkách baterie. Jak jsme řekli už dříve, rozdíl $\varphi_b - \varphi_a$ je roven elektromotorickému napětí \mathcal{E} baterie jedině tehdy, když baterie má nulový vnitřní odpor (tj. $r = 0$ v rov. (28.9)) nebo je-li obvod rozpojen (tj. $I = 0$ v rov. (28.10)). Předpokládejme, že v obvodu na obr. 28.4 je $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$ a $r = 2,0 \Omega$. Pomocí rov. (28.9) vypočteme, že napětí na svorkách baterie je

$$U = \varphi_b - \varphi_a = (12 \text{ V}) \frac{(10 \Omega)}{(10 \Omega + 2,0 \Omega)} = 10 \text{ V}.$$

Při „pumpování nábojů“ uvnitř sebe samé vykoná baterie (v důsledku elektrochemických reakcí) na jednotkovém náboji práci, která je rovna jejímu elektromotorickému napětí $\mathcal{E} = 12 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} = 12 \text{ V}$. Protože však baterie má nenulový vnitřní odpor $r = 2,0 \Omega$, je na jejích svorkách napětí pouze $U = 10 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} = 10 \text{ V}$.

Výkon, napětí a elektromotorické napětí

Jestliže baterie nebo nějaký jiný zdroj emn koná práci na nosičích elektrického náboje tvořících proud I , přenáší energii ze svého vlastního zdroje energie (jako je např. chemický zdroj energie v baterii) na nosiče nábojů. Protože reálný zdroj emn má vnitřní odpor r , je část energie zdroje disipována přímo uvnitř zdroje na vnitřním odporu r (o disipaci jsme mluvili v čl. 27.7). Sledujme tyto přeměny.

Výkon, který dodává zdroj emn prostřednictvím nosičů náboje do zbytku obvodu, je vyjádřen rov. (27.21):

$$P = IU, \quad (28.11)$$

kde U je napětí na svorkách zdroje. Z rov. (28.10) dosadíme $U = \mathcal{E} - Ir$ do rov. (28.11) a tím dostaneme

$$P = I(\mathcal{E} - Ir) = I\mathcal{E} - I^2r. \quad (28.12)$$

Člen I^2r v rov. (28.12) udává výkon P_r disipovaný uvnitř zdroje emn:

$$P_r = I^2r \quad (\text{ztrátový výkon zdroje na jeho vnitřním odporu}). \quad (28.13)$$

Člen $I\mathcal{E}$ v rov. (28.12) musí odpovídat výkonu zdroje emn P_{emn} , tedy rychlosti, s jakou ubývá chemická energie baterie. Tedy

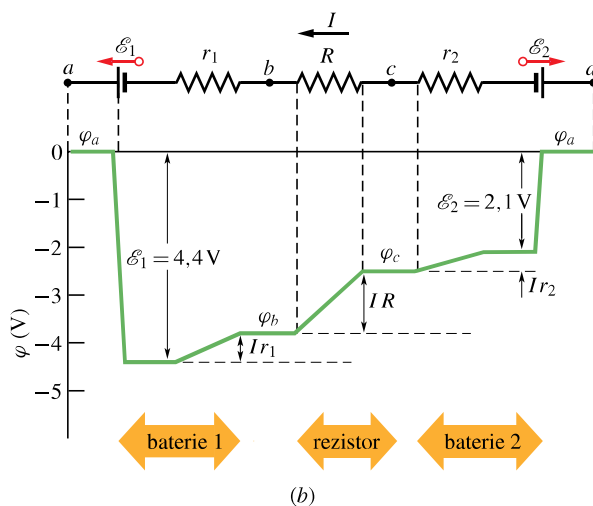
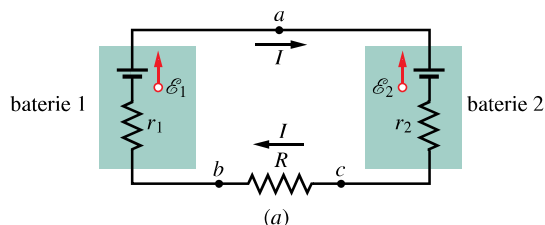
$$P_{\text{emn}} = I\mathcal{E} \quad (\text{výkon zdroje emn}). \quad (28.14)$$

Jestliže se baterie nabíjí (proud jí protéká opačným směrem, než když se vybíjí), nosiče nábojů přenášejí energii do baterie. Přitom se část energie přeměňuje v chemickou energii baterie a část je disipována na jejím vnitřním odporu. Rychlost změny (přírůstku) chemické energie je dána rov. (28.14); rychlost, s níž je energie disipována ve zdroji, je dána rov. (28.13); rychlost, s níž nosiče náboje dodávají baterii energii, je dána rov. (28.11).

KONTROLA 2: Pro rezistory na obr. 28.5a platí $R_1 > R_2 > R_3$. Uspořádejte rezistory sestupně podle (a) velikosti proudu, který jimi prochází, (b) napětí na jejich svorkách.

PŘÍKLAD 28.1

Vypočítejte proud v obvodu na obr. 28.6a. Elektromotorická napětí a odpory rezistorů jsou: $\mathcal{E}_1 = 4,4 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 2,1 \text{ V}$, $r_1 = 2,3 \Omega$, $r_2 = 1,8 \Omega$, $R = 5,5 \Omega$.



Obr. 28.6 Příklady 28.1 a 28.2. (a) Jednoduchá smyčka obsahující dvě reálné baterie a rezistor. Baterie jsou zapojeny „proti sobě“ — to znamená, že by samy o sobě vyvolávaly proudy v obvodu v opačných směrech. (b) Graf průběhu potenciálu podél obvodu při průchodu obvodem od bodu a proti směru otáčení hodinových ručiček, přičemž potenciál bodu a je zvolen jako nulový. (Aby vztah mezi obvodem a grafem byl zřetelnější, představte si, že obvod přeručíme v bodě a , potom rozevřeme levou část obvodu směrem doleva a pravou část obvodu směrem doprava.) Protože přes baterii 1 procházíme od vyššího potenciálu k nižšímu proti směru proudu, potenciál se sníží o hodnotu \mathcal{E}_1 a zvýší o hodnotu Ir_1 . Protože přes rezistor R procházíme proti směru proudu, potenciál se zvýší o hodnotu IR . Protože přes baterii 2 procházíme od nižšího potenciálu k vyššímu proti směru proudu, potenciál se zvýší o hodnotu \mathcal{E}_2 a poté o hodnotu Ir_2 .

ŘEŠENÍ: Baterie jsou zapojeny „proti sobě“; protože však \mathcal{E}_1 je větší než \mathcal{E}_2 , určuje směr proudu v obvodu baterie 1. Použijeme-li smyčkové pravidlo a projdeme-li obvodem proti směru otáčení hodinových ručiček od bodu a , dostaneme

$$-\mathcal{E}_1 + Ir_1 + IR + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = 0.$$

Ověřte si, že ke stejné rovnici dospějete, i když projdete obvodem ve směru otáčení hodinových ručiček a začnete

v nějakém jiném bodě. Porovnejte si také jednotlivé členy této rovnice s obr. 28.6b, na němž je znázorněn průběh potenciálu graficky (potenciál v bodě a je zvolen jako nulový). Vyřešením sestavené rovnice vypočteme hledaný proud

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} = \frac{(4,4 \text{ V} - 2,1 \text{ V})}{(5,5 \Omega + 2,3 \Omega + 1,8 \Omega)} = 0,2396 \text{ A} \doteq 240 \text{ mA.} \quad (\text{Odpověď})$$

RADY A NÁMĚTY

Bod 28.1: Jak se volí směr proudu

Při řešení příkladů s elektrickými obvody nepotřebujeme znát předem správný směr proudu. Směr proudu si můžeme zvolit libovolně. Zvolíme-li směr správně, vyjde proud kladný, zvolíme-li ho opačně, vyjde proud záporný. Předpokládejme, že proud v obvodu na obr. 28.6a teče proti směru otáčení hodinových ručiček, tedy opačně, než ukazuje proudová šipka na obrázku. Smyčkové pravidlo použité od bodu a proti směru otáčení hodinových ručiček vede k rovnici

$$-\mathcal{E}_1 - Ir_1 - IR - Ir_2 + \mathcal{E}_2 = 0,$$

odkud

$$I = -\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2}.$$

Dosazením číselných hodnot (viz př. 28.1) zjistíme, že proud $I = -240 \text{ mA}$. Znaménko minus znamená, že proud má opačný směr, než který jsme zvolili.

PŘÍKLAD 28.2

(a) Jaké je napětí na svorkách baterie 1 v obvodu na obr. 28.6a?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z bodu b (který má stejný potenciál jako záporný pól baterie), projdeme baterií 1 do bodu a (který má potenciál kladného pólu baterie) a sledujeme úbytky potenciálu; dostaneme

$$\varphi_b - Ir_1 + \mathcal{E}_1 = \varphi_a$$

a po úpravě

$$\begin{aligned} \varphi_a - \varphi_b &= -Ir_1 + \mathcal{E}_1 = \\ &= -(0,2396 \text{ A})(2,3 \Omega) + (4,4 \text{ V}) = \\ &= +3,84 \text{ V} \doteq 3,8 \text{ V.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Výsledek si můžeme zkontrolovat tak, že vyjdeme z bodu b a projdeme obvodem proti směru otáčení hodinových ručiček do bodu a . Pro tuto druhou cestu obdržíme

$$\varphi_b + IR + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = \varphi_a$$

a z toho

$$\begin{aligned} \varphi_a - \varphi_b &= I(R + r_2) + \mathcal{E}_2 = \\ &= (0,2396 \text{ A})(5,5 \Omega + 1,8 \Omega) + (2,1 \text{ V}) = \\ &= +3,84 \text{ V} \doteq 3,8 \text{ V.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Výsledky obou postupů jsou tedy stejné. Napětí mezi dvěma body je stejné pro všechny cesty, které tyto dva body spojují. (b) Jaké je napětí na svorkách baterie 2 v obvodu na obr. 28.6a?

ŘEŠENÍ: Vyjdeme z bodu c (který má stejný potenciál jako záporný pól baterie 2), projdeme baterií do bodu a (který má potenciál kladného pólu baterie) a zaznamenáme napětí; dostaneme

$$\varphi_c + Ir_2 + \mathcal{E}_2 = \varphi_a,$$

resp.

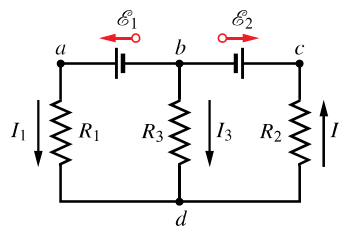
$$\begin{aligned} \varphi_a - \varphi_c &= Ir_2 + \mathcal{E}_2 = \\ &= (0,2396 \text{ A})(1,8 \Omega) + (2,1 \text{ V}) = \\ &= +2,5 \text{ V.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Napětí na svorkách této baterie (2,5 V) je větší než její emn (2,1 V). Je to proto, že baterie 1 způsobí, že elektrický náboj prochází baterií 2 v opačném směru, než by procházel, kdyby baterie 1 v obvodu nebyla.

KONTROLA 3: Baterie má emn $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ a vnitřní odpor 2Ω . Je napětí na svorkách baterie větší, menší, nebo rovno 12 V , jestliže proud baterií (a) prochází od záporného pólu ke kladnému pólu, (b) prochází od kladného pólu k zápornému pólu, (c) je nulový?

28.6 OBVODY S VÍCE SMYČKAMI

Na obr. 28.7 je příklad obvodu s více než jednou smyčkou. Pro zjednodušení předpokládejme, že baterie jsou ideální. Obvod má dva **uzly** (místa vodivého spojení) označené b a d a tři **větvě** spojující tyto uzly: levou (bad), pravou (bcd) a střední (bd). Jaké proudy jimi procházejí?



Obr. 28.7 Obvod složený ze tří větví: z levé bad , pravé bcd a střední bd . Obvod také obsahuje tři smyčky: levou $badb$, pravou $bcd b$ a velkou $badcb$.

Označíme proudy ve větvích libovolně, přičemž pro každou větev použijeme jiný symbol. Proud I_1 je stejný v celé větvi bad , proud I_2 je stejný v celé větvi bcd , proud I_3 protéká větví bd . Směry proudů zvolíme libovolně. Uvažujme uzel d . Elektrický náboj přinášející do uzlu proudy I_1 a I_3 a z uzlu ho odnáší odtékající proud I_2 . Náboj v uzlu se nevětšuje ani nezmenšuje, takže musí platit

$$I_1 + I_3 = I_2. \quad (28.15)$$

Můžete si ověřit, že použití této podmínky pro uzel b vede ke stejné rovnici. Rov. (28.15) zobecníme v obecné pravidlo:

Uzlové pravidlo: Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.

Toto pravidlo se nazývá *Kirchhoffův zákon o proudech* nebo též *první Kirchhoffův zákon*. Je to prostě zákon zachování elektrického náboje při ustáleném proudu: v uzlu náboj ani nevzniká, nehromadí se, ani se neztrácí. Našimi hlavními nástroji pro řešení složených obvodů tedy jsou *smýčkové pravidlo* (které je důsledkem zákona zachování energie) a *uzlové pravidlo* (které je důsledkem zákona zachování elektrického náboje).

V rov. (28.15) jsou tři neznámé veličiny. Abychom mohli vyřešit náš problém (tj. určit všechny tři proudy), potřebujeme další dvě rovnice s týmiž neznámými. Získáme je tak, že dvakrát použijeme smýčkové pravidlo. V obvodu na obr. 28.7 máme na výběr tři smyčky: levou smyčku ($badb$), pravou smyčku ($bcd b$) a velkou smyčku ($badcb$). Je jedno, které dvě z těchto tří smyček zvolíme — zvolme tedy levou a pravou smyčku.

Jestliže projdeme levou smyčkou od bodu b proti směru otáčení hodinových ručiček, dostaneme

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0. \quad (28.16)$$

Při průchodu pravou smyčkou od bodu b proti směru otáčení hodinových ručiček dostaneme

$$-I_3 R_3 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0. \quad (28.17)$$

Nyní máme tři rovnice (28.15), (28.16) a (28.17) se třemi neznámými proudy, které dokážeme vyřešit.

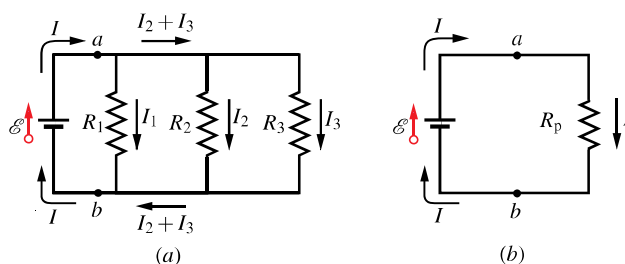
Kdybychom použili smýčkového pravidla pro velkou smyčku, dostali bychom (při průchodu smyčkou z bodu b proti směru otáčení hodinových ručiček) rovnici

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = 0.$$

Na první pohled se zdá, že tato rovnice přináší novou informaci, ale ve skutečnosti je pouze součtem rov. (28.16) a (28.17).

Paralelní zapojení rezistorů

Na obr. 28.8 jsou nakresleny tři rezistory připojené **paralelně** neboli **vedle sebe** k ideální baterii o elektromotorickém napětí \mathcal{E} . Ke každému rezistoru v této paralelní kombinaci je tak přiloženo napětí $U = \mathcal{E}$.



Obr. 28.8 (a) Tři rezistory zapojené paralelně mezi body a , b . (b) Ekvivalentní obvod, v němž jsou tři rezistory nahrazeny ekvivalentním rezistorem o odporu R_p .

Při paralelním zapojení je napětí na každém rezistoru stejné jako napětí přiložené k celému zapojení a celkový proud procházející kombinací rezistorů je roven součtu proudů procházejících jednotlivými rezistory.

Hledáme odpor R_p soustavy rezistorů zapojených paralelně. Jinými slovy, hledáme odpor jediného (ekvivalentního) rezistoru, který může nahradit paralelní kombinaci rezistorů, aniž by se při stálém napětí U na této kombinaci změnil proud I do ní vtékající. Proudů ve třech větvích v obvodu na obr. 28.8a jsou

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U}{R_3},$$

kde U je napětí mezi body a a b . Použijeme-li uzlového pravidla pro uzel ležící vpravo od bodu a a dosadíme-li za proudy, dostaneme

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right). \quad (28.18)$$

Kdybychom nahradili paralelní kombinaci tří rezistorů jediným rezistorem o odporu R_p (obr. 28.8b), dostali bychom

$$I = \frac{U}{R_p}. \quad (28.19)$$

Porovnáním rovnic (28.18) a (28.19) dospějeme k závěru, že

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (28.20)$$

Rozšíříme-li tento výsledek na n rezistorů zapojených paralelně, obdržíme vztah

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ rezistorů zapojených paralelně}). \quad (28.21)$$

Jsou-li paralelně zapojeny *jen dva* rezistory, je výsledný odpor tedy roven součinu odporů obou rezistorů dělenému jejich součtem

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (28.22)$$

Všimněte si, že pokud dva nebo více rezistorů zapojíme paralelně, je ekvivalentní odpor menší než odpor libovolného ze zapojených rezistorů. V tab. 28.1 jsou shrnuty vztahy pro hodnoty ekvivalentních odporů a kapacit pro rezistory a kondenzátory zapojené sériově nebo paralelně.

Tabulka 28.1 Sériové a paralelní zapojení rezistorů a kondenzátorů

SÉRIOVÉ ZAPOJENÍ (ZA SEBOU)	PARALELNÍ ZAPOJENÍ (VEDLE SEBE)
Rezistory	
$R_s = \sum_{j=1}^n R_j$ (28.7)	$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}$ (28.21)
stejný proud každým z rezistorů	stejně napětí na každém rezistoru
Kondenzátory	
$\frac{1}{C_s} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j}$ (26.20)	$C_p = \sum_{j=1}^n C_j$ (26.19)
stejný náboj na každém z kondenzátorů	stejně napětí na každém kondenzátoru

KONTROLA 4: Baterie, na jejichž svorkách je napětí U a kterou protéká proud I , je připojena ke dvěma stejným rezistorům. Jaké je napětí na jednotlivých rezistorech a jaký proud jimi protéká, jsou-li zapojeny (a) sériově, (b) paralelně?

PŘÍKLAD 28.3

Na obr. 28.9a je obvod s jednou ideální baterií $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ a čtyřmi rezistory o odporech $R_1 = 20 \Omega$, $R_2 = 20 \Omega$, $R_3 = 30 \Omega$, $R_4 = 8,0 \Omega$.

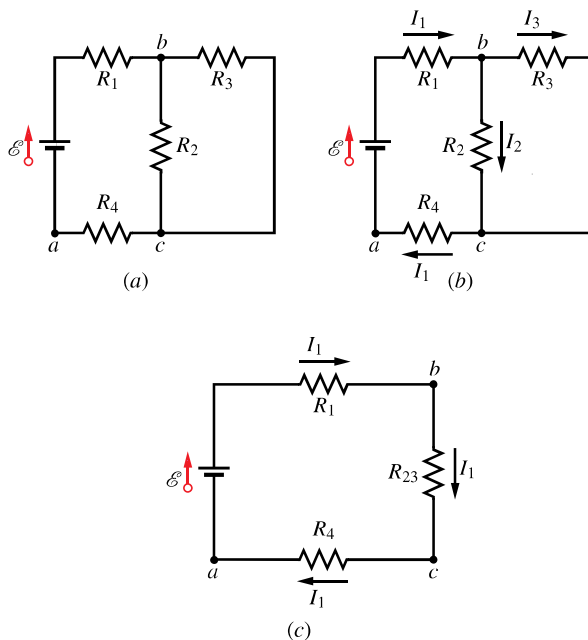
(a) Jaký proud prochází baterií?

ŘEŠENÍ: Proud procházející baterií protéká také rezistorem R_1 . Abychom mohli vypočítat proud, musíme napsat Kirchhoffův zákon pro nějakou smyčku obsahující rezistor R_1 ; může to být buď levá smyčka, nebo celková smyčka. Šipka znázorňující emn baterie je orientována nahoru a proud,

který baterie dodává do obvodu, teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Pokud bychom použili smyčkového pravidla pro levou smyčku, a to ve směru otáčení hodinových ručiček s výchozím bodem a , mohli bychom napsat

$$+\mathcal{E} - IR_1 - IR_2 - IR_4 = 0 \quad (\text{nesprávně}).$$

Tato rovnice je však nesprávná, protože se v ní předpokládá, že rezistory R_1 , R_2 a R_4 prochází stejný proud I . Rezistory R_1 a R_4 opravdu prochází stejný proud, protože proud protékající rezistorem R_4 musí projít baterií a také rezistorem R_1 , aniž by se změnila jeho hodnota. Avšak tento proud se dělí v uzlu b na dvě části, jedna část teče do rezistoru R_2 a zbytek do rezistoru R_3 .



Obr. 28.9 Příklad 28.3. (a) Obvod složený z několika smyček s ideální baterií o elektromotorickém napětí \mathcal{E} a se čtyřmi rezistory. (b) Proudy procházející rezistory. (c) Zjednodušený obvod. Rezistory R_2 a R_3 jsou nahrazeny rezistorem o ekvivalentním odporu R_{23} . Proud procházející rezistorem R_{23} je stejný jako proud rezistory R_1 a R_4 .

Abychom odlišili různé proudy v obvodu, musíme je označit různými symboly jako na obr. 28.9b. Pomocí smyčkového pravidla pak napíšeme rovnici pro levou smyčku ve tvaru

$$+\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_1 R_4 = 0.$$

Tato rovnice však obsahuje dvě neznámé veličiny I_1 a I_2 . Proto potřebujeme ještě jednu rovnici, abychom mohli proudy vypočítat.

Druhá a mnohem snadnější cesta k výsledku je zjednodušit obvod na obr. 28.9b pomocí ekvivalentního rezistoru. Všimněte si, že rezistory R_1 a R_2 nejsou zapojeny sériově, takže

nemohou být nahrazeny ekvivalentním rezistorem. Rezistory R_2 a R_3 jsou však zapojeny paralelně, takže můžeme použít buď rov. (28.21), nebo rov. (28.22) a vypočítat odpovídající ekvivalentní odpor R_{23} :

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{(20 \Omega)(30 \Omega)}{(50 \Omega)} = 12 \Omega.$$

Nyní překreslíme obvod do podoby na obr. 28.9c. Všimněte si, že rezistorem R_{23} musí procházet proud I_1 , protože tento proud teče rezistory R_1 a R_4 a musí tedy spojitě pokračovat i rezistorem R_{23} . Máme tedy jednoduchý obvod s jedinou smyčkou a použitím smyčkového pravidla (ve směru otáčení hodinových ručiček od výchozího bodu a) dostaneme

$$+\mathcal{E} - I_1 R_1 - I_1 R_{23} - I_1 R_4 = 0.$$

Po dosazení číselných hodnot vyjde

$$(12 \text{ V}) - I_1(20 \Omega) - I_1(12 \Omega) - I_1(8,0 \Omega) = 0$$

a odtud proud

$$I_1 = \frac{(12 \text{ V})}{(40 \Omega)} = 0,30 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaký proud I_2 prochází rezistorem R_2 ?

ŘEŠENÍ: Podívejme se opět na obr. 28.9c. Z předcházející části příkladu víme, že proud procházející rezistorem R_{23} je $I_1 = 0,30 \text{ A}$. Můžeme tedy použít rov. (27.8) ($R = U/I$), abychom vypočítali napětí U_{23} na rezistoru R_{23} :

$$U_{23} = I_1 R_{23} = (0,30 \text{ A})(12 \Omega) = 3,6 \text{ V}.$$

Stejné napětí je také na rezistorech R_2 a R_3 . Pomocí rov. (27.8) nyní dostaneme

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{(3,6 \text{ V})}{(20 \Omega)} = 0,18 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

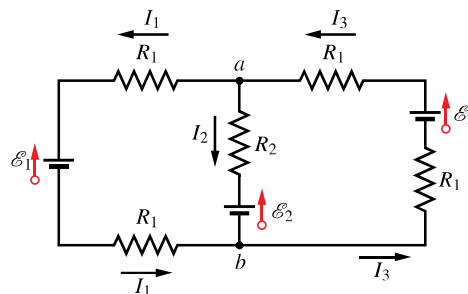
(c) Jaký proud I_3 prochází rezistorem R_3 ?

ŘEŠENÍ: Použijeme uzlového pravidla pro uzel b na obr. 28.9b a pomocí předcházejících výsledků vyjde

$$\begin{aligned} I_3 &= I_1 - I_2 = (0,30 \text{ A}) - (0,18 \text{ A}) = \\ &= 0,12 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 28.4

Na obr. 28.10 je obvod, jehož prvky mají hodnoty $\mathcal{E}_1 = 3,0 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 6,0 \text{ V}$, $R_1 = 2,0 \Omega$, $R_2 = 4,0 \Omega$. Tři baterie v obvodu jsou ideální zdroje. Určete velikost a směr proudu v každé ze tří větví obvodu.



Obr. 28.10 Příklad 28.4. Obvod se třemi smyčkami, v němž jsou zapojeny tři ideální baterie a pět rezistorů.

ŘEŠENÍ: V tomto případě není příliš užitečné pokoušet se obvod zjednodušit, protože žádné dva rezistory nejsou zapojeny paralelně a rezistory zapojené sériově (v pravé větvi nebo v levé větvi) nepředstavují žádný problém. Použijeme tedy smyčkové a uzlové pravidlo a budeme řešit získanou soustavu rovnic.

Označme libovolně směry proudů (obr. 28.10) a pomocí uzlového pravidla pro uzel a napíšeme

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (28.23)$$

Použití uzlového pravidla pro uzel b by vedlo ke stejné rovnici. Dále užijeme smyčkového pravidla pro libovolné dvě ze tří smyček obvodu. Vezmeme třeba levou smyčku, zvolme bod a za výchozí a rozhodněme se projít touto smyčkou proti směru otáčení hodinových ručiček. Obdržíme tak rovnici

$$-I_1 R_1 - \mathcal{E}_1 - I_1 R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2 R_2 = 0,$$

kterou můžeme ihned zjednodušit dosazením číselných hodnot do tvaru

$$I_1(4,0 \Omega) - I_2(4,0 \Omega) = 3,0 \text{ V.} \quad (28.24)$$

Jako druhou zvolíme pravou smyčku. Projdeme-li jí z bodu a ve směru otáčení hodinových ručiček, dostaneme rovnici

$$+I_3 R_1 - \mathcal{E}_2 + I_3 R_1 + \mathcal{E}_2 + I_2 R_2 = 0$$

a po dosazení:

$$I_2(4,0 \Omega) + I_3(4,0 \Omega) = 0. \quad (28.25)$$

Pomocí rov. (28.23) vyloučíme proud I_3 z rov. (28.25), což dává

$$I_1(4,0 \Omega) + I_2(8,0 \Omega) = 0. \quad (28.26)$$

Nyní máme soustavu dvou rovnic (28.24) a (28.26) se dvěma neznámými proudy I_1 a I_2 , kterou můžeme velmi snadno vyřešit. Nejprve vypočteme

$$I_2 = -0,25 \text{ A}.$$

Záporné znaménko napovídá, že proud I_2 teče opačným směrem, než který jsme zvolili. Teče tedy vzhůru baterií \mathcal{E}_2 a rezistorem R_2 . Nyní dosadíme proud $I_2 = -0,25$ A do rov. (28.26) a vypočteme

$$I_1 = 0,50 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

Užitím rov. (28.23) určíme

$$I_3 = I_1 + I_2 = 0,25 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

Kladné znaménko vypočtených proudů I_1 a I_3 potvrzuje, že jsme směr těchto proudů zvolili správně. Na závěr opravíme směr proudu I_2 a dostaneme

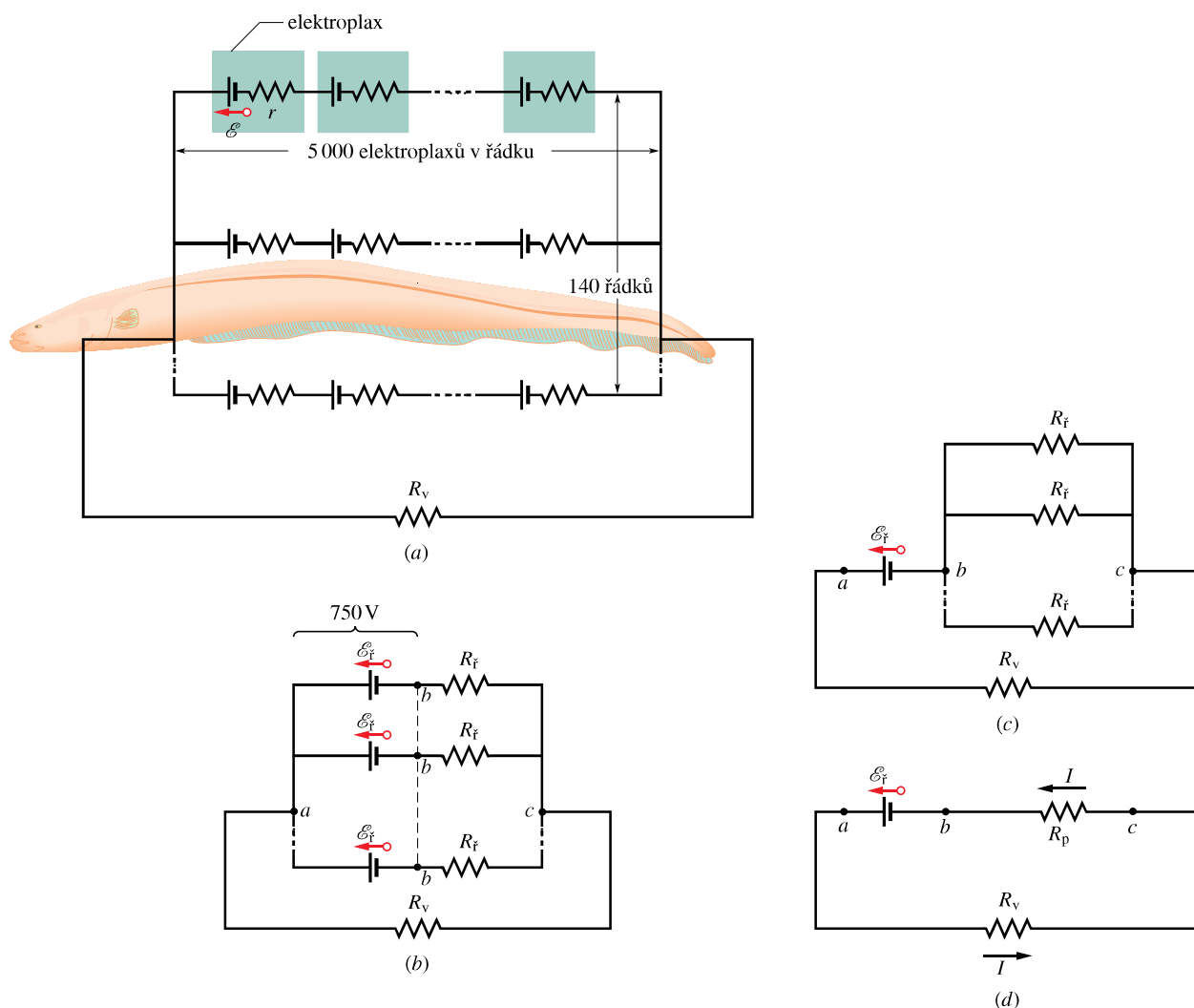
$$I_2 = 0,25 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

PŘÍKLAD 28.5

Elektrické ryby vytvářejí elektrické napětí ve zvláštních biologických buňkách nazývaných *elektroplaxy*, které jsou fyziologickými zdroji emn. Elektroplaxy jihoamerického *paúhoře elektrického* zobrazeného na fotografii na začátku této kapitoly jsou uspořádány ve 140 řádcích podél jeho těla, přičemž každý řádek obsahuje asi 5 000 elektroplaxů. Uspořádání je znázorněno na obr. 28.11a. Každý elektroplax má elektromotorické napětí $\mathcal{E} = 0,15$ V a vnitřní odpor $0,25 \Omega$.

(a) Jaký proud prochází vodou od paúhořovy hlavy k ocasu, je-li odpor vody v okolí paúhoře $R_V = 800 \Omega$?

ŘEŠENÍ: Nejprve zjednodušíme obvod na obr. 28.11a. Celkové emn 5 000 elektroplaxů v jednom řádku je součtem



Obr. 28.11 Příklad 28.5. (a) Elektrický obvod znázorňující paúhoře ve vodě. Každý elektroplax paúhoře má elektromotorické napětí \mathcal{E} a vnitřní odpor r . Každý ze 140 řádků, táhnoucích se od hlavy k ocasu, obsahuje 5 000 elektroplaxů. Odpor okolní vody je R_V . (b) Elektromotorické napětí \mathcal{E}_f a odpor R_f každého řádku. (c) Elektromotorické napětí mezi body a, b je \mathcal{E}_f . Mezi body b, c je 140 paralelně zapojených rezistorů R_f . (d) Zjednodušený obvod s R_p nahrazující paralelní kombinaci.

jejich elektromotrických napětí \mathcal{E} , takže

$$\mathcal{E}_r = 5\,000\mathcal{E} = (5\,000)(0,15\text{ V}) = 750\text{ V}.$$

Celkový odpor jednoho řádku elektroplaxů je součtem vnitřních odporů 5 000 elektroplaxů,

$$R_r = 5\,000r = (5\,000)(0,25\ \Omega) = 1\,250\ \Omega.$$

Každý ze 140 stejných řádků můžeme nyní znázornit jedním zdrojem elektromotorického napětí \mathcal{E}_r a jedním odporem R_r , jak je nakresleno na obr. 28.11b.

Elektromotorické napětí mezi bodem a a bodem b v libovolném řádku na obr. 28.11b je $\mathcal{E}_r = 750\text{ V}$. Protože všechny řádky jsou stejné a všechny jsou spojeny vlevo v uzlu a , mají všechny body b na obr. 28.11b stejný potenciál. Můžeme si tedy představit, že všechny body b jsou spojeny do jediného bodu b . Elektromotorické napětí mezi bodem a a tímto jediným bodem b je $\mathcal{E}_r = 750\text{ V}$, takže můžeme obvod překreslit do podoby na obr. 28.11c.

Mezi body b a c na obr. 28.11c je 140 rezistorů o odporu $R_r = 1\,250\ \Omega$ zapojených paralelně. Ekvivalentní odpor tohoto zapojení je podle rov. (28.21)

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^{140} \frac{1}{R_j} = 140 \frac{1}{R_r}$$

neboli

$$R_p = \frac{R_r}{140} = \frac{(1\,250\ \Omega)}{140} = 8,93\ \Omega.$$

Nahradíme-li tuto paralelní kombinaci rezistorem o ekvivalentním odporu R_p , dostaneme zjednodušený obvod na obrázku 28.11d. Pomocí smyčkového pravidla (vyjdeme z bodu b a postupujeme proti směru otáčení hodinových ručiček) dostaneme

$$\mathcal{E}_r - IR_v - IR_p = 0.$$

Odtud vypočteme proud vodou:

$$I = \frac{\mathcal{E}_r}{R_v + R_p} = \frac{(750\text{ V})}{(800\ \Omega) + (8,93\ \Omega)} = 0,927\text{ A} \doteq 0,93\text{ A}. \quad (\text{Odpověď})$$

Je-li hlava nebo ocas paúhoře v blízkosti nějaké ryby, většina tohoto proudu projde rybou a omráčí ji nebo usmrtí.

(b) Jaký proud I_r prochází každým řádkem elektroplaxů na obr. 28.11a?

ŘEŠENÍ: Protože jsou všechny řádky stejné, rozdělí se proud procházející vodou vně paúhoře mezi ně rovnoměrně, tedy

$$I_r = \frac{I}{140} = \frac{0,927\text{ A}}{140} = 6,6 \cdot 10^{-3}\text{ A}. \quad (\text{Odpověď})$$

Elektrický proud procházející každým řádkem elektroplaxů je tedy malý, asi o dva řády menší než proud okolní vodou. Proto paúhoř sám sebe ani neomráčí ani nezabije, když omračuje nebo zabíjí rybu ve své blízkosti.

RADY A NÁMĚTY

Bod 28.2: Řešení obvodů s bateriemi a rezistory

Uvedeme dvě obecné metody použitelné pro řešení obvodů a pro výpočet neznámých proudů nebo napětí.

(1) Je-li možné obvod zjednodušit nahrazením rezistorů zapojených sériově nebo paralelně pomocí rezistorů o odpovídajících ekvivalentních odporech, udělejte to. Podaří-li se vám zjednodušit obvod na jedinou smyčku, můžete vypočítat proud procházející touto smyčkou jako v př. 28.3a. Pak se vraťte k původnímu nezjednodušenému obvodu (s původními rezistory) a vypočítejte proud nebo napětí na každém z rezistorů jako v př. 28.3b.

(2) Jestliže se obvod nedá zjednodušit na jedinou smyčku, použijte uzlové pravidlo a smyčkové pravidlo k sestavení soustavy rovnic jako v př. 28.4. Potřebujete jen tolik nezávislých rovnic, kolik je neznámých v těchto rovnicích. Potřebujete-li vypočítat proud nebo napětí na určitém rezistoru, musíte zvolit alespoň jednu smyčku tak, aby procházela tímto rezistorem; tak si zajistíte, že se hledaný proud nebo napětí objeví ve vaší soustavě rovnic.

Bod 28.3: Co lze zvolit libovolně při řešení obvodů

Při řešení př. 28.4 jsme několikrát volili libovolně:

- (1) Libovolně jsme zvolili směry proudů na obr. 28.10.
- (2) Libovolně jsme vybrali smyčky, pro které jsme psali rovnice.
- (3) Libovolně jsme zvolili směr, kterým jsme procházeli smyčkami.
- (4) Libovolně jsme zvolili počáteční a koncový bod při přechodu smyčkami.

Tolik libovůle často znepokojuje začátečníka v řešení obvodů, ale zkušený odborník se nezalekne. Zapamatujme si především dvě pravidla. Za prvé, každou zvolenou smyčku musíme projít celou. Za druhé, jakmile jsme jednou zvolili určitý směr některého proudu, nesmíme ho změnit, dokud nevypočítáme číselně hodnoty všech proudů. Zvolíme-li směr obráceně, znaménko minus (–) ve výsledku vás na to upozorní. Opravu provedeme jednoduše vypuštěním znaménka minus a obrácením šipky znázorňující původně zvolený směr proudu na obrázku obvodu. *Nikdy však nesmíme provést tuto opravu dříve, než vypočítáme všechny potřebné proudy a napětí* (tak jsme postupovali v př. 28.4).

Bod 28.4: Řešení složitěho obvodu s mnoha smyčkami

Není příliš pravděpodobné, že by složitý obvod s mnoha smyčkami potřeboval řešit někdo jiný než odborník — elektrotechnik. Přesto snad čtenáře potěší, uvidí-li, že si se svými

dosavadními znalostmi může poradit s *libovolně* složitou strukturou elektrického obvodu.

Podle předchozího bodu již víme, jak převést řešení obvodu na řešení soustavy rovnic pro neznámé proudy I ve větvích, z nichž určíme napětí U na součástkách (rezistorech, bateriích, ...). Každá rovnice bude popisovat jednu uzavřenou smyčku. Mohli bychom vypsat *všechny* rovnice pro *všechny* smyčky ve schématu; dostali bychom ovšem pro naše neznámé zbytečně mnoho rovnic. (Soustava by tedy byla *přeuročena*.) Rovnice by si však určité neodporovaly — prostě by jich jen bylo zbytečně mnoho, některé by totiž byly součtem či rozdílem ostatních rovnic. Abychom vybrali úplný soubor všech N nezávislých rovnic pro N neznámých proudů, můžeme postupovat takto:

(1) Podle zadaného schématu s vodiči, rezistory a zdroji emv vytvoříme *graf*, který sice zachová všechny *uzly*, tj. body, kde se stýkají 3 nebo více vodičů, ale jeho *hrany*, tj. spojnice mezi uzly, budou pouhé úsečky, které budou nahrazovat skutečné větve, tedy jak vodiče, tak i všechny součásti původního obvodu. Na poloze libovolného uzlu na papíře samozřejmě nezáleží, pokud ovšem neměníme počet hran do něj vcházejících a přiřazení každé hrany původní větvi se součástkami. Kdybychom kolem grafu nakreslili kružnici a všechny uzly na ni přesunuli, získali bychom mnohoúhelník s mnoha diagonálami.

(2) V grafu vyznačíme libovolný úplný *strom*. Bude obsahovat *všechny* uzly, ale jen *některé* hrany, tj. takové, které by nikde nevytvořily uzavřenou smyčku. Strom je *úplný*, když mu už nejde doplnit žádnou další hranu, aniž by se vytvořila uzavřená smyčka. Pro daný graf lze vytvořit mnoho různých úplných stromů, všechny však mají stejný počet hran. Všechny také mají stejný počet N ve stromu nepoužitých hran. Ten je roven počtu neznámých proudů ve smyčkách a počtu rovnic, které pro ně nakonec získáme. Hrany tvořící strom budeme pokládat za hrany „použité“.

(3) Nyní do grafu s úplným stromem přidáme jednu z nepoužitých hran. Tím se nutně vytvoří jedna smyčka (jinak by nebyl strom úplný) a dá se dokázat, že se tím uzavře právě jedna smyčka — ne více. Této smyčce odpovídá jedna rovnice podle smyčkového pravidla z čl. 28.3. Zapišeme ji do našeho seznamu nezávislých rovnic. Odpovídající hranu zařadíme mezi „použité“.

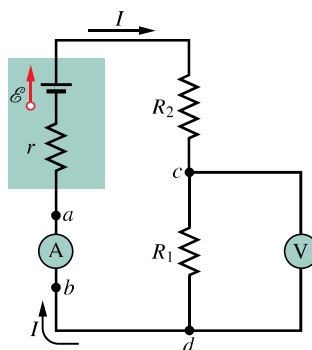
(4) Předchozí krok opakujeme tolikrát, až vyčerpáme všechny nepoužité hrany sítě. S každou dostáváme jednu rovnici; získané rovnice jsou nezávislé a právě postačují pro vyřešení naší úlohy.

28.7 AMPÉRMETR A VOLTMETR

Přístroj používaný k měření proudu se nazývá **ampérmetr**. Abychom mohli změřit proud ve vodiči, musíme obvod přerušit a vložit ampérmetr, takže proud prochází měřicím přístrojem (obr. 28.12).

Je důležité, aby odpor R_A ampérmetru byl velmi malý ve srovnání s ostatními odpory v obvodu. V opačném případě by přítomnost ampérmetru zmenšila měřený proud.

Přístroj používaný k měření napětí (rozdílu potenciálů) se nazývá **voltmetr**. Při měření napětí mezi dvěma body obvodu připojujeme voltmetr mezi tyto body a měřený obvod nepřerušujeme (obr. 28.12).



Obr. 28.12 Jednoduchý obvod znázorňující zapojení ampérmetru a voltmetru.

Odpor voltmetru R_V musí být mnohem větší než odpor kteréhokoli prvku obvodu, k němuž je voltmetr připojen. V opačném případě by proud tekoucí měřicím přístrojem již nebyl zanedbatelný a zmenšil by měřené napětí.

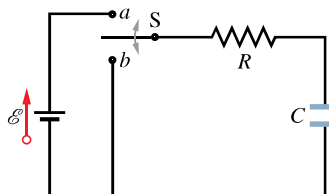
Často se můžeme setkat s měřicím přístrojem vybaveným přepínačem, který může sloužit (podle polohy přepínače) jako ampérmetr nebo jako voltmetr a obvykle i jako **ohmmetr** pro měření odporu připojeného mezi jeho svorky. Takový univerzální přístroj se nazývá **multimetr**.

28.8 OBVODY RC

Až dosud jsme se zabývali pouze obvody, v nichž se proud neměnil s časem. Nyní začneme studovat *proudy proměnné v čase*.

Nabíjení kondenzátoru

Kondenzátor o kapacitě C na obr. 28.13 nejprve není nabit. Abychom ho nabili, přepneme přepínač S do polohy a . Po přepnutí dostáváme uzavřený **sériový RC obvod** obsahující kondenzátor o kapacitě C , rezistor o odporu R a ideální baterii o elektromotorickém napětí \mathcal{E} .



Obr. 28.13 Je-li přepínač S přepnut do polohy a , kondenzátor C se *nabíjí* přes rezistor R . Dáme-li potom přepínač do polohy b , kondenzátor se *vybíjí* přes rezistor R .

Z čl. 26.2 už víme, že jakmile je přepínačem připojena baterie, začne na obou koncích kondenzátoru přecházet elektrický náboj (a tedy protékat proud) mezi elektrodou

kondenzátoru a svorkou baterie. Proud zvětšuje náboj Q na kondenzátoru a tím napětí $U_C = Q/C$ na jeho elektrodách. Když se toto napětí vyrovná s napětím na svorkách baterie (to je v našem případě rovno elektromotorickému napětí \mathcal{E}), proud klesne na nulu. Z rov. (26.1) ($Q = CU$) plyne, že ustálený (koncový) náboj nabitého kondenzátoru má velikost $C\mathcal{E}$.

Nyní se budeme podrobně zabývat procesem *nabíjení*. Bude nás zejména zajímat, jak se v průběhu nabíjení mění s časem náboj $Q(t)$ na deskách kondenzátoru, napětí $U_C(t)$ na kondenzátoru a proud $I(t)$ v obvodu. Začneme tím, že použijeme smyčkové pravidlo a projdeme obvodem od záporného pólu baterie ve směru otáčení hodinových ručiček; dostaneme tak rovnici

$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0. \quad (28.27)$$

Poslední člen na levé straně je napětí na kondenzátoru. Tento člen má záporné znaménko, protože horní deska kondenzátoru připojená ke kladnému pólu baterie má vyšší potenciál než dolní deska a průchodem kondenzátorem se tedy potenciál snižuje.

Samotnou rov. (28.27) nemůžeme vyřešit, protože obsahuje dvě neznámé I a Q . Tyto veličiny však nejsou nezávislé, protože pro ně platí

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (28.28)$$

Dosažením za proud I do rov. (28.27) obdržíme

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \quad (\text{rovnice pro nabíjení kondenzátoru}). \quad (28.29)$$

Tato diferenciální rovnice popisuje časovou změnu náboje Q kondenzátoru na obr. 28.13. Řešit tuto rovnici znamená najít funkci času $Q(t)$, která splňuje tuto rovnici a splňuje také počáteční podmínku, že na počátku byl kondenzátor nenabitý: $Q = 0$ pro $t = 0$.

Později ukážeme, že řešení rov. (28.29) je

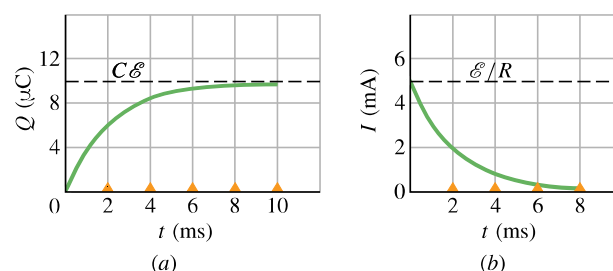
$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{náboj při nabíjení kondenzátoru}). \quad (28.30)$$

(Zde e je základ přirozených logaritmů, $e = 2,718 \dots$, a nikoli elementární náboj e .) Rov. (28.30) opravdu vyhovuje našim počátečním podmínkám. Pro $t = 0$ je exponenciální člen $e^{-t/(RC)}$ roven jedné, takže náboj Q je roven nule. Pro $t \rightarrow \infty$ (tj. prakticky vzato po dostatečně dlouhé době) je člen $e^{-t/(RC)}$ roven nule a rovnice dává správnou hodnotu ustáleného náboje kondenzátoru, a to $Q = C\mathcal{E}$. Na obr. 28.14a je graf funkce $Q(t)$ při nabíjení kondenzátoru.

Derivováním náboje $Q(t)$ podle času dostaneme časový průběh proudu při nabíjení kondenzátoru

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/(RC)} \quad (\text{proud při nabíjení kondenzátoru}). \quad (28.31)$$

Graf funkce $I(t)$ při nabíjecím procesu je na obr. 28.14b. Počáteční hodnota proudu je \mathcal{E}/R a klesá postupně k nule, jak se kondenzátor nabíjí. Z této počáteční hodnoty proudu můžeme také usoudit, že v okamžiku $t = 0$ se kondenzátor chová jako vodič se zanedbatelným odporem.



Obr. 28.14 (a) Závislost náboje kondenzátoru na čase podle rov. (28.30). Je vidět, jak se kondenzátor z obr. 28.13 postupně nabíjí. (b) Závislost nabíjecího proudu na čase podle rov. (28.31). Nabíjecí proud postupně klesá k nule. Křivky jsou nakresleny pro hodnoty $R = 2000 \Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$. Malé trojúhelníčky vymezují intervaly o délce časové konstanty $\tau_C = RC$.

Pomocí rov. (26.1) ($Q = CU$) a rov. (28.30) vypočítáme časový průběh napětí na kondenzátoru během nabíjení

$$U_C = \frac{Q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{napětí při nabíjení kondenzátoru}). \quad (28.32)$$

Pro $t = 0$ je $U_C = 0$ a pro $t \rightarrow \infty$, kdy je kondenzátor úplně nabit, je $U_C = \mathcal{E}$.

Časová konstanta

Součin RC v exponenciálních funkcích v rov. (28.30), (28.31) a (28.32) má rozměr času (jednoduše to plyne z toho, že argument exponenciální funkce musí být bezrozměrový), tedy $(1 \Omega)(1 \text{ F}) = 1 \text{ s}$. Součin RC se nazývá **časová konstanta sériového RC obvodu** a označuje se symbolem τ_C :

$$\tau_C = RC \quad (\text{časová konstanta}). \quad (28.33)$$

Z rov. (28.30) plyne, že v okamžiku $t = \tau_C$ se náboj původně nenabitého kondenzátoru zvětšil na hodnotu

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-1}) \doteq 0,63C\mathcal{E}. \quad (28.34)$$

Řečeno slovně, během prvního intervalu o délce časové konstanty τ_C se náboj zvětšil z nuly asi na 63 % své koncové hodnoty $C\mathcal{E}$. Malé trojúhelníčky na časové ose na obr. 28.14 vyznačují intervaly o délce jedné časové konstanty během nabíjení kondenzátoru. Nabíjecí doba pro RC obvody se často udává pomocí veličiny τ_C : čím delší je τ_C , tím delší je nabíjecí doba.

Vybíjení kondenzátoru

Nyní budeme předpokládat, že kondenzátor na obr. 28.13 je již nabit na napětí U_0 , které se rovná elektromotorickému napětí \mathcal{E} baterie. V okamžiku $t = 0$ přepneme spínač S z polohy a do polohy b , takže se kondenzátor začne vybíjet přes rezistor R . Jak se mění náboj kondenzátoru $Q(t)$ a vybíjecí proud $I(t)$ tekoucí kondenzátorem a rezistorem v závislosti na čase?

Protože nyní v obvodu není baterie, bude v rov. (28.29) $\mathcal{E} = 0$, a proto platí

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{rovnice pro vybíjení kondenzátoru}). \quad (28.35)$$

Její řešení je

$$Q = Q_0 e^{-t/(RC)} \quad (\text{náboj při vybíjení kondenzátoru}), \quad (28.36)$$

kde $Q_0 = CU_0$ je počáteční náboj kondenzátoru v okamžiku $t = 0$. Ověřte si dosazením, že rov. (28.36) je skutečně řešením diferenciální rovnice rov. (28.35).

Z rov. (28.36) plyne, že náboj Q klesá exponenciálně s časem a rychlost poklesu je určena časovou konstantou $\tau_C = RC$. V okamžiku $t = \tau_C$ se náboj kondenzátoru zmenší na hodnotu $Q_0 e^{-1}$, tedy přibližně na 37 % své počáteční hodnoty. Je-li časová konstanta větší, je vybíjecí doba delší.

Derivováním rov. (28.36) podle času odvodíme vztah pro proud při vybíjení kondenzátoru

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\left(\frac{Q_0}{RC}\right) e^{-t/(RC)} \quad (\text{proud při vybíjení kondenzátoru}). \quad (28.37)$$

Proud také klesá exponenciálně, rychlost poklesu je opět určena časovou konstantou τ_C . Počáteční proud I_0 je $Q_0/(RC)$. Všimněte si, že proud I_0 se dá snadno vypočítat, jestliže pro okamžik $t = 0$ použijete smyčkové pravidlo: kondenzátor s počátečním napětím U_0 je spojen s rezistorem R , takže proud musí být $I_0 = U_0/R = (Q_0/C)/R = Q_0/(RC)$. Znaménko minus v rov. (28.37) vyjadřuje, že náboj kondenzátoru s časem klesá.

Odvození rov. (28.30)

Abychom mohli řešit rov. (28.29), přepíšeme ji nejprve do tvaru

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = \frac{\mathcal{E}}{R}. \quad (28.38)$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice má tvar

$$Q = Q_p + K e^{-at}, \quad (28.39)$$

kde Q_p je její *partikulární řešení*, K je konstanta, která se určí z počátečních podmínek, a $a = 1/(RC)$ je koeficient u proměnné Q v rov. (28.38). Abychom vypočetli Q_p , položíme v rov. (28.38) $dQ/dt = 0$ (to odpovídá koncovému stavu, kdy už se kondenzátor dále nenabíjí a jeho náboj se nemění). Tím obdržíme

$$Q_p = C\mathcal{E}. \quad (28.40)$$

Abychom určili K , dosadíme rov. (28.40) do rov. (28.39), a tak dostaneme

$$Q = C\mathcal{E} + K e^{-at}.$$

Po dosazení počáteční podmínky $Q = 0$ pro $t = 0$ získáme

$$0 = C\mathcal{E} + K,$$

odkud $K = -C\mathcal{E}$. Když nyní obě vypočtené hodnoty Q_p a K dosadíme do rov. (28.39), dospějeme ke konečnému výsledku

$$Q = C\mathcal{E} - C\mathcal{E} e^{-t/(RC)},$$

který je totožný s rov. (28.30).

KONTROLA 5: V tabulce jsou uvedeny čtyři soubory hodnot prvků z obvodu na obr. 28.13. Uspořádejte tyto soubory sestupně podle (a) počáteční hodnoty proudu (když se spínač přepne do polohy a), (b) podle času potřebného k poklesu proudu na polovinu počáteční hodnoty.

	1	2	3	4
\mathcal{E}/V	12	12	10	10
R/Ω	2	3	10	5
$C/\mu F$	3	2	0,5	2

PŘÍKLAD 28.6

Kondenzátor o kapacitě C se vybíjí přes rezistor o odporu R . (a) Vyjádřete pomocí časové konstanty $\tau_C = RC$, za jak dlouho klesne náboj kondenzátoru na polovinu své počáteční hodnoty.

ŘEŠENÍ: Náboj kondenzátoru se mění podle vztahu (28.36)

$$Q = Q_0 e^{-t/(RC)},$$

kde Q_0 je počáteční náboj. Hledáme takový okamžik t , kdy $Q = Q_0/2$, tedy

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0 e^{-t/(RC)}. \quad (28.41)$$

Náboj Q_0 na obou stranách rovnice se zkrátí a hledaný čas t je v exponentu. Proto musíme obě strany rovnice logaritmovat (přirozený logaritmus je inverzní funkcí k exponenciální funkci) a dostaneme

$$\ln \frac{1}{2} = \ln(e^{-t/(RC)}) = -t/(RC),$$

tj.

$$t = (-\ln \frac{1}{2})RC = 0,69RC = 0,69\tau_C. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Za jak dlouho klesne elektrická potenciální energie kondenzátoru na polovinu své počáteční hodnoty?

ŘEŠENÍ: Elektrická potenciální energie kondenzátoru je podle rov. (26.21) a (28.36)

$$E_p = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C} e^{-2t/(RC)} = E_{p,0} e^{-2t/(RC)}, \quad (28.42)$$

kde $E_{p,0}$ je jeho počáteční energie. Hledáme takový čas t , kdy $E_p = E_{p,0}/2$, tedy

$$\frac{1}{2}E_{p,0} = E_{p,0} e^{-2t/(RC)}.$$

Člen $E_{p,0}$ se zkrátí a logaritmováním obou stran rovnice dostaneme

$$\ln \frac{1}{2} = -2t/(RC),$$

tj.

$$t = -RC \frac{\ln \frac{1}{2}}{2} = 0,35RC = 0,35\tau_C. \quad (\text{Odpověď})$$

Náboj kondenzátoru tedy klesne na polovinu své počáteční hodnoty za delší dobu ($0,69\tau_C$) než elektrická potenciální energie kondenzátoru ($0,35\tau_C$). Nepřekvapil vás tento výsledek?

(c) Jak rychle (tj. s jakým výkonem P_R) se v rezistoru vyvíjí teplo během procesu vybíjení? Jak rychle (tj. s jakým výkonem P_C) se při vybíjení zmenšuje elektrická potenciální energie kondenzátoru?

ŘEŠENÍ: Vybíjecí proud je dán rov. (28.37). Pomocí vztahu (27.22) ($P = I^2 R$) dostaneme

$$\begin{aligned} P_R &= I^2 R = \left(-\frac{Q_0}{RC} e^{-t/(RC)}\right)^2 R = \\ &= \frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-2t/(RC)}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Elektrická potenciální energie kondenzátoru se zmenšuje rychlostí $P_C = dE_p/dt$. Pomocí rov. (28.42) dostaneme

$$P_C = \frac{dE_p}{dt} = \frac{d}{dt}(E_{p,0} e^{-2t/(RC)}) = -\frac{2E_{p,0}}{RC} e^{-2t/(RC)}$$

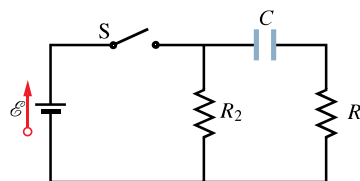
a po dosazení $E_{p,0} = Q_0^2/2C$ vyjde

$$P_C = -\frac{Q_0^2}{RC^2} e^{-2t/(RC)}. \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že $P_C + P_R = 0$, což znamená, že elektrická potenciální energie kondenzátoru je v rezistoru zcela disipována.

PŘÍKLAD 28.7

Obvod na obr. 28.15 se skládá z ideální baterie o elektromotorickém napětí $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, dvou rezistorů o odporech $R_1 = 4,0 \Omega$, $R_2 = 6,0 \Omega$ a z původně nenabitého kondenzátoru o kapacitě $C = 6,0 \mu\text{F}$. V okamžiku $t = 0$ je obvod uzavřen sepnutím spínače S.



Obr. 28.15 Příklad 28.7. Po sepnutí spínače se obvod uzavře a baterie začne nabíjet kondenzátor.

(a) Jaké je napětí na deskách kondenzátoru v okamžiku $t = 2,0\tau_C$?

ŘEŠENÍ: Kondenzátor na obr. 28.15 se nabíjí přes rezistor R_1 z baterie o elektromotorickém napětí \mathcal{E} , tedy stejně jako v obvodu na obr. 28.13 (rezistor R_2 nemá na nabíjení vliv). Napětí U_C na kondenzátoru můžeme tedy vypočítat pomocí rov. (28.32), pouze místo R dosadíme R_1 , tedy

$$U_C = \mathcal{E}(1 - e^{-t/(R_1 C)}).$$

Dosadíme-li $t = 2,0\tau_C = 2,0R_1 C$ a další číselné hodnoty, dostaneme

$$\begin{aligned} U_C &= (12 \text{ V})(1 - e^{-2,0R_1 C/(R_1 C)}) = \\ &= 12 \text{ V}(1 - e^{-2,0}) = 10 \text{ V}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká jsou v okamžiku $t = 2,0\tau_C$ napětí U_{R_1} a U_{R_2} na rezistorech R_1 a R_2 ? Jak se tato napětí mění (zvětšují se, zmenšují se, nebo zůstávají stejná), když se kondenzátor nabíjí?

ŘEŠENÍ: Použijeme smyčkové pravidlo na velkou smyčku na obr. 28.15; projdeme-li jí ve směru otáčení hodinových ručiček od záporného pólu baterie, dostaneme rovnici

$$\mathcal{E} - U_C - U_{R_1} = 0. \quad (28.43)$$

V části (a) jsme vypočítali, že v okamžiku $t = 2,0\tau_C$ je napětí na kondenzátoru $U_C = 10\text{ V}$. Dosadíme-li ještě $\mathcal{E} = 12\text{ V}$, máme výsledek

$$U_{R_1} = 2,0\text{ V}. \quad (\text{Odpověď})$$

V průběhu nabíjení kondenzátoru zůstává emn baterie \mathcal{E} konstantní a napětí U_C na kondenzátoru se zvyšuje. Přepí-

šeme-li rov. (28.43) do tvaru $U_{R_1} = \mathcal{E} - U_C$, vidíme, že napětí U_{R_1} musí při nabíjení klesat.

Nyní použijeme smyčkové pravidlo pro levou smyčku na obr. 28.15a; projdeme-li jí také ve směru otáčení hodinových ručiček od záporného pólu baterie, obdržíme

$$\mathcal{E} - U_{R_2} = 0,$$

tedy

$$U_{R_2} = \mathcal{E} = 12\text{ V}.$$

Napětí U_{R_2} se tedy při nabíjení kondenzátoru nemění.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Elektromotorické napětí

Zdroj elektromotorického napětí (neboli zdroj emn) udržuje jisté napětí mezi svými svorkami; aby ho udržel i při odběru proudu (při zatížení), musí být schopen konat práci na nosičích náboje. Je-li dW_z práce, kterou zdroj vykoná při průchodu kladného náboje dQ vnitřkem zdroje od záporného pólu ke kladnému, je jeho elektromotorické napětí \mathcal{E} (práce vztažená na jednotkový náboj) rovno

$$\mathcal{E} = \frac{dW_z}{dQ} \quad (\text{definice emn}). \quad (28.1)$$

Jednotkou emn v soustavě SI je volt, tedy stejná jednotka jako pro napětí. *Ideální zdroj* emn má nulový vnitřní odpor. Napětí na jeho svorkách je stále rovno elektromotorickému napětí \mathcal{E} . *Reálný zdroj* emn má nenulový vnitřní odpor. Napětí na jeho svorkách je rovno elektromotorickému napětí \mathcal{E} pouze v případě, že zdrojem neprochází žádný proud.

Analýza obvodů

Procházíme-li elektrickým obvodem (smyčkou) ve zvoleném směru, platí: Při průchodu rezistorem o odporu R ve směru proudu se potenciál změní o hodnotu $-IR$, při průchodu v opačném směru o hodnotu $+IR$. Při průchodu ideálním zdrojem emn ve směru šipky znázorňující toto napětí se potenciál změní o hodnotu $+\mathcal{E}$ a při průchodu v opačném směru o hodnotu $-\mathcal{E}$.

Ze zákona zachování energie plyne smyčkové pravidlo:

Smyčkové pravidlo: Algebraický součet úbytků napětí při průchodu libovolnou uzavřenou smyčkou je nulový.

Ze zákona zachování elektrického náboje plyne uzlové pravidlo:

Uzlové pravidlo: Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.

Jednoduché obvody

Proud v jednoduchém obvodu tvořeném jedinou smyčkou, kde je zapojen rezistor o odporu R a zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E}

s vnitřním odporem r , je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (28.4)$$

V případě ideálního zdroje emn ($r = 0$) přechází tento vztah do tvaru $I = \mathcal{E}/R$.

Výkon

Jestliže reálnou baterii o elektromotorickém napětí \mathcal{E} a vnitřním odporu r protéká proud I , pak výkon P , který dodává baterie prostřednictvím nosičů náboje do zbytku celého zapojení, je

$$P = IU, \quad (28.11)$$

kde U je napětí na svorkách baterie. Ztrátový výkon P_r (uvnitř baterie) je

$$P_r = I^2 r. \quad (28.13)$$

Výkon zdroje emn P_{emn} (tj. rychlost, s jakou ubývá chemická energie baterie) je roven

$$P_{\text{emn}} = I\mathcal{E}. \quad (28.14)$$

Sériové zapojení rezistorů

Jsou-li rezistory zapojeny *sériově* neboli *za sebou*, prochází jimi stejný proud a celkové napětí na ně přiložené je rovno součtu napětí na jednotlivých rezistorech. Celkový odpor sériové kombinace rezistorů je

$$R_s = \sum_{j=1}^n R_j \quad (n \text{ rezistorů zapojených sériově}). \quad (28.7)$$

(I jiné součástky než rezistory je možné zapojovat sériově.)

Paralelní zapojení rezistorů

Jsou-li rezistory zapojeny *paralelně* neboli *vedle sebe*, je napětí na každém rezistoru stejné jako napětí přiložené k jejich kombinaci a celkový proud procházející kombinací rezistorů je roven

součtu proudů procházejících jednotlivými rezistory. Celkový odpor paralelní kombinace rezistorů je

$$\frac{1}{R_p} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (n \text{ rezistorů zapojených paralelně}). \quad (28.21)$$

(I jiné součástky než rezistory je možné zapojovat paralelně.)

Obvody RC

Jsou-li ideální zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E} , rezistor R a kondenzátor C zapojeny sériově (obr. 28.13) a spínač S je přepnut do polohy a , kondenzátor se *nabíjí*. Jeho náboj vzrůstá s časem podle vztahu

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/(RC)}) \quad (\text{náboj při nabíjení kondenzátoru}), \quad (28.30)$$

kde $C\mathcal{E} = Q_0$ je ustálený (koncový) náboj a $RC = \tau_C$ je *časová konstanta sériového RC obvodu*. Při nabíjení klesá proud s časem podle vztahu

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/(RC)} \quad (\text{proud při nabíjení kondenzátoru}). \quad (28.31)$$

Jestliže se kondenzátor vybíjí přes rezistor R , jeho náboj se zmenšuje podle vztahu

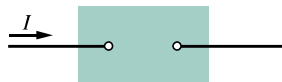
$$Q = Q_0 e^{-t/(RC)} \quad (\text{náboj při vybíjení kondenzátoru}) \quad (28.36)$$

a proud klesá podle vztahu

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\left(\frac{Q_0}{RC}\right) e^{-t/(RC)} \quad (\text{proud při vybíjení kondenzátoru}). \quad (28.37)$$

OTÁZKY

1. Na obr. 28.16 je znázorněn proud I procházející baterií. V ná-

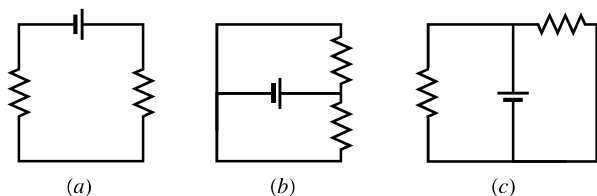


Obr. 28.16 Otázka 1

sledující tabulce jsou uvedeny čtyři soubory hodnot proudu I , emn baterie \mathcal{E} , jejího vnitřního odporu r a polarita svorek baterie. Uspořádejte tyto soubory sestupně podle rychlosti přenosu energie (přikonu) od baterie k nosičům náboje.

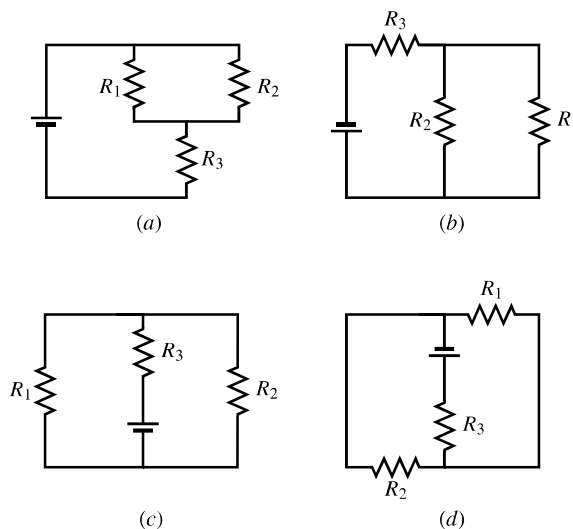
	\mathcal{E}	r	I	POLARITA
(1)	$15\mathcal{E}_1$	0	I_1	+ vlevo
(2)	$10\mathcal{E}_1$	0	$2I_1$	+ vlevo
(3)	$10\mathcal{E}_1$	0	$2I_1$	- vlevo
(4)	$10\mathcal{E}_1$	r_1	$2I_1$	- vlevo

2. Rozhodněte, zda rezistory v obvodech na obr. 28.17 jsou zapojeny sériově, paralelně, nebo žádným z těchto způsobů.



Obr. 28.17 Otázka 2

3. (a) Jsou rezistory R_1 a R_3 v obvodu na obr. 28.18a zapojeny sériově? (b) Jsou rezistory R_1 a R_2 zapojeny paralelně? (c) Uspořádejte sestupně hodnoty ekvivalentních odporů pro všechny čtyři obvody na obr. 28.18.



Obr. 28.18 Otázky 3 a 7

4. Určete ekvivalentní odpor trojice rezistorů, je-li odpor každého z nich R a jsou-li připojeny k ideální baterii (a) sériově, (b) paralelně. (c) Je napětí na sériové kombinaci rezistorů větší, menší, nebo stejné jako napětí na paralelní kombinaci rezistorů?

5. Připojte dva rezistory R_1 a R_2 (kde $R_1 > R_2$) k baterii, nejprve každý zvlášť, potom oba sériově a nakonec oba paralelně. Uspořádejte tato zapojení sestupně podle velikosti proudu procházejícího baterií.

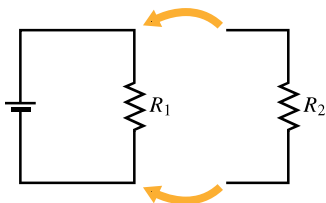
6. Dva rezistory jsou připojeny k baterii. (a) Při jakém zapojení (sériovém nebo paralelním) je stejné napětí na každém rezistoru i na ekvivalentním rezistoru? (b) Při jakém zapojení teče stejně velký proud každým rezistorem i ekvivalentním rezistorem?

7. (a) Je-li v obvodu na obr. 28.18a $R_1 > R_2$, je napětí na rezistoru R_2 větší, menší, nebo stejné jako napětí na rezistoru R_1 ? (b) Je proud procházející rezistorem R_2 větší, menší, nebo stejný jako proud procházející rezistorem R_1 ?

8. K baterii nejprve připojíme samotný rezistor R_1 . Potom k němu připojíme paralelně další rezistor R_2 . Rozhodněte, zda se po připojení rezistoru R_2 zvětší, zmenší, nebo nezmění (a) napětí na rezistoru R_1 , (b) proud I_1 rezistorem R_1 . (c) Je odpor R_{12} ekvivalentní odporu paralelně zapojených rezistorů R_1 , R_2 větší, menší, nebo stejný jako R_1 ? (d) Je celkový proud kombinací rezistorů R_1 a R_2 větší, menší, nebo stejný ve srovnání s původním proudem rezistorem R_1 ?

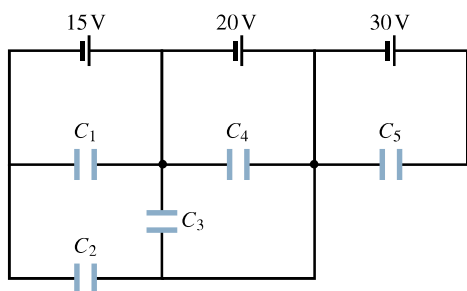
9. K baterii nejprve připojíme samotný rezistor R_1 . Potom do obvodu zapojíme sériově další rezistor R_2 . Rozhodněte, zda se po připojení rezistoru R_2 (a) napětí na rezistoru R_1 , (b) proud I_1 rezistorem R_1 zvětší, zmenší, nebo nezmění. (c) Je odpor R_{12} sériově zapojených rezistorů větší, menší, nebo stejný jako R_1 ?

10. K obvodu na obr. 28.19 připojíme další větev s rezistorem R_2 . (a) Jak se změní rychlost disipace elektrické energie v rezistoru R_1 : zvětší se, zmenší se, nebo zůstane stejná? (b) Jak se změní rychlost, jakou baterie dodává elektrickou energii do obvodu: zvýší se, sníží se, nebo zůstane beze změny? (c) Opakujte úlohy (b) a (c), je-li rezistor R_2 připojen sériově k rezistoru R_1 .



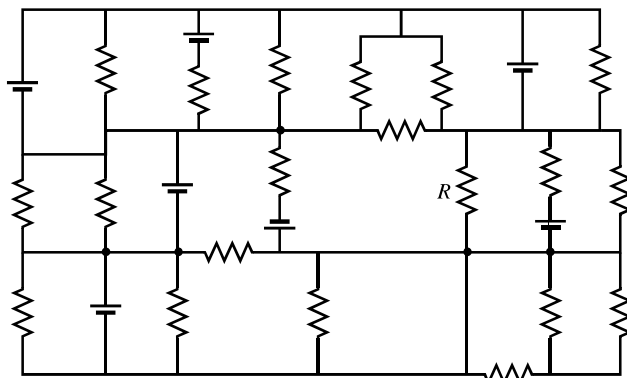
Obr. 28.19 Otázka 10

11. Určete napětí na každém z kondenzátorů na obr. 28.20.



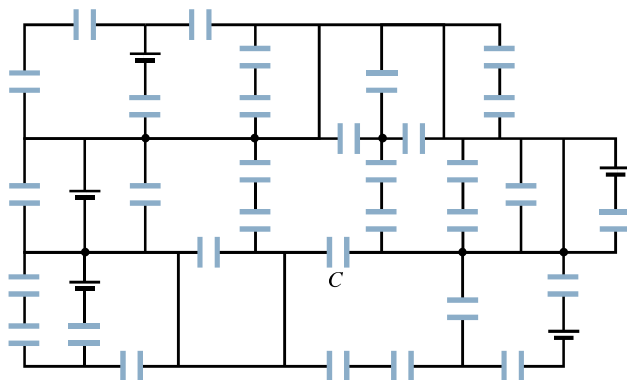
Obr. 28.20 Otázka 11

12. *Labyrint rezistorů.* Všechny rezistory na obr. 28.21 mají odpor $4,0 \Omega$, všechny baterie jsou ideální a mají elektromotorické napětí $\mathcal{E} = 4,0 \text{ V}$. Jaký proud prochází rezistorem R ? (Podaří-li se vám objevit v labyrintu vhodnou smyčku, dokážete na otázku odpovědět okamžitě a skoro bez počítání.)



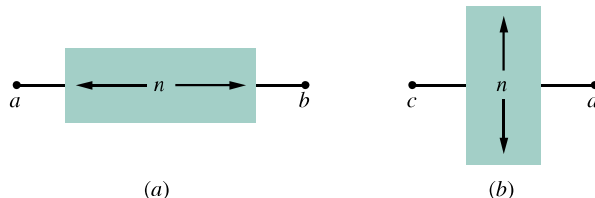
Obr. 28.21 Otázka 12

13. *Labyrint kondenzátorů.* Všechny kondenzátory na obr. 28.22 mají kapacitu $6,0 \mu\text{F}$, všechny baterie jsou ideální a mají elektromotorické napětí $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$. Jaký náboj má kondenzátor C ? (Podaří-li se vám objevit v labyrintu vhodnou smyčku, dokážete na otázku odpovědět okamžitě a skoro bez počítání.)



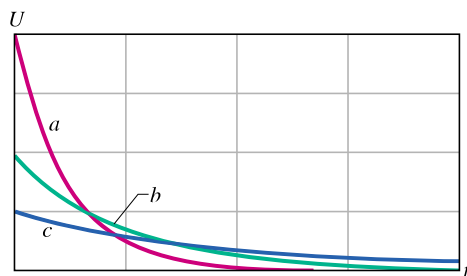
Obr. 28.22 Otázka 13

14. Mezi uzly a, b obvodu na obr. 28.23a máte zapojit za sebou n stejných reálných baterií: $n = 14, 12, 16$. Uspořádejte tato zapojení sestupně podle (a) celkového emn mezi uzly a a b , (b) celkového odporu mezi uzly a, b . Mezi uzly c, d obvodu na obr. 28.23b máte zapojit tyto baterie vedle sebe. Opět uspořádejte zapojení sestupně podle (c) celkového emn mezi uzly c a d , (d) celkového odporu mezi uzly c, d .



Obr. 28.23 Otázka 14

15. Na obr. 28.24 je nakreslen průběh napětí $U(t)$ pro tři kondenzátory, které se vybíjejí (každý samostatně) přes stejný rezistor R . Uspořádejte křivky a, b, c sestupně podle kapacit kondenzátorů.

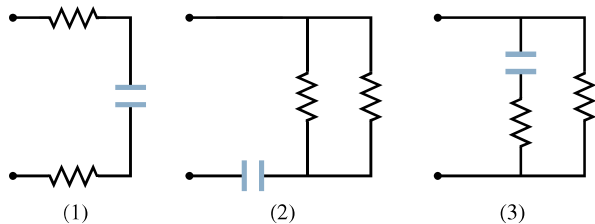


Obr. 28.24 Otázka 15

16. V tabulce je uveden počáteční náboj kondenzátoru a odpor rezistoru, přes nějž se kondenzátor vybíjí. Uspořádejte uvedené možnosti 1, 2, 3 sestupně podle (a) proudu procházejícího rezistorem na počátku vybíjení, (b) doby potřebné k poklesu náboje kondenzátoru na polovinu.

	1	2	3
Počáteční náboj	$12Q$	$12Q$	$6Q$
Odpor	$2R$	$3R$	R

17. Na obr. 28.25 jsou nakresleny tři části elektrických obvodů,

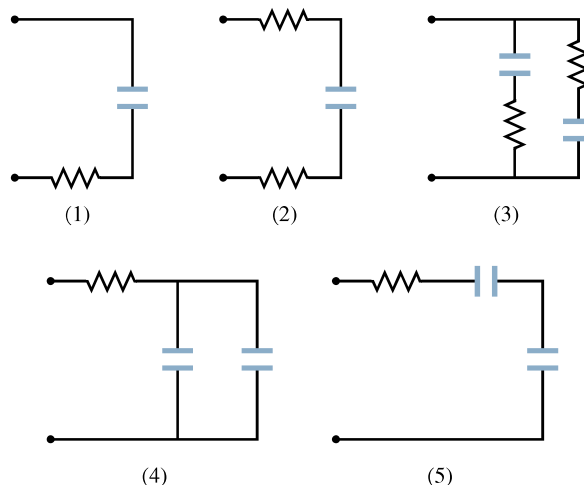


Obr. 28.25 Otázka 17

kteří postupně připojujeme ke stejné baterii pomocí spínače S podobně jako na obr. 28.13. Všechny rezistory a kondenzátory jsou stejné. Uspořádejte části obvodů sestupně podle (a) konco-

vého (ustáleného) náboje kondenzátoru, (b) doby potřebné k tomu, aby náboj kondenzátoru dosáhl 50 % své koncové hodnoty.

18. Na obr. 28.26 je nakresleno pět částí elektrických obvodů, které postupně připojujeme ke stejné 12 V baterii pomocí spínače S jako na obr. 28.13. Všechny rezistory a kondenzátory jsou stejné. Uspořádejte části obvodů sestupně podle doby potřebné k nárůstu napětí na kondenzátorech na 50 % koncové hodnoty.



Obr. 28.26 Otázky 18 a 19

19. Uspořádejte pět částí obvodů z otázky 18 sestupně podle napětí, které bude na libovolném rezistoru, když napětí na libovolném kondenzátoru dosáhne 4 V.

20. (a) Závísí doba potřebná k tomu, aby náboj kondenzátoru v RC obvodu dosáhl určitého procenta své ustálené hodnoty, na velikosti přiloženého emn? (b) Závísí doba potřebná k tomu, aby se náboj kondenzátoru změnil o ΔQ , na velikosti přiloženého emn? (c) Závísí množství náboje potřebné k úplnému nabití kondenzátoru na vnitřním odporu baterie, která ho nabíjí?

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 28.5 Napětí v obvodech

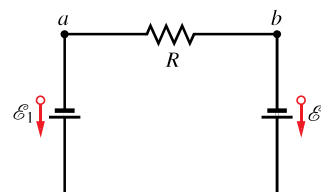
1C. Obyčejná baterie do kapesní svítilny může dodat asi 2,0 W·h energie, než se úplně vybijí. (a) Kolik by stálo svícení 100 W žárovkou po dobu 8 h, kdybychom ji napájeli takovými bateriemi, pokud jedna baterie stojí 12 Kč? (b) Kolik stojí svícení žárovkou připojenou na veřejnou elektrickou síť, jestliže si elektrárna účtuje 1,75 Kč za kilowatthodinu?

2C. (a) Jakou práci vykoná ideální baterie o elektromotorickém napětí $\mathcal{E} = 12,0$ V na elektronech, které jí procházejí od kladného pólu k zápornému? (b) Jaký je výkon baterie, projde-li baterií $3,4 \cdot 10^{18}$ elektronů za sekundu?

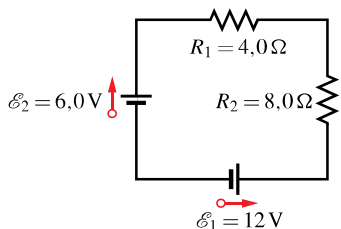
3C. Akumulátorová baterie o $\mathcal{E} = 6,0$ V zapojená do obvodu způsobí, že obvodem prochází po dobu 6,0 min proud 5,0 A. O kolik se tím sníží chemická energie baterie?

4C. Automobilová baterie o $\mathcal{E} = 12$ V má počáteční náboj 120 A·h. Kolik hodin může dodávat energii při výkonu 100 W? Předpokládejte (nepříliš realisticky), že napětí na svorkách baterie zůstává konstantní, dokud se baterie úplně nevybijí.

5C. Na obr. 28.27 je $\mathcal{E}_1 = 12$ V, $\mathcal{E}_2 = 8$ V. (a) Jaký je směr proudu v rezistoru? (b) Která baterie koná kladnou práci? (c) Má vyšší potenciál bod *a*, nebo bod *b*?


 Obr. 28.27
Cvičení 5

6C. Předpokládejte, že baterie na obr. 28.28 mají zanedbatelný vnitřní odpor. Určete (a) proud v obvodu, (b) výkon disipovaný každým rezistorem, (c) výkon každé baterie i to, zda energii dodává, nebo přijímá.



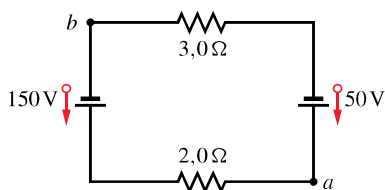
Obr. 28.28
Cvičení 6

7C. Vodič o odporu $5,0 \Omega$ je připojen k baterii o elektromotorickém napětí $\mathcal{E} = 2,0 \text{ V}$ a vnitřním odporu $1,0 \Omega$. (a) Jaké množství chemické energie se přemění na energii elektrickou za $2,0 \text{ min}$? (b) Kolik tepla se za $2,0 \text{ min}$ vyvine ve vodiči? (c) Vysvětlete rozdíl mezi odpověďmi na otázku (a) a (b).

8C. V obvodu na obr. 28.4a je $\mathcal{E} = 2,0 \text{ V}$ a $r = 100 \Omega$. Nakreslete do jednoho grafu, jak závisí na velikosti odporu R v intervalu 0 až 500Ω (a) proud, (b) napětí na rezistoru R . (c) Nakreslete další graf tak, že pro danou hodnotu R vynásobíte spolu proud a napětí z grafů (a), (b). Co vyjadřuje graf z části (c)?

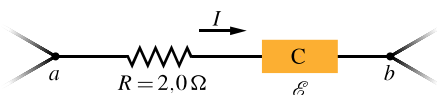
9C. Automobilová baterie s emn $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ a vnitřním odporem $0,040 \Omega$ se nabíjí proudem 50 A . (a) Jaké je napětí na jejich svorkách? (b) Jakou rychlostí je elektrická energie disipována uvnitř baterie v teplo? (c) Jakou rychlostí se elektrická energie přeměňuje v chemickou energii? (d) Jak by se změnila odpověď na otázky (a) a (b), kdyby byla baterie použita jako zdroj proudu 50 A pro startér motoru?

10C. V obvodu na obr. 28.29 má bod a potenciál 100 V . Jaký je potenciál bodu b ?



Obr. 28.29
Cvičení 10

11C. Úsek obvodu ab na obr. 28.30 spotřebovává výkon 50 W , jestliže jím prochází proud $I = 1,0 \text{ A}$ v naznačeném směru. (a) Jaké je napětí mezi body a a b ? (b) Zdroj emn C má nulový vnitřní odpor. Jaké je jeho elektromotorické napětí \mathcal{E} ? (c) Jaká je jeho polarita (tj. kde je kladná a záporná svorka zdroje)?

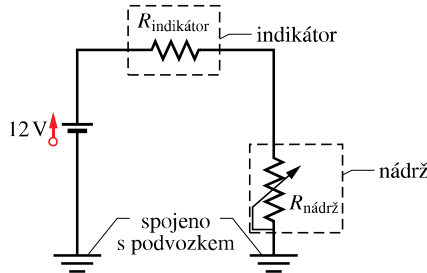


Obr. 28.30 Cvičení 11

12C. V obvodu na obr. 28.5a vypočítejte napětí na rezistoru R_2 , je-li $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$, $R_1 = 3,0 \Omega$, $R_2 = 4,0 \Omega$, $R_3 = 5,0 \Omega$.

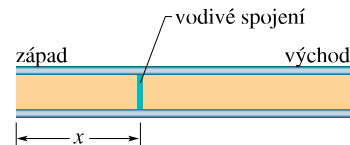
13C. V obvodu na obr. 28.6a vypočítejte napětí mezi body a , c tak, že projdete po cestě přes R , r_2 a \mathcal{E}_2 (viz př. 28.2).

14C. Na obr. 28.31 je schematicky nakreslena automobilová benzinová měrka. Indikátor (na přístrojové desce) má odpor 10Ω . Plovák v nádrži je spojen s potenciometrem, jehož odpor se mění lineárně s objemem benzínu v nádrži — má hodnotu 140Ω , je-li nádrž prázdná, a 20Ω při plné nádrži. Vypočítejte proud v obvodu, je-li nádrž (a) prázdná, (b) naplněná do poloviny, (c) plná.



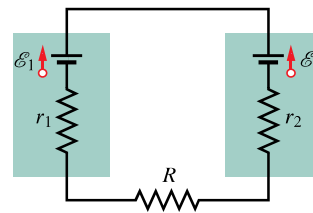
Obr. 28.31 Cvičení 14

15Ú. Deset kilometrů dlouhý podzemní kabel vede od východu na západ a je tvořen dvěma paralelními vodiči, z nichž každý má odpor 13Ω na 1 km . Ve vzdálenosti x od západního konce dojde ke zkratu a k propojení vodičů vodivým spojem o odporu R (obr. 28.32). Celkový odpor vodičů a vodivého spoje je 100Ω při měření z východního konce a 200Ω při měření ze západního konce. Určete (a) vzdálenost x , (b) odpor R .



Obr. 28.32
Úloha 15

16Ú. (a) Jak velký odpor musí mít rezistor R v obvodu na obr. 28.33, má-li obvodem procházet proud $1,0 \text{ mA}$? Elektromotorická napětí baterií jsou $\mathcal{E}_1 = 2,0 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 3,0 \text{ V}$ a jejich vnitřní odpory $r_1 = r_2 = 3,0 \Omega$. (b) S jakým výkonem se v rezistoru R vyvíjí teplo?



Obr. 28.33
Úloha 16

17Ú. Jednoduchou smyčkou obsahující rezistor R prochází proud $5,0 \text{ A}$. Jestliže do série s rezistorem R zapojíme další rezistor o odporu $2,0 \Omega$, proud klesne na $4,0 \text{ A}$. Určete odpor rezistoru R .

18Ú. Rezistor o odporu $0,10 \Omega$ je připojen k baterii o elektromotorickém napětí $\mathcal{E} = 1,5 \text{ V}$, tepelný výkon rezistoru má být 10 W . (a) Jaké napětí musí být na rezistoru? (b) Jaký musí být vnitřní odpor baterie?

19Ú. Zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E} napájí telekomunikační vedení o odporu R . Vypočtete poměr výkonů disipovaných na vedení pro $\mathcal{E} = 110\,000\text{ V}$ a pro $\mathcal{E} = 110\text{ V}$ za předpokladu, že výkon dodávaný zdrojem je v obou případech stejný.

20Ú. Dva vodiče A, B o stejných délkách $40,0\text{ m}$ a stejných průměrech $2,60\text{ mm}$ jsou spojeny sériově a na celou sériovou kombinaci je přiloženo napětí $60,0\text{ V}$. Odporů vodičů jsou $0,127\ \Omega$ a $0,729\ \Omega$. Vypočtete (a) hustotu proudu v každém vodiči, (b) napětí na každém vodiči. (c) Pomocí údajů v tab. 27.1 určete materiál, z něhož jsou vodiče vyrobeny.

21Ú. Startér automobilu má příliš nízké otáčky a mechanici mají rozhodnout, zda vyměnit startér, kabel, nebo baterii. V dílenském manuálu je uvedeno, že 12 V baterie by neměla mít větší vnitřní odpor než $0,020\ \Omega$, startér by neměl mít větší odpor než $0,200\ \Omega$ a kabel nejvýše $0,040\ \Omega$. Mechanici spustili startér a naměřili napětí $11,4\text{ V}$ na baterii, $3,0\text{ V}$ na kabelu a proud 50 A . Která část je vadná?

22Ú. Dvě baterie o stejném elektromotorickém napětí \mathcal{E} , ale o různých vnitřních odporech r_1, r_2 ($r_1 > r_2$) jsou spojeny sériově a připojeny k vnějšímu rezistoru R . (a) Určete takovou hodnotu odporu R , aby napětí na svorkách jedné baterie bylo rovno nule. (b) Která baterie to bude?

23Ú. Sluneční články dává napětí $0,10\text{ V}$, je-li k němu připojen rezistor o odporu $500\ \Omega$, a napětí $0,15\text{ V}$, je-li použit rezistor o odporu $1\,000\ \Omega$. Určete (a) vnitřní odpor, (b) emn slunečního článku. (c) Plocha slunečního článku je $5,0\text{ cm}^2$, hustota toku energie dopadajícího světla (tj. výkon dopadající na jednotku plochy) je $2,0\text{ mW}\cdot\text{cm}^{-2}$. Jaká je účinnost článku při přeměně světelné energie v teplo ve vnějším rezistoru o odporu $1\,000\ \Omega$?

24Ú. (a) Pro obvod na obr. 28.4a dokažte, že rychlost disipace energie v rezistoru R je maximální při $R = r$. (b) Dokažte, že tento maximální výkon je $P = \mathcal{E}^2/4r$.

25Ú. Baterie o elektromotorickém napětí $2,00\text{ V}$ a vnitřním odporu $0,500\ \Omega$ pohání elektromotor. Ten zvedá závaží $2,00\text{ N}$ konstantní rychlostí $0,500\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Předpokládejte, že nedochází k žádným ztrátám energie. Vypočtete (a) proud v obvodu, (b) napětí na svorkách motoru. (c) Vysvětlete, proč existují dvě řešení této úlohy.

26Ú. Rezistor, jehož odpor téměř nezávisí na teplotě, je zhotoven jako sériová kombinace rezistoru křemíkového a rezistoru železného. Vypočtete odpory těchto dvou rezistorů, má-li být výsledný odpor $1\,000\ \Omega$ v širokém teplotním intervalu kolem $20\text{ }^\circ\text{C}$. Potřebné údaje najdete v tab. 27.1.

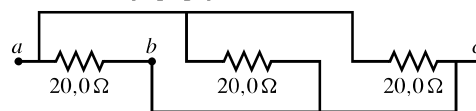
ODST. 28.6 Obvody s více smyčkami

27C. Čtyři rezistory o odporu $18,0\ \Omega$ jsou připojeny paralelně k ideální $25,0\text{ V}$ baterii. Jak velký proud prochází baterií?

28C. Rezistor o odporu $3,00\ \Omega$ má vzniknout spojením neznámého rezistoru a $12,0\ \Omega$ rezistoru. Jaký musí být odpor neznámého rezistoru a jak má být připojen (sériově, nebo paralelně)?

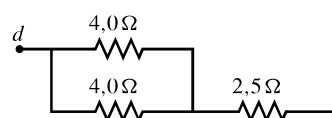
29C. Pomocí dvou rezistorů R_1, R_2 zapojených samostatně, sériově, nebo paralelně můžete dostat odpory $3,0\ \Omega, 4,0\ \Omega, 12\ \Omega, 16\ \Omega$. Jaké jsou hodnoty odporů R_1, R_2 ?

30C. Pro obvod na obr. 28.34 najděte hodnotu ekvivalentního odporu mezi body (a) a a b , (b) a a c , (c) b a c . (Tip: Představte si, že k bodům a, c je připojena baterie.)



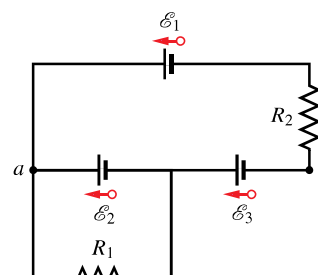
Obr. 28.34 Cvičení 30

31C. Pro obvod na obr. 28.35 najděte hodnotu ekvivalentního odporu mezi body d a e . (Tip: Představte si, že k bodům d, e je připojena baterie.)



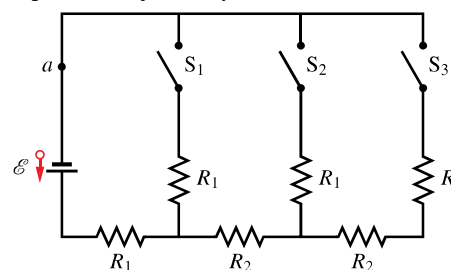
Obr. 28.35 Cvičení 31

32C. V obvodu na obr. 28.36 vypočtete proudy procházející oběma rezistory a napětí mezi body a a b . Je dáno $\mathcal{E}_1 = 6,0\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 5,0\text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 4,0\text{ V}$, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 50\ \Omega$.



Obr. 28.36 Cvičení 32

33C. Na obr. 28.37 je obvod se třemi spínači S_1, S_2 a S_3 . Vypočtete proud v bodě a pro všechny možné kombinace poloh spínačů. Je dáno $\mathcal{E} = 120\text{ V}$, $R_1 = 20,0\ \Omega$, $R_2 = 10,0\ \Omega$, vnitřní odpor baterie je nulový.



Obr. 28.37 Cvičení 33

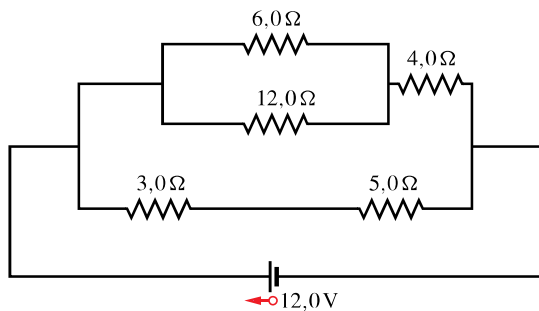
34C. Dvě žárovky o odporech R_1, R_2 ($R_1 > R_2$) jsou připojeny k baterii (a) paralelně, (b) sériově. Která žárovka svítí jasněji?

35C. V obvodu na obr. 28.7 vypočtete napětí mezi body c a d všemi možnými způsoby volby smyček. Hodnoty emn a odporů jsou: $\mathcal{E}_1 = 4,0\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 1,0\text{ V}$, $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 5,0\ \Omega$.

36C. Devět měděných drátů délky l a průměru d je spojeno paralelně, takže dohromady tvoří jediný vodič o odporu R . Jaký by musel být průměr D jednoho měděného drátu téže délky l , aby měl stejný odpor?

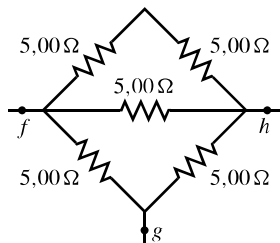
37C. Elektrický rozvod o napětí 230 V je jištěn 16 A pojistkou. Jaký největší počet 500 W reflektorů můžeme současně zapojit paralelně, aby se pojistka nepřepálila?

38C. Na obr. 28.38 je obvod s pěti rezistory připojenými k ideální baterii o elektromotorickém napětí $\mathcal{E} = 12,0$ V. Jaké napětí je na rezistoru o odporu $5,0 \Omega$?



Obr. 28.38 Cvičení 38

39Ú. Pro obvod na obr. 28.39 najděte hodnotu ekvivalentního odporu mezi body (a) f a h , (b) f a g . (Tip: Představte si, že k dané dvojici bodů je připojena baterie.)



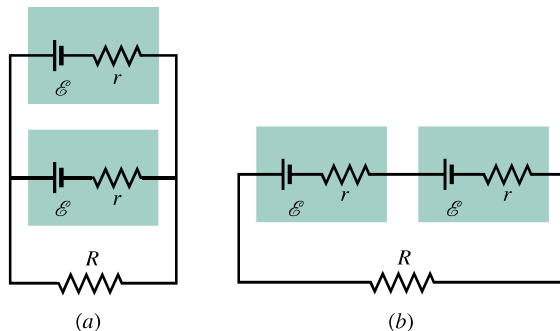
Obr. 28.39 Úloha 39

40Ú. Dva rezistory R_1, R_2 mohou být připojeny sériově, nebo paralelně k ideální baterii o elektromotorickém napětí \mathcal{E} . Požadujeme, aby ztrátový výkon při jejich paralelním zapojení byl pětinasobkem ztrátového výkonu při jejich sériovém zapojení. Jaký odpor má rezistor R_2 , je-li $R_1 = 100 \Omega$? (Tip: Existují dvě řešení.)

41Ú. Máte k dispozici rezistory o odporu 10Ω , každý z nich má maximální ztrátový výkon $1,0$ W. Kolik takových rezistorů potřebujete a jak je musíte zapojit, aby vznikl rezistor o odporu 10Ω se ztrátovým výkonem alespoň $5,0$ W?

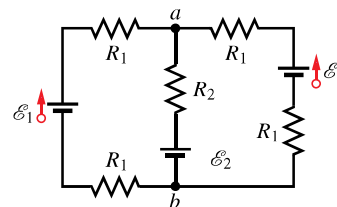
42Ú. Dvě baterie o elektromotorickém napětí \mathcal{E} a vnitřním odporu r jsou připojeny paralelně k rezistoru R podle obr. 28.40a. (a) Jaký má být odpor R , aby rychlost disipace elektrické energie rezistorem byla maximální? (b) Jaká je největší rychlost disipace energie?

43Ú. (a) Vypočítejte proudy procházející ideálními bateriemi v obvodu na obr. 28.41. Hodnoty odporů a emn jsou $R_1 = 1,0 \Omega$,



Obr. 28.40 Úlohy 42 a 44

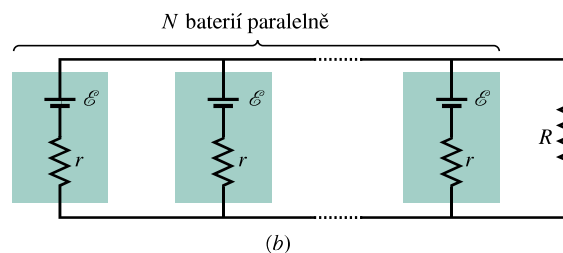
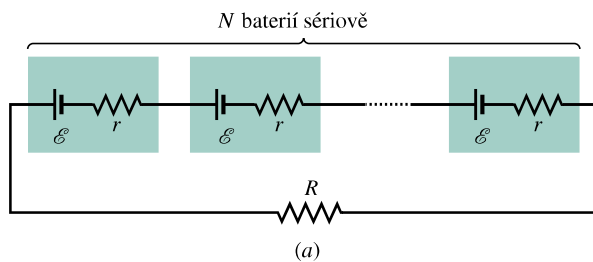
$R_2 = 2,0 \Omega, \mathcal{E}_1 = 2,0$ V, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4,0$ V. (b) Vypočítejte rozdíl potenciálů $\varphi_a - \varphi_b$.



Obr. 28.41 Úloha 43

44Ú. Máte k dispozici dvě baterie o elektromotorickém napětí \mathcal{E} a vnitřním odporu r . Baterie mohou být spojeny paralelně (obr. 28.40a), nebo sériově (obr. 28.40b) a připojeny k rezistoru R . (a) Odvoďte vztah pro proud rezistorem R pro obě zapojení. Bude proud větší, když (b) $R > r$, nebo (c) $R < r$?

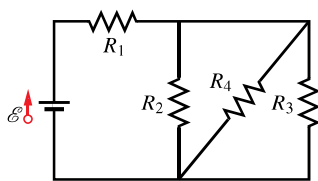
45Ú. N stejných baterií o elektromotorickém napětí \mathcal{E} a vnitřním odporu r je spojeno buď sériově (obr. 28.42a), nebo paralelně (obr. 28.42b) a poté jsou připojeny k rezistoru R . Ukažte, že proud rezistorem R je stejný v obou případech, je-li $R = r$.



Obr. 28.42 Úloha 45

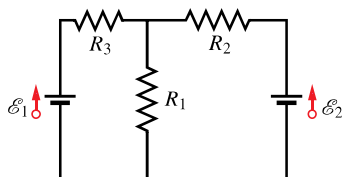
46Ú. Speciální žárovka se dvěma vlákny je konstruována na napětí 230 V a na výkony 100 W, 200 W, 300 W. Jedno vlákno se přepálilo. Žárovka potom svítí se stejnou intenzitou, je-li přepínač nastaven do polohy nejnižšího a nejvyššího výkonu, ale vůbec nesvítí, je-li přepínač v prostřední poloze. (a) Jak jsou vlákna žárovky propojena se třemi polohami přepínače? (b) Vypočítejte odpory vláken.

47Ú. (a) Vypočítejte ekvivalentní odpor rezistorové sítě na obr. 28.43. (b) Jaké proudy procházejí jednotlivými rezistory? Údaje: $R_1 = 100 \Omega$, $R_2 = R_3 = 50 \Omega$, $R_4 = 75 \Omega$, $\mathcal{E} = 6,0 \text{ V}$, baterie je ideální.



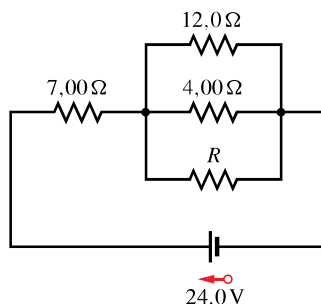
Obr. 28.43 Úloha 47

48Ú. V obvodu na obr. 28.44 je $\mathcal{E}_1 = 3,00 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 1,00 \text{ V}$, $R_1 = 5,00 \Omega$, $R_2 = 2,00 \Omega$, $R_3 = 4,00 \Omega$, obě baterie jsou ideální. (a) S jakým výkonem je elektrická energie disipována v rezistorech R_1 , R_2 , R_3 ? (b) Jaký je výkon baterie 1 a 2?



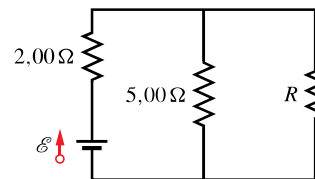
Obr. 28.44 Úloha 48

49Ú. Je dán obvod na obr. 28.45. Jaký odpor musí mít rezistor R , aby ideální baterie dodávala energii do rezistoru s výkonem (a) 60,0 W, (b) maximálně možným, (c) minimálně možným? Vypočítejte výkon v případech (b) a (c).



Obr. 28.45 Úloha 49

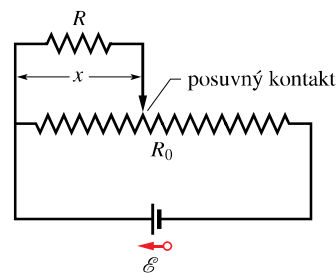
50Ú. V obvodu na obr. 28.46 má elektromotorické napětí \mathcal{E} konstantní hodnotu a rezistor R má proměnný odpor. Určete jeho hodnotu tak, aby se co nejvíce zahříval. Baterie je ideální.



Obr. 28.46 Úloha 50

51Ú. Měděný drát o poloměru $a = 0,250 \text{ mm}$ má hliníkový obal o vnějším poloměru $b = 0,380 \text{ mm}$. (a) Celým vodičem prochází proud $I = 2,00 \text{ A}$. Pomocí údajů v tab. 27.1 vypočítejte proud v každém materiálu. (b) Jak musí být vodič dlouhý, aby tento proud tekla při přiloženém napětí 12,0 V?

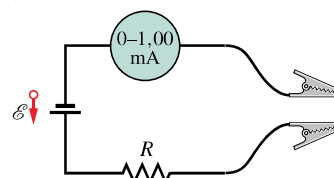
52Ú. Na obr. 28.47 je baterie připojena k potenciometru o celkovém odporu R_0 . Jeho jezdec se může pohybovat od polohy $x = 0$ vlevo do polohy $x = 10 \text{ cm}$ vpravo. Pohybem jezdc se mění odpor částí potenciometru vlevo a vpravo od jezdc, přičemž odpor každé části je úměrný její délce. Odvoďte vztah pro výkon disipovaný rezistorem R v závislosti na poloze x posuvného kontaktu. Nakreslete graf této funkce pro $\mathcal{E} = 50 \text{ V}$, $R = 2000 \Omega$, $R_0 = 100 \Omega$.



Obr. 28.47 Úloha 52

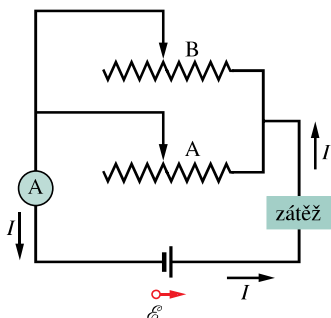
ODST. 28.7 Ampérmetr a voltmetr

53C. Jednoduchý ohmmetr na obr. 28.48 vznikne sériovým spojením baterie o napětí 1,50 V, rezistoru o odporu R a ampérmetru o rozsahu 0 až 1,00 mA. Odpor rezistoru R je takový, aby při zkratovaných svorkách přívodních kabelů ukazoval ampérmetr maximální hodnotu 1,00 mA. Jak velký odpor připojený ke svorkám způsobí výchylku ručičky ampérmetru na (a) 10 %, (b) 50 %, (c) 90 % maximální hodnoty? (d) Jaký je odpor rezistoru R , je-li odpor ampérmetru $20,0 \Omega$ a vnitřní odpor baterie je zanedbatelný?



Obr. 28.48 Cvičení 53

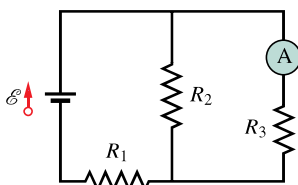
54C. K citlivému ručnímu nastavení proudu v obvodu můžete použít dva reostaty zapojené paralelně podle obr. 28.49. Předpokládejte, že celkový odpor R_1 reostatu A je dvacetkrát větší



Obr. 28.49 Cvičení 54

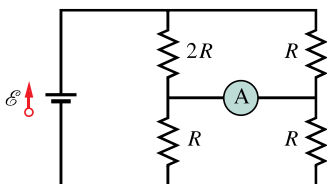
než celkový odpor R_2 reostatu B. (a) Jak budete postupovat při nastavování určitého proudu I ? (b) Proč je toto zapojení dvou reostatů lepší než reostat jediný?

55Ú. (a) Určete proud, který naměří ampérmetr v obvodu na obr. 28.50, je-li $\mathcal{E} = 5,0\text{ V}$, baterie je ideální, $R_1 = 2,0\ \Omega$, $R_2 = 4,0\ \Omega$, $R_3 = 6,0\ \Omega$. (b) Dokažte, že se při vzájemné výměně ampérmetru a zdroje emn nezmění proud naměřený ampérmetrem.



Obr. 28.50 Úloha 55

56Ú. Jaký proud naměří ampérmetr v obvodu na obr. 28.51? Předpokládejte, že jeho odpor je nulový a baterie je ideální.

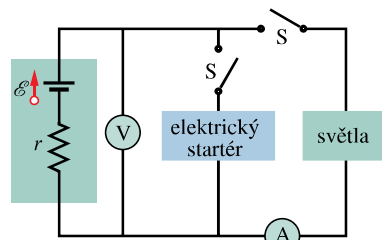


Obr. 28.51 Úloha 56

57Ú. V obvodu na obr. 28.12 je $\mathcal{E} = 5,0\text{ V}$, $r = 2,0\ \Omega$, $R_1 = 5,0\ \Omega$, $R_2 = 4,0\ \Omega$. Jaké relativní chyby (v %) se dopustíme při měření proudu, je-li odpor ampérmetru $R_A = 0,10\ \Omega$? Předpokládejte, že voltmetr není v obvodu zapojen.

58Ú. V obvodu na obr. 28.12 je $\mathcal{E} = 3,0\text{ V}$, $r = 100\ \Omega$, $R_1 = 250\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$. Jaké relativní chyby (v %) se dopustíme při měření napětí na rezistoru R_1 , je-li odpor voltmetru $R_V = 5\text{ k}\Omega$? Vliv ampérmetru v obvodu neuvažujte.

59Ú. Když se rozsvítí světla automobilu, ampérmetr ukazuje proud 10 A a voltmetr měří napětí 12 V (obr. 28.52). Když se zapne elektrický startér, ampérmetr ukáže $8,0\text{ A}$ a světla poněkud pohasnou. Vnitřní odpor baterie je $0,050\ \Omega$ a odpor ampérmetru je zanedbatelný. (a) Jaké je emn baterie? (b) Jaký proud prochází startérem při rozsvícených světlech?

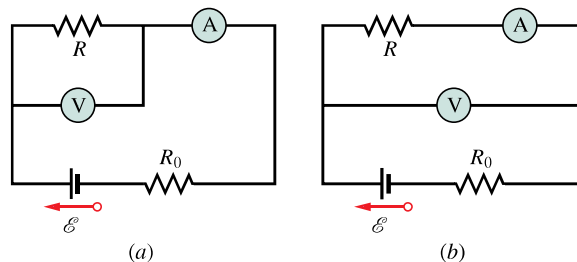


Obr. 28.52 Úloha 59

60Ú. Voltmetrem o odporu R_V a ampérmetrem o odporu R_A měříme odpor rezistoru R v obvodu na obr. 28.53a. Odpor $R = U/I$, kde U je napětí měřené voltmetrem a I je proud procházející rezistorem. Část I' proudu měřeného ampérmetrem však prochází voltmetrem, takže poměr naměřených hodnot U/I' dává odpor R' , který se liší od skutečného odporu R rezistoru. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R_V}.$$

Všimněte si, že pro $R_V \rightarrow \infty$ je $R' \rightarrow R$.



Obr. 28.53 Úlohy 60, 61 a 62

61Ú. Viz úloha 60. Při měření odporu mohou být přístroje také zapojeny jako na obr. 28.53b. Poměr naměřeného napětí a proudu dává odpor R' , který se opět liší od skutečného odporu rezistoru R . Dokažte, že platí

$$R = R' - R_A,$$

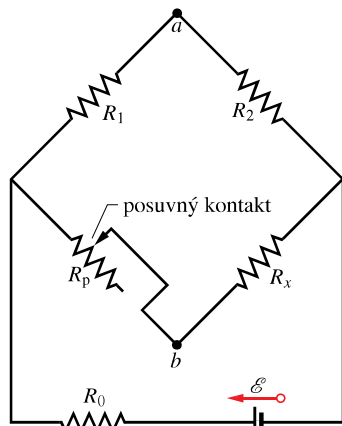
kde R_A je odpor ampérmetru. Všimněte si, že pro $R_A \rightarrow 0$ je $R' \rightarrow R$.

62Ú. Viz úlohy 60 a 61. Odpor ampérmetru a voltmetru na obr. 28.53 jsou $3,00\ \Omega$ a $300\ \Omega$. Položte $\mathcal{E} = 12,0\text{ V}$ pro ideální baterii, $R_0 = 100\ \Omega$, $R = 85,0\ \Omega$. (a) Jaké hodnoty budou přístroje ukazovat v obou zapojeních? (b) Jaký odpor R' vypočteme z naměřených hodnot?

63Ú. Odpor termostatu R_p v obvodu na obr. 28.54 má být pomocí jezdeck nastaven tak, aby potenciál bodů a, b byl stejný. (Dá se to ověřit tak, že mezi body a, b připojíme citlivý ampérmetr; mají-li stejný potenciál, ampérmetr neukáže žádný proud.) Dokažte, že je-li tato podmínka splněna, platí vztah

$$R_x = R_p \left(\frac{R_2}{R_1} \right).$$

Užitím tohoto zapojení nazývaného **Wheatstoneův můstek** se tak dá změřit neznámý odpor R_x .



Obr. 28.54 Úlohy 63 a 64

64Ú. (a) Jsou-li body a, b na obr. 28.54 spojeny vodičem o odporu r , dokažte, že proud procházející vodičem je

$$I = \frac{\mathcal{E}(R_p - R_x)}{(R + 2r)(R_p + R_x) + 2R_p R_x},$$

kde \mathcal{E} je emn ideální baterie a $R = R_1 = R_2$. Předpokládejte, že $R_0 = 0$. (b) Je odvozený vztah v souladu s výsledkem úlohy 63?

ODST. 28.8 Obvody RC

65C. Kondenzátor s počátečním nábojem Q_0 se vybíjí přes rezistor. Za jak dlouho kondenzátor ztratí (a) třetinu svého náboje, (b) dvě třetiny svého náboje (vyjádřete v násobcích časové konstanty τ_C).

66C. V sériovém RC obvodu je $\mathcal{E} = 12,0 \text{ V}$, $R = 1,40 \text{ M}\Omega$, $C = 1,80 \mu\text{F}$. (a) Vypočítejte časovou konstantu. (b) Určete maximální náboj, který kondenzátor získá během nabíjení. (c) Za jak dlouho se kondenzátor nabije nábojem $16 \mu\text{C}$?

67C. Vyjádřete v násobcích časové konstanty, za jak dlouho se původně nenabitý kondenzátor v sériovém RC obvodu nabije na 99,0 % koncového (ustáleného) náboje.

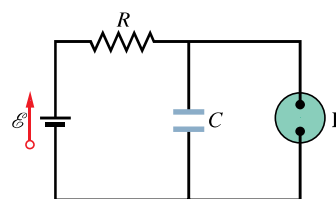
68C. Rezistor o odporu $15,0 \text{ k}\Omega$ a kondenzátor jsou zapojeny do série a potom je k nim přiloženo napětí $12,0 \text{ V}$. Napětí na kondenzátoru se za $1,30 \mu\text{s}$ zvýší na $5,00 \text{ V}$. (a) Vypočítejte časovou konstantu obvodu. (b) Vypočítejte kapacitu kondenzátoru.

69Ú. Rezistor o odporu $3 \text{ M}\Omega$ a kondenzátor o kapacitě $1,00 \mu\text{F}$ jsou spojeny sériově s ideální baterií o elektromotorickém napětí $\mathcal{E} = 4,00 \text{ V}$. Za $1,00 \text{ s}$ po připojení baterie vypočítejte (a) rychlost nárůstu náboje kondenzátoru, (b) rychlost nárůstu elektrické potenciální energie kondenzátoru, (c) rychlost disipace energie v rezistoru, (d) rychlost, jakou baterie dodává energii do obvodu.

70Ú. V okamžiku $t = 0$ je sepnut spínač a kondenzátor o počátečním napětí 100 V se začne vybíjet přes rezistor. V okamžiku

$t = 10,0 \text{ s}$ je napětí na kondenzátoru $1,00 \text{ V}$. (a) Jaká je časová konstanta obvodu? (b) Jaké bude napětí na kondenzátoru v čase $t = 17,0 \text{ s}$?

71Ú. Na obr. 28.55 je elektrický obvod zábleskové lampy, používané např. k označení opravovaných úseků dálnice. Výbojka L (zanedbatelné kapacity) je připojena paralelně ke kondenzátoru C sériového RC obvodu. Výbojkou prochází proud pouze tehdy, když napětí na ní dosáhne vybíjecího napětí U_L . Kondenzátor se pak přes ni vybije (předpokládejme, že úplně, tj. na nulové napětí) a ta zableskne. Předpokládejte, že zableskne dvakrát za sekundu. Jaký odpor R musí mít rezistor, je-li vybíjecí napětí $U_L = 72,0 \text{ V}$, emn ideální baterie $\mathcal{E} = 95,0 \text{ V}$ a kapacita kondenzátoru $C = 0,150 \mu\text{F}$?



Obr. 28.55 Úloha 71

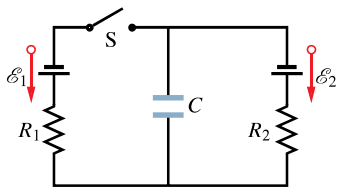
72Ú. Kondenzátor o kapacitě $1,0 \mu\text{F}$ a počáteční energii $0,50 \text{ J}$ se vybíjí přes rezistor o odporu $1,0 \text{ M}\Omega$. (a) Jaký je počáteční náboj kondenzátoru? (b) Jaký proud prochází rezistorem v okamžiku, kdy vybíjení kondenzátoru začíná? (c) Vyjádřete napětí na kondenzátoru U_C a napětí na rezistoru U_R jako funkci času. (d) Vypočítejte rychlost disipace energie v rezistoru jako funkci času.

73Ú. Napětí na deskách částečně probitého kondenzátoru (tj. takového, že náboj může procházet z jedné desky na druhou) o kapacitě $2,0 \mu\text{F}$ klesne na čtvrtinu své počáteční hodnoty za $2,0 \text{ s}$. Jaký je odpor vodivého spojení desek?

74Ú. Původně nenabitý kondenzátor o kapacitě C se plně nabije pomocí baterie o konstantním elektromotorickém napětí \mathcal{E} zapojeném do série s rezistorem R . (a) Ukažte, že koncová energie nabitého kondenzátoru je rovna polovině energie dodané zdrojem emn. (b) Integrováním výrazu $I^2 R$ podle času ukažte, že energie disipovaná rezistorem je také rovna polovině energie dodané zdrojem emn.

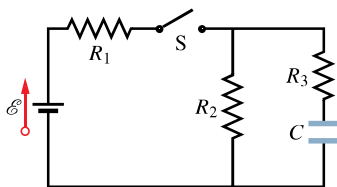
75Ú. Elektronická řídicí jednotka, která ovládá spínání světel ve světelné reklamě, obsahuje rezistor o proměnném odporu připojený ke kondenzátoru o kapacitě $0,220 \mu\text{F}$. Kondenzátor se nabije na napětí $5,00 \text{ V}$ a potom se vybíjí přes rezistor. Doba, za kterou napětí na jeho deskách klesne na $0,800 \text{ V}$, se měří vestavěnými elektronickými hodinami. V jakém intervalu má být možné nastavit odpor rezistoru, aby se doba vybíjení mohla měnit od $10,0 \mu\text{s}$ do $6,00 \text{ ms}$?

76Ú. V obvodu na obr. 28.56 je kondenzátor, dvě ideální baterie, dva rezistory a spínač S . Spínač byl nejprve dlouhou dobu rozpojen a potom byl na dlouhou dobu zase sepnut. O kolik se změnil náboj kondenzátoru po sepnutí? Předpokládejte $C = 10 \mu\text{F}$, $\mathcal{E}_1 = 1,0 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 3,0 \text{ V}$, $R_1 = 0,20 \Omega$, $R_2 = 0,40 \Omega$.



Obr. 28.56 Úloha 76

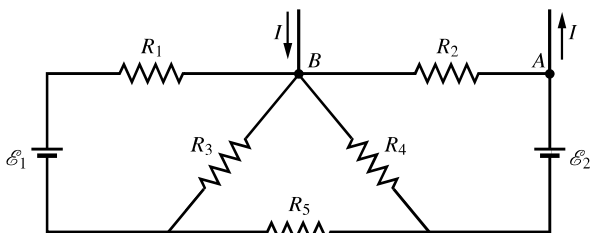
77Ú*. V obvodu na obr. 28.57 je $\mathcal{E} = 1,2 \text{ kV}$, $C = 6,5 \mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 0,73 \text{ M}\Omega$. Kondenzátor C je bez náboje, v okamžiku $t = 0$ je sepnut spínač S . (a) Vypočítejte proud procházející každým z rezistorů pro $t = 0$ a pro $t \rightarrow \infty$. (b) Načrtněte graf časové závislosti napětí $U_2(t)$ na rezistoru R_2 v intervalu od $t = 0$ do $t \rightarrow \infty$. (c) Vypočítejte hodnotu napětí U_2 pro $t = 0$ a pro $t \rightarrow \infty$. (d) Jaký fyzikální význam má v tomto případě podmínka $t \rightarrow \infty$?



Obr. 28.57 Úloha 77

PRO POČÍTAČ

78Ú. Na obr. 28.58 je část elektronického obvodu. Do nenakreslené části obvodu přitéká uzlem A proud I a uzlem B z ní odtéká stejný proud I . Položte $\mathcal{E}_1 = 10 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 15 \text{ V}$, $R_1 = R_2 = 5,0 \Omega$, $R_3 = R_4 = 8,0 \Omega$, $R_5 = 12 \Omega$. (a) Pro každou ze čtyř zadaných hodnot proudu I (0; 4,0 A; 8,0 A; 12 A) vypočítejte proud procházející ideálními bateriemi a rozhodněte, zda se baterie vybíjejí, nebo nabíjejí. Vypočítejte také napětí U_{AB} . (b) Část obvodu, která není na obrázku nakreslena, obsahuje sériově zapojený zdroj emn a rezistor. Jaké jsou jejich hodnoty?



Obr. 28.58 Úloha 78

79Ú. V tabulce jsou uvedeny hodnoty napětí U_s na svorkách baterie v závislosti na proudu I odebíraném z baterie. (a) Napište matematický vztah, který popisuje závislost mezi svorkovým napětím baterie a odebíraným proudem I . Zadejte údaje z tabulky

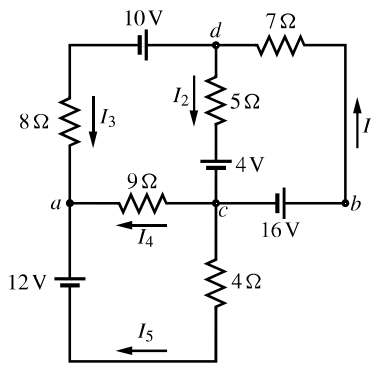
I/A	50	75	100	125	150	175	200
U_s/V	10,7	9,0	7,7	6,0	4,8	3,0	1,7

do počítače a proveďte lineární regresi. Z parametrů lineární regrese určete (b) emn baterie a (c) její vnitřní odpor.

80Ú. Uvažujte obvod na obr. 28.59. (a) Použijte uzlové pravidlo pro uzly a a d a smyčkové pravidlo pro tři smyčky a sestavte soustavu lineárně nezávislých rovnic. (b) Soustavu rovnic napište v maticovém tvaru $[A][B] = [C]$, kde

$$[B] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix}.$$

Jaké jsou prvky matic $[A]$ a $[C]$? (c) Vypočítejte proudy I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 .



Obr. 28.59 Úlohy 80 a 81

81Ú. Po určení všech pěti proudů v úloze 80 pokračujte dále ve vyšetřování obvodu na obr. 28.59. (a) Vypočítejte napětí na rezistoru o odporu 9Ω . (b) Vypočítejte výkon ztracený na rezistoru o odporu 7Ω . (c) Vypočítejte výkon 12 V baterie v obvodu. (d) Vypočítejte výkon 4 V baterie v obvodu. (e) Který z uzlů a, c má vyšší potenciál?

82Ú. Kondenzátor o kapacitě C_0 byl nejprve dlouhou dobu připojen k baterii o elektromotorickém napětí \mathcal{E}_0 a v okamžiku $t = 0$ se začal vybíjet přes rezistor o odporu $200 \text{ k}\Omega$. Při vybíjení bylo měřeno napětí na kondenzátoru v závislosti na čase. Výsledky jsou uvedeny v tabulce. (a) Napište matematický vztah pro napětí na kondenzátoru jako funkci času. Zadejte údaje z tabulky do počítače a proveďte lineární regresi závislosti přirozeného logaritmu napětí $\ln(u_C)$ na čase. Z parametrů regrese určete (b) elektromotorické napětí baterie \mathcal{E}_0 , (c) časovou konstantu τ_C obvodu, (d) kapacitu C_0 .

u_C/V	9,9	7,2	5,7	4,4	3,4	2,7	2,0
t/s	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4

29

Magnetické pole



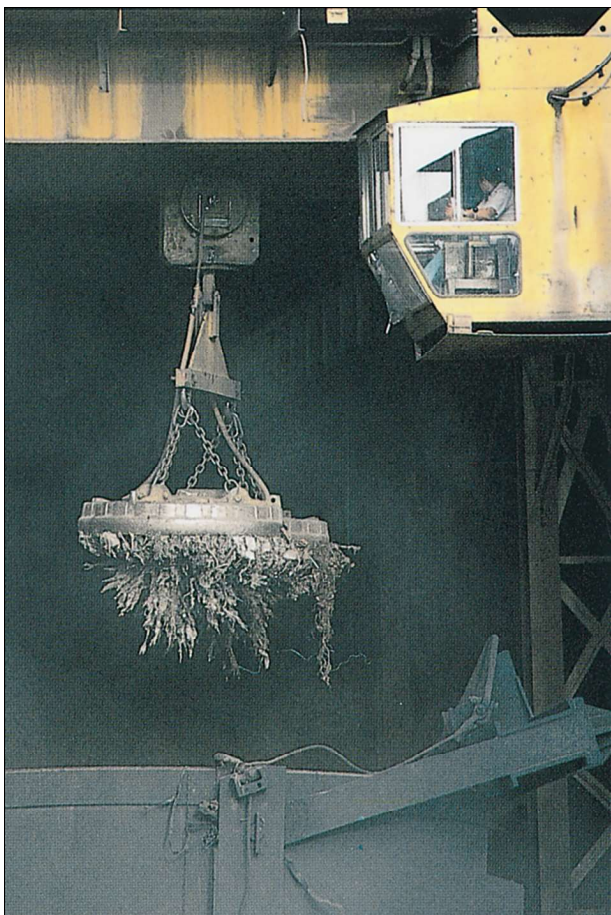
Budete-li pozorovat za bezměsíčné noci oblohu, nejlépe za polárním kruhem, můžete spatřit nezapomenutelný jev, polární záři. Vypadá jako jemná svítící záclona, která visí dolů z oblohy. Její rozměry jsou obrovské, je několik tisíc kilometrů dlouhá, několik set kilometrů vysoká a tvoří oblouk téměř kilometr široký. Čemu vděčíme za tuto grandiózní podívanou a proč je tak vzácná?

29.1 MAGNETICKÉ POLE

V kap. 22 jsme se zabývali vznikem a vlastnostmi elektrického pole vytvořeného například nabitou plastikovou tyčí. Toto pole existuje v celém prostoru kolem tyče a můžeme ho popsat vektorem elektrické intenzity \mathbf{E} . Podobně i magnet vytváří pole v každém bodě prostoru kolem sebe a uvidíme, že ho můžeme popsat vektorovou veličinou \mathbf{B} , kterou nazýváme **magnetická indukce**. S magnetickým polem se můžeme setkat v běžném životě například tehdy, když přidržujeme papírky se vzkazy na dveřích ledničky malými magnety nebo když náhodou smažeme disketu, přiblížíme-li ji neopatrně k magnetu. Takový magnet, ať už na dveřích ledničky nebo poblíž diskety, působí *prostřednictvím* svého magnetického pole.

Častý typ magnetu je tvořen cívkou navinutou z drátu kolem ocelového jádra, kterou prochází elektrický proud, tzv. elektromagnet. Čím větší je proud, tím silnější je magnetické pole. V průmyslu se takové **elektromagnety** používají ke třídění železného šrotu (obr. 29.1) a v mnoha dalších případech. V každodenním životě jsou ještě běžnější **permanentní magnety** — magnety stejného typu jako na dveřích ledničky. Ty vytvářejí magnetické pole, aniž k tomu potřebují dodávat elektrický proud.

Obr. 29.1 Třídění kovů elektromagnetem v ocelárnách



V kap. 23 jsme objasnili, jak *elektrický náboj* ve svém okolí vytváří elektrické pole, které působí na ostatní elektrické náboje. Bylo by proto přirozené analogicky očekávat, že existuje *magnetický náboj*, který vytváří ve svém okolí magnetické pole působící na jiné magnetické náboje. Ačkoli takové magnetické náboje, zvané *magnetické monopóly*, vystupují v některých teoriích, nebyla jejich existence experimentálně potvrzena. Magnetická pole, s nimiž se běžně setkáváme, tedy vznikají nějak jinak.

Původ kteréhokoli magnetického pole kolem nás můžeme vysvětlit jedním z těchto dvou mechanismů: (1) Pohybující se elektricky nabitě částice, jako jsou nosiče náboje ve vodičích, vytvářejí ve svém okolí magnetické pole. (2) Některé elementární částice (např. elektrony) mají kolem sebe také magnetické pole; toto pole je jejich základní charakteristikou stejně jako hmotnost či elektrický náboj. V kap. 32 si podrobně všimneme toho, že v určitých látkách se skládají magnetická pole elektronů a vytvářejí navenek výrazné magnetické pole. Tak je tomu u látek, z nichž jsou vyrobeny permanentní magnety. V ostatních látkách se magnetická pole všech elektronů vruší a žádné výraznější magnetické pole jako výsledek nevznikne. To platí třeba pro látku, z níž se skládá lidské tělo.

Experimentálně je potvrzeno, že na nabitou částici (ať už jedinou, nebo jako jednu z mnoha, které vytvářejí elektrický proud v drátu) pohybující se v magnetickém poli, působí pole jistou silou. V této kapitole se soustředíme na vztah mezi magnetickým polem a touto silou.

29.2 DEFINICE MAGNETICKÉ INDUKCE

Intenzitu elektrického pole \mathbf{E} v určitém místě prostoru jsme určili tak, že jsme do tohoto místa vložili testovací částici s nábojem Q_0 a měřili elektrickou sílu \mathbf{F}_E , která na ni působí. Potom jsme definovali *elektrickou intenzitu* \mathbf{E} vztahem:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_E}{Q_0}. \quad (29.1)$$

Pokud by existoval magnetický monopól, mohli bychom definovat magnetickou indukci \mathbf{B} podobně. Poněvadž však žádné monopóly nebyly dosud nalezeny, musíme definovat \mathbf{B} jinak. Použijeme k tomu magnetickou sílu \mathbf{F}_B , působící na pohybující se elektricky nabitou částici.

To můžeme v principu udělat tak, že vstřelujeme s různými rychlostmi v různých směrech nabitě částice do místa, kde chceme \mathbf{B} změřit. Přitom vždy určíme sílu působící na částici v tomto místě. Po mnoha takových zkouškách bychom zjistili, že existuje takový směr rychlosti $\mathbf{v}_{F=0}$, že síla \mathbf{F}_B je nulová. Pro všechny ostatní směry rychlosti \mathbf{v} je

velikost síly F_B vždy úměrná součinu $v \sin \varphi$, kde φ je úhel mezi směry $\mathbf{v}_{F=0}$ a \mathbf{v} . Kromě toho platí, že směr síly F_B je vždy kolmý na směr rychlosti \mathbf{v} . (Tyto výsledky naznačují, že uvedené veličiny budou mezi sebou vázány vektorovým součinem.)

Definujme proto **magnetickou indukci** jako vektor, který má směr $\mathbf{v}_{F=0}$. Pro rychlost \mathbf{v} kolmou k $\mathbf{v}_{F=0}$ je $\varphi = 90^\circ$ a síla působící na částici má maximální velikost $F_{B,\max}$. Velikost magnetické indukce B definujeme pomocí velikosti této síly vztahem

$$B = \frac{F_{B,\max}}{|Q|v},$$

kde Q je náboj částice.

Všechny dosavadní výsledky můžeme shrnout do jediné vektorové rovnice pro **Lorentzovu sílu**:

$$\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (29.2)$$

Síla F_B působící na nabitou částici je tedy rovna součinu jejího náboje Q a vektorového součinu její rychlosti \mathbf{v} a magnetické indukce \mathbf{B} . Použijeme-li rov. (3.20) pro velikost vektorového součinu, můžeme pro velikost Lorentzovy síly F_B psát

$$F_B = |Q|vB \sin \varphi, \quad (29.3)$$

kde φ je úhel mezi směry rychlosti \mathbf{v} a magnetické indukce \mathbf{B} .

Určení magnetické (Lorentzovy) síly působící na částici

Rov. (29.3) nám říká, že velikost Lorentzovy síly F_B , která působí na částici v magnetickém poli, je úměrná náboji Q a velikosti rychlosti v částice. Síla je rovna nule, je-li náboj

nulový nebo je-li částice v klidu. Z tohoto vztahu rovněž plyne, že síla je také rovna nule, jsou-li vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} rovnoběžné, ať už souhlasně ($\varphi = 0^\circ$) nebo nesouhlasně ($\varphi = 180^\circ$), a je maximální, jsou-li \mathbf{v} a \mathbf{B} na sebe kolmé.

Rov. (29.2) určuje navíc i směr F_B . Z čl. 3.7 víme, že vektorový součin $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ v rov. (29.2) je kolmý na oba vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} . Pravidlo pravé ruky (obr. 29.2) nám říká, že vztyčený palec pravé ruky ukazuje směr $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, jestliže zahnuté prsty ukazují směr otáčení vektoru \mathbf{v} do vektoru \mathbf{B} přes menší z obou úhlů, které oba vektory svírají.* Jestliže je náboj Q kladný, potom podle rov. (29.2) má síla F_B stejný směr jako součin $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. To znamená, že pro kladný náboj Q má F_B směr vztyčeného palce, jak je ukázáno na obr. 29.2b. Je-li náboj Q záporný, mají síla F_B a vektorový součin $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ opačná znaménka a tedy i opačný směr. Jinými slovy, pro záporný náboj Q má F_B směr opačný, než ukazuje palec na obr. 29.2c.

Bez ohledu na znaménko náboje však platí:

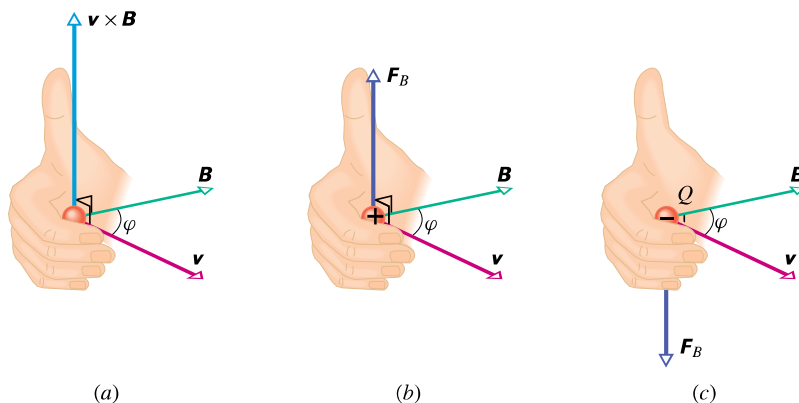
Lorentzova síla F_B , která působí na nabitou částici pohybující se rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli \mathbf{B} , je vždy kolmá na oba vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} .

Síla F_B tedy nemá nikdy nenulovou složku do směru vektoru \mathbf{v} a nemůže tedy měnit velikost rychlosti částice (a tedy ani její kinetickou energii). Může měnit pouze směr rychlosti \mathbf{v} (a tím směr pohybu); jenom v tomto smyslu urychluje síla F_B nabitou částici.

Abychom lépe ocenili důležitost rov. (29.2), podívejme se na obr. 29.3, který znázorňuje stopy nabitých částic, pohybujících se v *bublinkové komoře*, umístěné v Lawrenceově laboratoři v Berkeley. Komoře, která je naplněna tekutým vodíkem, se nachází v silném homogenním magnetickém poli kolmém na rovinu obrázku a směřujícím k nám. Z levé strany přiletla γ -částice; nezanechala stopu, neboť

* Místo otáčení můžeme ukázat ukazováčkem \mathbf{v} a prostředníkem \mathbf{B} ; palec pak míří ve směr $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Obr. 29.2 (a) Pravidlo pravé ruky určuje směr vektorového součinu $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ takto: ohnuté prsty pravé ruky orientujeme tak, abychom otočili vektor \mathbf{v} do směru vektoru \mathbf{B} o menší z obou možných úhlů, které tyto vektory svírají. Vztyčený palec potom ukazuje směr vektoru $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. (b) Je-li náboj Q kladný, potom síla $F_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ má směr stejný jako součin $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. (c) Je-li náboj Q záporný, je směr síly F_B opačný než směr součinu $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.





Obr. 29.3 Trajektorie dvou elektronů e^- a pozitronu e^+ v bublinkové komoře umístěné v homogenním magnetickém poli (směr pole je kolmý k rovině obrázku směrem k pozorovateli).

nemá náboj. Poté při srážce vyrazila elektron z vodíkového atomu (dlouhá, jenom mírně zakřivená dráha, označená e^-), a sama se přeměnila na dvojici elektron (spirálovitá dráha, označená e^-) a pozitron (dráha e^+). Za pomoci rov. (29.2) a obr. 29.2 se přesvědčte o tom, že trajektorie obou záporných a jedné kladné částice jsou zakřiveny ve správném směru.

Z rov. (29.2) a (29.3) plyne jednotka magnetické indukce. Nazýváme ji **tesla** (T):

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = \text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{C}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Protože coulomb za sekundu je ampér, platí

$$1 \text{ T} = \text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (29.4)$$

Starší jednotkou, která nepatří do soustavy SI, ale dosud se příležitostně užívá, je **gauss** (G). Platí, že

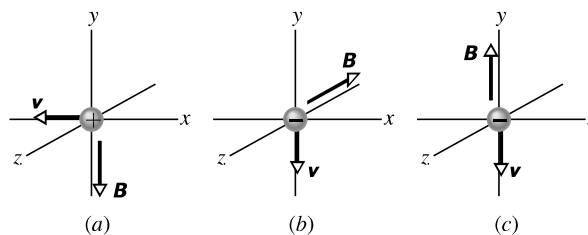
$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}. \quad (29.5)$$

V tab. 29.1 jsou uvedeny velikosti indukcí B některých magnetických polí. Všimněte si, že magnetické pole Země má u zemského povrchu indukci asi $10^{-4} \text{ T} = 100 \mu\text{T} = 1 \text{ G}$.

Tabulka 29.1 Přibližné velikosti magnetických indukcí některých polí

Povrch neutronové hvězdy	10^8 T
Blízko velkého elektromagnetu	$1,5 \text{ T}$
Blízko malého tyčového magnetu	10^{-2} T
Na povrchu Země	10^{-4} T
V mezihvězdném prostoru	10^{-10} T
Nejnižší hodnota v magneticky stíněné místnosti	10^{-14} T

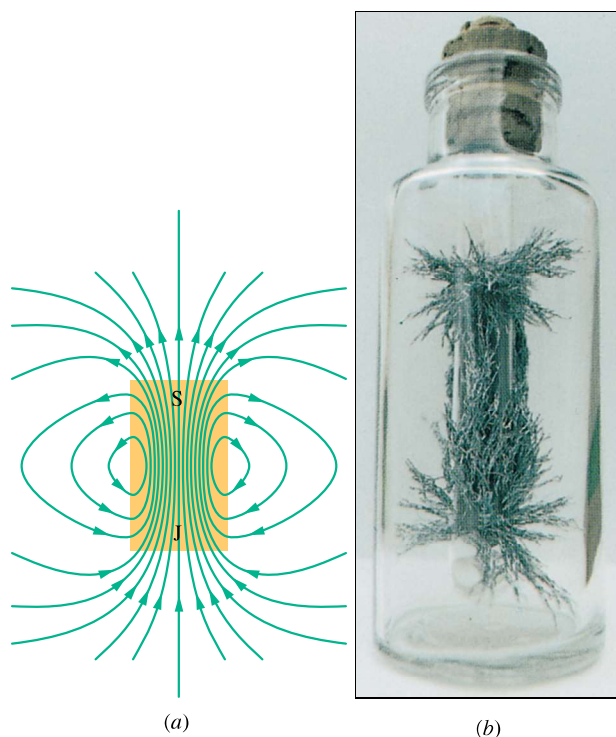
KONTROLA 1: Na třech obrázcích se nabitá částice pohybuje rychlostí \mathbf{v} v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} . Jaký směr má Lorentzova síla \mathbf{F}_B , která na ni působí?



Indukční čáry

Podobně jako znázorňujeme elektrické pole pomocí elektrických siločar, znázorňujeme magnetické pole magnetickými indukčními čarami. Vytváříme je obdobně, to znamená, že v každém bodě pole platí, že směr magnetické indukce \mathbf{B} je určen tečnou k indukční čáře. Velikost vektoru \mathbf{B} můžeme vystihnout hustotou indukčních čar v dané oblasti.

Obr. 29.4a ukazuje, jak lze znázornit magnetické pole tyčového magnetu (tj. permanentního magnetu ve tvaru tyče) pomocí indukčních čar. Indukční čáry procházející magnetem vytvářejí uzavřené křivky (a to i ty čáry, které na obrázku nejsou zakresleny jako uzavřené). Vnější magnetické pole tyčového magnetu je nejsilnější poblíž jeho konců, kde jsou indukční čáry nejhustší. Experimentálně to lze ověřit pomocí železných pilin, které se nastavují podél indukčních čar a shromažďují se hlavně na koncích magnetu (obr. 29.4b).

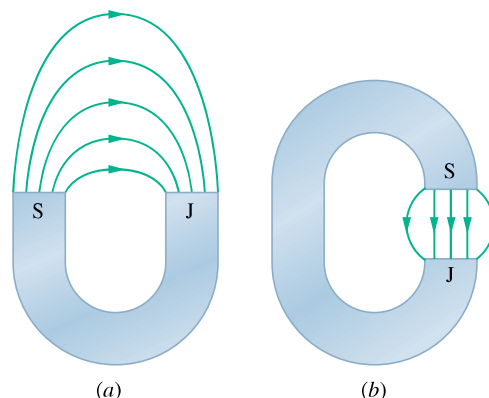


Obr. 29.4 (a) Indukční čáry tyčového magnetu. (b) „Kravský magnet“: tyčový magnet, který se nechá krávé spolknout, aby zůstal v jejím bachu. Tam pak přitahuje a drží všechny náhodně spolknuté železné předměty (např. hřebíky), aby neporanily další vnitřnosti.

Protože indukční čáry tvoří uzavřené křivky, musí vycházet z jednoho konce magnetu a vcházet do druhého (a pokračovat dál uvnitř magnetu). Ten konec, ze kterého indukční čáry vycházejí, se nazývá *severní pól* magnetu; opačný konec, kde vcházejí do magnetu, se nazývá *jižní pól*. Magnety, kterými si lepíme vzkazy na ledničku nebo oznámení na magnetickou tabuli, mají právě tvar takových krátkých tyčových magnetů. Na obr. 29.5 jsou další dva typické tvary magnetu: *podkovovitý magnet* a *magnet tvaru písmene C*, jehož konce, zvané *čela*, někdy dále upravená *pólovými nástavci*, jsou blízko sebe a jsou navzájem rovnoběžná; magnetické pole mezi nimi je pak silné a přibližně homogenní. Když k sobě magnety přiblížíme, tak bez ohledu na jejich tvar zjistíme:

Opačné póly magnetu se navzájem přitahují, souhlasné se odpuzují.

Země má vlastní magnetické pole, které vzniká v jejím jádře, ale zatím přesně nevíme jak. Na zemském povrchu ho můžeme zjistit kompasem, jehož podstatou je stříelka — tenký tyčový magnet, volně otáčivý ve vodorovné rovině. Stříelka se otočí, protože její severní pól je přitahován k Ark-



Obr. 29.5 (a) Podkovovitý magnet a (b) magnet tvaru C (jsou zakresleny pouze některé indukční čáry).

tidě. Tedy *jižní* pól zemského magnetického pole se musí nacházet v oblasti Arktidy a logicky bychom ho potom měli nazývat jižním pólem. Protože však se v Arktidě nachází severní geografický pól, bylo dohodnuto užívat pro tento jižní magnetický pól termín *severní geomagnetický pól*.*

Tedy na severní polokouli vcházejí magnetické indukční čáry zemského magnetického pole do Země směrem k Arktidě. Naopak na jižní polokouli vycházejí indukční čáry ze Země v oblasti Antarktidy z místa, které nazýváme *jižním geomagnetickým pólem*.

PŘÍKLAD 29.1

Magnetická indukce homogenního magnetického pole má velikost 1,2 mT a vektor \mathbf{B} míří svisle vzhůru, takže indukční čáry procházejí celým objemem komůrky měřícího zařízení. Proton s kinetickou energií 5,3 MeV vletí vodorovně do komůrky směrem od jihu k severu. Jaká vychylující síla na něj působí?

ŘEŠENÍ: Magnetická vychylující síla závisí na rychlosti protonu, kterou můžeme určit ze vztahu pro kinetickou energii $E_k = \frac{1}{2}mv^2$; z něj plyne

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2(5,3 \text{ MeV})(1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J/MeV})}{(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}} = 3,2 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

* Magnetické pole Země se pomalu mění. Na rozdíl od geografických pólů, které mají prakticky neměnnou polohu, se poloha magnetických pólů mění. V geologických časových měřítkách (10^5 až 10^7 let) dokonce mění magnetické pole Země i svůj směr („přemagnetování“). Viz čl. 32.3.

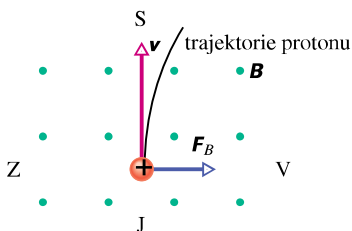
Z rov. (29.3) potom dostaneme

$$\begin{aligned} F_B &= |Q|vB \sin \varphi = \\ &= (1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(3,2 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) \cdot \\ &\quad \cdot (1,2 \cdot 10^{-3} \text{ T})(\sin 90^\circ) = \\ &= 6,1 \cdot 10^{-15} \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato síla se může zdát velmi malá, ale protože působí na částici s velmi malou hmotností, udělí jí velké zrychlení:

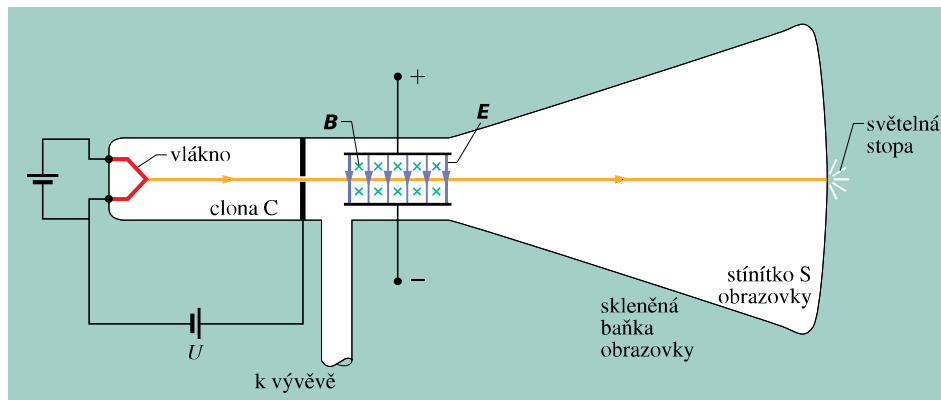
$$a = \frac{F_B}{m} = \frac{(6,1 \cdot 10^{-15} \text{ N})}{(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})} = 3,7 \cdot 10^{12} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Zbývá určit směr magnetické síly F_B . Víme, že rychlost \mathbf{v} má směr vodorovný z jihu na sever a \mathbf{B} směřuje svisle vzhůru. Použitím pravidla pravé ruky (obr. 29.2b) určíme, že síla F_B směřuje vodorovně od západu na východ, jak je vidět na obr. 29.6. (Tečky na obrázku znázorňují magnetické pole kolmé k rovině obrázku směřující k nám. Kdyby měla částice záporný náboj, měla by magnetická síla opačný směr, to znamená od východu na západ. Plyne to přímo z rov. (29.2), dosadíme-li $-Q$ místo Q .



Obr. 29.6 Příklad 29.1. Pohled shora na proton pohybující se z jihu na sever v komůrce měřicího zařízení. Magnetické pole má směr k nám (jak je znázorněno řadou teček, připomínajících špičky šípů letících směrem k nám). Proton je vychylován směrem na východ.

Obr. 29.7 Moderní verze zařízení, pomocí něhož J. J. Thomson změřil poměr hmotnosti a náboje elektronu. Elektrické pole \mathbf{E} vytvořil připojením baterie na vodorovné vychylovací destičky. Magnetické pole \mathbf{B} vytvořil pomocí proudu procházejícího soustavou cívek (na obrázku nejsou zakresleny). Je kolmé k rovině obrázku a směřuje od nás (jak ukazují křížky).



RADY A NÁMĚTY

Bod 29.1: *Klasické a relativistické vztahy pro kinetickou energii*

V př. 29.1 jsme pro kinetickou energii protonu použili (přibližný) klasický vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ místo (přesného) relativistického výrazu (7.51). Kritériem pro oprávněnost použití klasického výrazu je podmínka $E_k \ll mc^2$, kde mc^2 je klidová energie částice. V našem případě je $E_k = 5,3 \text{ MeV}$, zatímco $mc^2 = 938 \text{ MeV}$. Proton tedy splňuje výše uvedené podmínku a můžeme bez obav použít vztah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. To však nemůžeme udělat vždy, zejména ne tehdy, jedná-li se o lehké částice s vysokou energií.

29.3 OBJEV ELEKTRONU

Může se stát, že na nabitou částici působí současně jak elektrické, tak i magnetické pole. Zajímavý a celkem snadno řešitelný je případ, když jsou obě pole na sebe *navzájem kolmá*; jde o tzv. zkřížená pole. V dalším zjistíme, co se v takové situaci stane s nabitou částicí, konkrétně s elektronem. Rozebereme to na pokusu, který vedl v roce 1897 k objevu elektronu (J. J. Thomson na Universitě v Cambridgi).

Na obr. 29.7 je znázorněna moderní zjednodušená verze Thomsonova experimentálního zařízení — *katodová trubice* (podobná obrazovce televizního přijímače). Nabitě částice (které nyní nazýváme *elektrony*) jsou emitovány ze žhavého vlákna na konci vyčerpané trubice a jsou urychlovány napětím U . Průchodem šterbinou ve cloně C se z nich vymezí úzký svazek. Poté elektrony projdou oblastí zkřížených polí \mathbf{E} a \mathbf{B} a nakonec dopadnou na fluorescenční stínítko S, na němž vytvoří světelnou skvrnu (televizní obraz je složen z mnoha takových skvrn). Síly působící na nabitě částice v oblasti zkřížených polí je mohou vychýlit od středu stínítka. Změnou velikostí a směrů obou polí mohl Thomson posunovat světelnou stopu na stínítku. V konkrétním případě zobrazeném na obr. 29.7 jsou

elektrony vychylovány v rovině obrázku směrem nahoru elektrickým polem \mathbf{E} a směrem dolů magnetickým polem \mathbf{B} , což znamená, že příslušné síly působí v opačných směrech. Thomson postupoval ve třech krocích:

1. Nastavil $E = 0$ a $B = 0$ a označil polohu svítící stopy na stínítku S obrazovky (pro nevychýlený paprsek).
2. Zapnul elektrické pole a změřil výchylku paprsku.
3. Udržoval stálou intenzitu elektrického pole a magnetickou indukci měnil tak dlouho, dokud se paprsek nevrátil do původní, na stínítku označené polohy.

V př. 23.8 jsme počítali výchylku y nabitě částice pohybující se mezi dvěma rovnoběžnými destičkami (krok 2), mezi nimiž bylo vytvořeno elektrické pole \mathbf{E} . Zjistili jsme, že je rovna

$$y = \frac{QEL^2}{2mv^2}, \quad (29.6)$$

kde L je délka destiček a v velikost rychlosti, s níž částice s hmotností m a nábojem Q vletěla do elektrického pole.

Téhož vztahu můžeme použít i pro paprsek elektronů na obr. 29.7: změříme polohu místa dopadu paprsku na obrazovce S a z ní vypočítáme výchylku y na konci destiček. Poněvadž směr posunutí záleží na znaménku náboje částice, dokázal tím Thomson, že částice, které dopadaly na obrazovku, měly záporný náboj.

Jsou-li obě pole na obr. 29.7 nastavena tak, že se síly, kterými působí na náboj, vyruší (krok 3), dostaneme z rovnic (29.1) a (29.3)

$$|Q|E = |Q|vB \sin 90^\circ$$

a odtud

$$v = \frac{E}{B}. \quad (29.7)$$

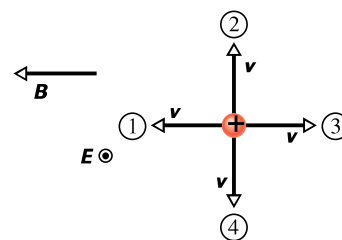
Zkřížená pole nám tedy umožňují změřit rychlost nabitých částic. Dosazením za v z rov. (29.7) do rov. (29.6) dostaneme po úpravě

$$\frac{Q}{m} = \frac{2yE}{B^2L^2}. \quad (29.8)$$

Všechny veličiny na pravé straně tohoto vztahu můžeme přímo měřit. Uspořádání zkřížených polí nám tedy umožňuje změřit měrný náboj Q/m částic vyletujících ze žhářového vlákna.

Thomson došel k závěru, že tyto částice — elektrony — se vyskytují v každé látce a že mají hmotnost více než 1 000krát menší než nejlehčí známý atom — vodík. (Přesný poměr hmotností, zjištěný později, je 1 836,15.) Thomsonova měření poměru Q/m spolu se smělostí jeho dvou tvrzení můžeme považovat za „objev elektronu“.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou zakresleny čtyři směry rychlosti \mathbf{v} kladně nabitě částice pohybující se v homogenním elektrickém poli \mathbf{E} (je kolmé k obrázku a má směr k nám, což je znázorněno tečkou v kroužku) a homogenním magnetickém poli \mathbf{B} . (a) Seřadte směry 1, 2, 3 a 4 sestupně podle velikosti výsledné síly působící na částici. (b) Pro který z nich je výsledná síla nulová?



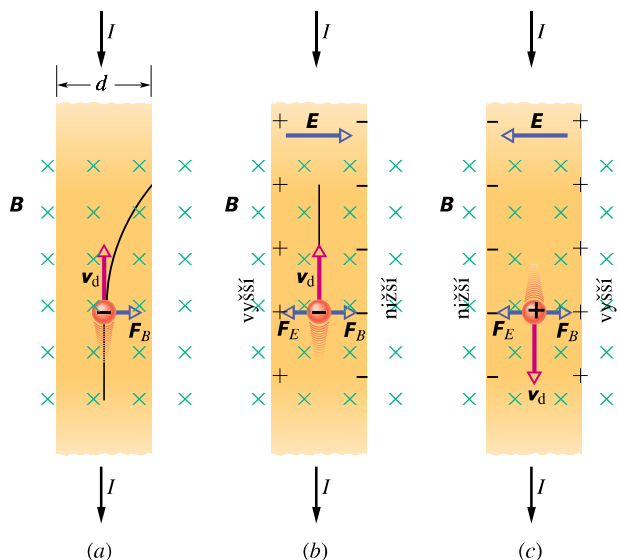
29.4 HALLŮV JEV

Jak jsme ukázali, může být paprsek elektronů ve vakuu vychýlen magnetickým polem. Naskytá se otázka: mohou být magnetickým polem vychylovány také vodivostní elektrony pohybující se driftovou rychlostí např. v měděném vodiči? Že to je opravdu možné, ukázal v roce 1879 Edwin H. Hall, v té době 24letý absolvent University Johna Hopkinse. Tento **Hallův jev** umožňuje nejen zjistit, zda náboj nosičů proudu je kladný nebo záporný, ale můžeme s jeho pomocí změřit i počet těchto nosičů v objemové jednotce vodiče.

Na obr. 29.8a je měděný vodič ve tvaru proužku o šířce d , kterým protéká elektrický proud I od horní části proužku směrem dolů. Nosiče náboje jsou elektrony, a jak víme, pohybují se (s driftovou rychlostí v_d) směrem opačným, tedy od dolní části proužku nahoru. V určitém okamžiku (obr. 29.8a) bylo zapnuto vnější magnetické pole \mathbf{B} , kolmé k rovině obrázku směřující od nás. Z rov. (29.2) plyne, že magnetická síla \mathbf{F}_B bude působit na každý elektron pohybující se driftovou rychlostí tak, že ho bude „tlačit“ k pravé straně proužku.

Během jisté doby se elektrony pohybující se doprava nakupí na pravé straně proužku, takže zanechají na levé straně proužku nevykompenzované kladné náboje. Tím vzniká elektrické pole o intenzitě \mathbf{E} uvnitř proužku. Toto pole má směr zleva doprava (obr. 29.8b), takže elektrická síla \mathbf{F}_E tlačí každý elektron doleva.

Během velmi krátké doby se ustaví rovnováha: elektrická síla působící na každý elektron poroste tak dlouho, až se vyrovná opačně působící magnetické síle. Tím se



Obr. 29.8 Měděný proužek, kterým protéká proud I , je umístěn do magnetického pole \mathbf{B} . (a) Situace okamžitě po zapnutí magnetického pole. Je zakreslena zakřivená trajektorie, po níž se bude elektron pohybovat. (b) Ustálená situace, která se vytvoří brzy po zapnutí. Všimněte si, že záporné náboje se budou shromažďovat na pravé straně proužku, takže na levé straně zůstane nevykompenzovaný kladný náboj. Levá strana proužku tedy bude mít vyšší elektrický potenciál než strana pravá. (c) Pokud budou mít nosiče nábojů kladné znaménko, budou se shromažďovat na pravé straně proužku a ta bude mít vyšší potenciál než strana levá.

obě síly navzájem vyruší: $\mathbf{F}_E + \mathbf{F}_B = \mathbf{0}$. Nadále se elektrony budou pohybovat driftovou rychlostí ve směru délky proužku k jeho hornímu okraji a náboj nahromaděný na pravé straně, a tedy i pole \mathbf{E} jím vytvořené napříč proužku už více neporostou.

Rozdíl potenciálů U_H vzniklý podle rov. (25.42) na vzdálenosti d se nazývá *Hallovo napětí*:

$$U_H = Ed. \quad (29.9)$$

Připojením voltmetru k bočním okrajům proužku můžeme Hallovo napětí přímo změřit. Zjistíme tím také, který z okrajů má vyšší potenciál. V situaci na obr. 29.8b má levá strana proužku vyšší potenciál, což souhlasí s naším předpokladem, že nosiče náboje mají záporné znaménko.

Předpokládejme na chvíli, že nosiče náboje mají kladný náboj (obr. 29.8c). Jestliže by se tyto kladné nosiče náboje pohybovaly od horního konce proužku k dolnímu, byly by tlačeny k pravé straně proužku silou \mathbf{F}_B , a tedy jeho *pravá* strana by měla vyšší potenciál. Protože je tento výsledek v protikladu s údaji našeho voltmetru, musí mít nosiče náboje znaménko záporné.

Nyní doplníme naše úvahy kvantitativními výpočty.

Velikost náboje nosiče označíme Q ; pro elektron je $Q = -e$. Je-li elektrická síla v rovnováze se silou magnetickou (obr. 29.8b), dostaneme z rov. (29.1) a (29.3) rovnici

$$QE = Qv_d B. \quad (29.10)$$

Z rov. (27.7) plyne pro driftovou rychlost v_d

$$v_d = \frac{J}{nQ} = \frac{I}{nQS}, \quad (29.11)$$

kde $J = I/S$ je velikost hustoty proudu v proužku, S je obsah příčného průřezu proužku a n je *počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče* (koncentrace nosičů náboje).

Vyjádříme-li n z rov. (29.11), dostáváme po dosazení z rov. (29.9) a (29.10) vztah

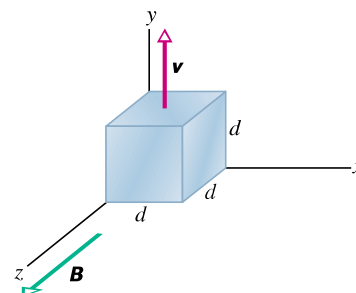
$$n = \frac{BI d}{U_H S Q}. \quad (29.12)$$

Vidíme, že koncentraci n můžeme vyjádřit pomocí veličin, které lze přímo měřit.

Hallova jevu je také možno využít k přímému měření driftové rychlosti v_d nosičů náboje, která je, jak jsme již uvedli, řádově centimetry za hodinu. Tento nápaditý experiment je sestaven tak, že se kovový proužek pohybuje v magnetickém poli v opačném směru, než je směr driftové rychlosti nosičů náboje. Rychlost pohybujícího se proužku lze měnit tak, aby Hallovo napětí bylo právě rovno nule. Za tohoto stavu musí být rychlost nosičů náboje *vůči magnetickému poli* nulová. Rychlost proužku tedy musí být co do velikosti rovna driftové rychlosti nosičů záporného náboje (ale opačně orientovaná).

PŘÍKLAD 29.2

Na obr. 29.9 je kovová krychlička s délkou hrany $d = 1,5$ cm, která se pohybuje v kladném směru osy y konstantní rychlostí \mathbf{v} o velikosti $4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ v homogenním magnetickém poli s indukcí \mathbf{B} o velikosti $0,050 \text{ T}$ ve směru osy z .



Obr. 29.9 Příklad 29.2.

Kovová krychlička o délce hrany d se pohybuje konstantní rychlostí \mathbf{v} v homogenním magnetickém poli o indukcí \mathbf{B} .

(a) Která stěna bude mít díky pohybu krychličky elektrický potenciál vyšší a která nižší?

ŘEŠENÍ: Když se krychlička bude pohybovat v magnetickém poli, budou se její vodivostní elektrony pohybovat spolu s ní. Proto na ně bude působit magnetická síla \mathbf{F}_B daná rov. (29.2). Na obr. 29.9 působí síla \mathbf{F}_B v záporném směru osy x . To znamená, že některé elektrony budou vychýleny silou \mathbf{F}_B k (nezakreslené) levé stěně krychličky, čímž dojde k tomu, že tato stěna bude nabitá záporně, a tedy pravá stěna bude naopak kladná. Tím vznikne elektrické pole \mathbf{E} směřující od pravé stěny k levé, takže levá stěna bude mít nižší potenciál než stěna pravá.

(b) Určete napětí U mezi stěnami s vyšším a nižším potenciálem.

ŘEŠENÍ: Elektrické pole o intenzitě \mathbf{E} , které takto vzniklo, způsobí, že na elektrony bude působit elektrická síla \mathbf{F}_E orientovaná k pravé stěně krychličky (tedy opačně než magnetická síla \mathbf{F}_B). Rovnováhy, při níž $F_E = F_B$, bude dosaženo rychle poté, co se krychlička začne pohybovat v magnetickém poli. Z rov. (29.1) a (29.3) dostaneme

$$eE = evB.$$

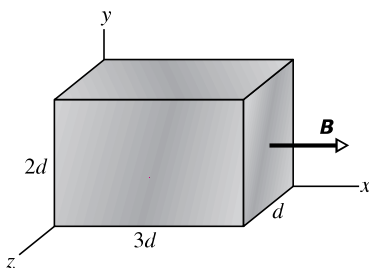
Po dosazení za E z rov. (29.9) ($U = Ed$) dostaneme

$$U = dvB. \quad (29.13)$$

Dosazením dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} U &= (0,015 \text{ m})(4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})(0,050 \text{ T}) = \\ &= 0,0030 \text{ V} = 3,0 \text{ mV}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

KONTROLA 3: Na obrázku je kovový kvádr, který se pohybuje rychlostí o velikosti v v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} . Jeho rozměry jsou celistvé násobky délky d , jak je vidět z obrázku. Máte šest možností pro výběr směru rychlosti kvádrů: může být rovnoběžná s osami x , y , nebo z , a mířit buď v jejich kladném, nebo záporném směru. (a) Seřadte sestupně oněch šest možností podle velikosti napětí, které vznikne mezi protilehlými stěnami. (b) Ve kterém případě má čelní stěna nižší potenciál?



29.5 POHYB NABITÉ ČÁSTICE PO KRUŽNICI

Pohybuje-li se částice rovnoměrně po kružnici, pak výsledná síla, která na ni působí, musí mít stálou velikost a musí být orientována do středu kružnice. Je tedy stále kolmá k rychlosti \mathbf{v} částice. Představme si kámen, upevněný na vlákně a obíhající rovnoměrně po kružnici ve vodorovné rovině, nebo družici, pohybující se po kruhové trajektorii kolem Země. V prvním případě vytváří tuto dostředivou sílu tah vlákna; ve druhém případě je to gravitační přitažlivá síla mezi Zemí a družicí.

Na obr. 29.10 je ukázán jiný příklad: svazek elektronů je vstřelován *elektronovým dělem* (ED) do měřicí komůrky. Elektrony do ní vlétají v rovině obrázku rychlostí \mathbf{v} a dostávají se do oblasti homogenního magnetického pole o indukci \mathbf{B} , která je kolmá k rovině obrázku a má směr k nám. Výsledkem je, že magnetická síla $\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ stále vychyluje elektrony, a protože vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} jsou na sebe stále kolmé, budou se elektrony pohybovat po kružnici. Stopu elektronů vidíme na fotografii, neboť atomy plynu v komůrce vyzářují světlo, kdykoli se s nimi některý z letících elektronů srazí.

Nyní určíme parametry, které charakterizují kruhový pohyb elektronů (nebo jakýchkoli jiných částic s nábojem o velikosti Q a hmotností m) pohybujících se kolmo ke směru homogenního magnetického pole \mathbf{B} rychlostí o velikosti v . Podle rov. (29.3) má síla působící na částici velikost QvB . Pro rovnoměrný pohyb po kružnici (rov. (6.20)) platí podle druhého Newtonova zákona

$$F = ma = \frac{mv^2}{r}, \quad (29.14)$$

odkud po dosazení za $F = QvB$ dostáváme

$$QvB = \frac{mv^2}{r}. \quad (29.15)$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit poloměr kružnice, po níž se částice pohybuje:

$$r = \frac{mv}{QB} \quad (\text{poloměr}). \quad (29.16)$$

Perioda T (tj. doba, potřebná pro jeden oběh) je rovna obvodu kružnice dělenému rychlostí částice, takže

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v} \frac{mv}{QB} = \frac{2\pi m}{QB} \quad (\text{perioda}). \quad (29.17)$$

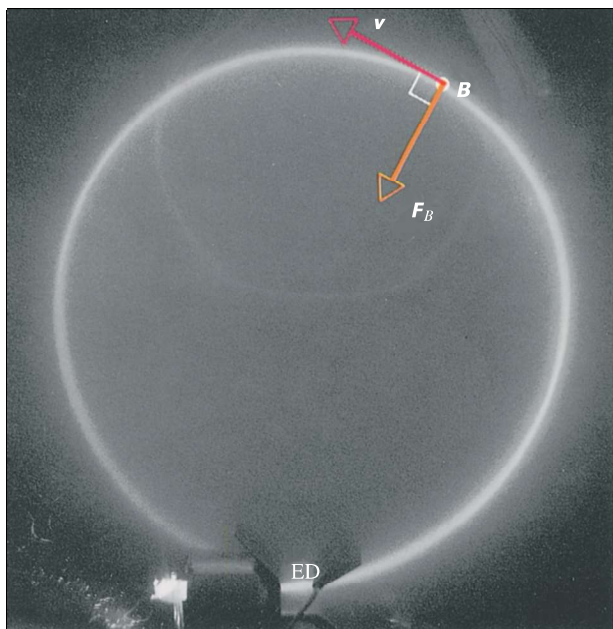
Frekvence f je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{QB}{2\pi m} \quad (\text{frekvence}). \quad (29.18)$$

Úhlová frekvence ω je tedy

$$\omega = 2\pi f = \frac{QB}{m} \quad (\text{úhlová frekvence}). \quad (29.19)$$

Vidíme, že veličiny T , f a ω nezávisí na velikosti rychlosti částice (za předpokladu, že její rychlost je mnohem menší, než je rychlost světla). Rychlé, resp. pomalé částice se pohybují po kružnicích o velkém, resp. malém poloměru, ale všechny částice se stejným poměrem Q/m potřebují stejnou dobu T (periodu) k vykonání jednoho oběhu. S využitím rov. (29.2) se můžeme přesvědčit o tom, že díváme-li se ve směru indukce \mathbf{B} , obíhá kladná částice vždycky v kladném směru (tj. proti směru otáčení hodinových ručiček), zatímco částice se záporným nábojem obíhá ve směru opačném.



Obr. 29.10 Elektrony obíhají v komůrce obsahující plyn za nízkého tlaku (stopa elektronů je kruhová). Magnetické pole \mathbf{B} , které je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám, je homogenní v celém objemu komůrky. Všimněte si radiálně působící magnetické síly \mathbf{F}_B : protože se částice pohybuje rovnoměrným pohybem po kružnici, síla \mathbf{F}_B míří stále do jejího středu. Použijte pravidla pravé ruky a přesvědčete se, že síla $\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ má příslušný směr.

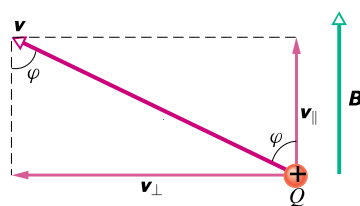
Trajektorie ve tvaru šroubovice

Ukážeme, že má-li nabitá částice letící v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} nenulovou složku rychlosti ve směru \mathbf{B} , bude se pohybovat po šroubovici s osou ve směru pole. Na obr. 29.11a je vektor rychlosti částice \mathbf{v} rozložen vzhledem ke směru \mathbf{B} do dvou průmětů — rovnoběžného \mathbf{v}_{\parallel} a kol-

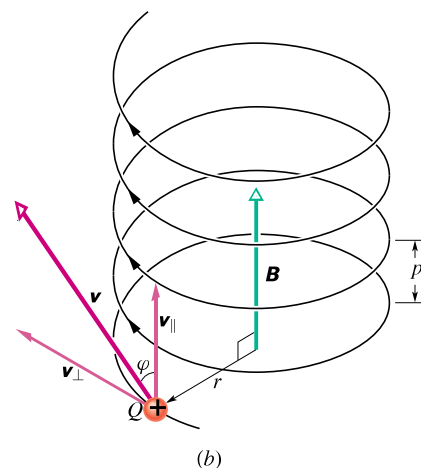
mého \mathbf{v}_{\perp} a platí

$$v_{\parallel} = v \cos \varphi \quad \text{a} \quad v_{\perp} = v \sin \varphi. \quad (29.20)$$

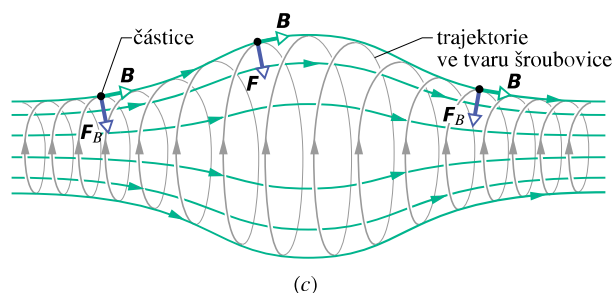
Rovnoběžná složka v_{\parallel} určuje *stoupání* p šroubovice, což je vzdálenost mezi dvěma sousedními závity (obr. 29.11b), a je rovno vzdálenosti, o kterou se částice posune za dobu jedné periody (jedné otočky) ve směru magnetické indukce \mathbf{B} . Kolmá složka v_{\perp} určuje poloměr šroubovice a je právě tou veličinou, kterou musíme dosadit do rov. (29.16) za v .



(a)



(b)



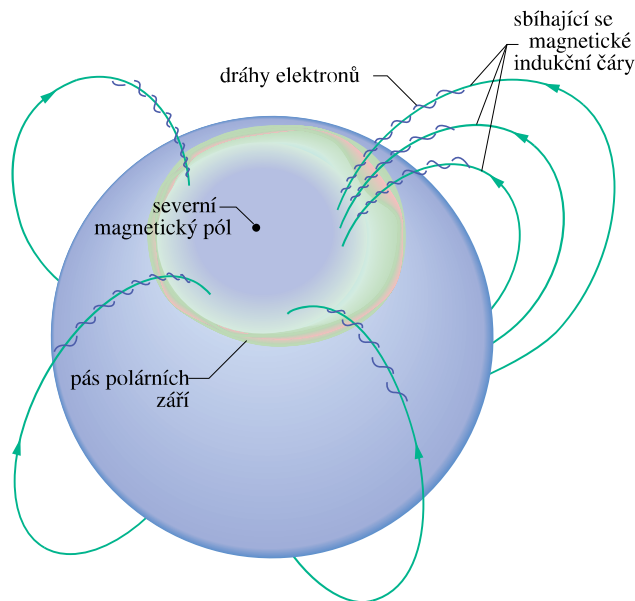
(c)

Obr. 29.11 (a) Nabitá částice se pohybuje v magnetickém poli tak, že její rychlost svírá úhel φ s vektorem magnetické indukce. (b) Částice se pohybuje po šroubovici, která má poloměr r a stoupání p . (c) Nabitá částice se pohybuje po šroubovici v nehomogenním magnetickém poli. (Létá tam a zpátky mezi konci, v nichž je magnetické pole dostatečně silné.) Všimněte si, že vektory magnetické síly na obou stranách magnetické pasti mají složku směřující do středu pasti.

Na obr. 29.11c je znázorněna nabitá částice pohybující se po šroubovici v nehomogenním magnetickém poli. Z větší hustoty indukčních čar na obou krajích je vidět, že magnetické pole je zde silnější. Je-li magnetické pole na konci trubice dostatečně silné, částice se od něj odrazí. Odráží-li se částice od obou konců, říkáme, že je zachycena v *magnetické pasti*, případně v *magnetické nádobě*.

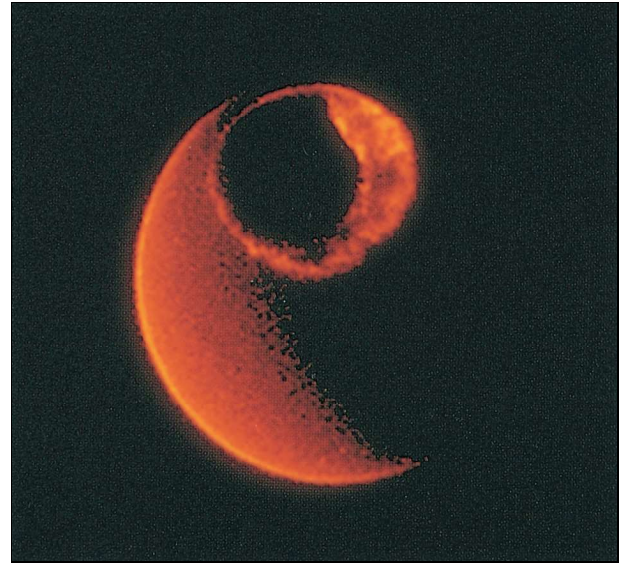
Magnetické pole Země takto zachytává elektrony a protony, a tak se vytvářejí *Van Allenovy radiační pásy* nad hranicí atmosféry mezi severním a jižním geomagnetickým pólem Země. Zachycené částice se odrážejí tam a zpět mezi oběma konci této magnetické pasti (trvá jim to zhruba několik sekund).

Když mohutná sluneční erupce vymrští velké množství elektronů a protonů s vysokými energiemi a ty doletí do Van Allenových radiačních pásů, vznikne v místech, kde se elektrony odrážejí, elektrické pole. Toto pole ruší odraz a žene elektrony dolů do atmosféry, kde se srážejí s atomy a molekulami kyslíku a dusíku a tím vyvolávají jejich záření. Tak vzniká *polární záře* — jev, připomínající svítící záclonu, která visí dolů a sahá až do výšky asi 100 km nad Zemí. Zelené světlo je emitováno atomy kyslíku a růžové světlo molekulami dusíku. Často je však světlo tak mdlé, že je vnímáme pouze jako bílé.



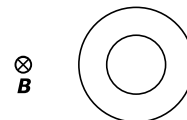
Obr. 29.12 Pás polárních září obklopující zemský magnetický severní pól (nachází se nyní na Kanadském ostrově Bathurst). Indukční čáry magnetického pole Země se sbíhají k tomuto pólu. Elektrony pohybující se směrem k Zemi jsou zachyceny a pohybují se po šroubovicích podél indukčních čar a ve vysokých výškách vstupují do zemské atmosféry vytvářejí polární záři (uvnitř prstence).

Polární záře se vyskytuje v určité oblasti — v prstenci obepínajícím Zemi, který nazýváme *pásem polárních září* (obr. 29.12 a 29.13). Ačkoli je tato oblast velmi dlouhá, nepřesahuje její tloušťka 1 km (od severu k jihu), protože dráhy elektronů, které ji vytvářejí, se sbíhají. Elektrony se totiž pohybují dolů po zužujících se šroubovicích navinutých na sbíhající se magnetické indukční čáry.



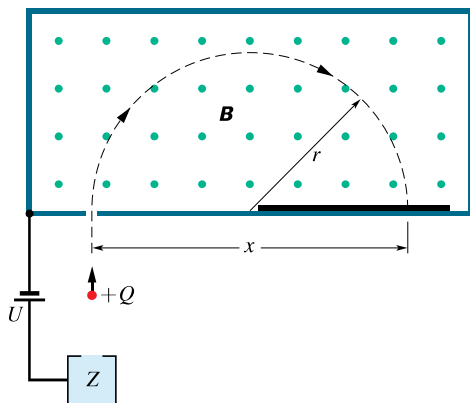
Obr. 29.13 Obrázek polární záře uvnitř severního pásu polárních září pořídila družice *Dynamic Explorer*, která využívá ultrafialového světla, emitovaného kyslíkovými atomy, jež jsou vybudeny v oblasti polární záře (obrázek je v „umělých barvách“). Sluneční světlo dopadající na Zemi tvoří půlměsíc v levé části obrázku.

KONTROLA 4: Na obrázku jsou kruhové stopy dvou částic pohybujících se stejnou rychlostí v homogenním magnetickém poli, jehož indukce \mathbf{B} je kolmá k rovině obrázku a směřuje od nás. Jednou z částic je proton a druhou elektron. (a) Která částice se pohybuje po kružnici s menším poloměrem? (b) Bude se tato částice pohybovat proti, nebo po směru otáčení hodinových ručiček?



PŘÍKLAD 29.3

Na obr. 29.14 je schematicky znázorněn princip *hmotnostního spektrometru*, který slouží k měření hmotností iontů: iont o hmotnosti m (která má být změřena) s nábojem Q vzniká ve zdroji Z a poté je urychlen elektrickým polem vytvořeným napětím U . Iont opustí zdroj Z a vletá štěrbinou do separační komory, ve které na něj působí homogenní magnetické pole \mathbf{B} , kolmé k jeho rychlosti (\mathbf{B} je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám). Magnetické pole způsobí, že se iont bude pohybovat po půlkružnici, dopadne na fotografickou desku ve vzdálenosti x od štěrbinu a exponuje ji tam. Nechť $B = 80,000 \text{ mT}$, $U = 1\,000,0 \text{ V}$ a $Q = +1,602\,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Iont dopadne ve vzdálenosti $x = 1,625\,4 \text{ m}$ od štěrbinu. Jaká je jeho hmotnost m , vyjádřená pomocí atomové hmotnostní jednotky ($u = 1,660\,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$)?



Obr. 29.14 Příklad 29.3. Podstata hmotnostního spektrometru. Kladný iont je emitován zdrojem Z a po urychlení napětím U vletá do komory nacházející se v homogenním magnetickém poli s indukci \mathbf{B} . Iont se bude vlivem magnetické síly pohybovat po půlkružnici o poloměru r a dopadne na fotografickou desku ve vzdálenosti x od štěrbinu, kterou do komory vletl.

ŘEŠENÍ: Nejdříve bude užitečné najít vztah mezi hmotností m iontu a naměřenou vzdáleností x . Z obr. 29.14 je patrné, že $x = 2r$, kde r je poloměr půlkružnice, po níž se pohybuje iont. Mezi poloměrem r a hmotností m platí jednoduchý vztah (29.16): $r = mv/QB$.

Dále je třeba zjistit souvislost mezi velikostí rychlosti v iontu a urychlujícím napětím U . Můžeme k tomu využít zákona zachování energie pro iont: jeho kinetická energie na konci procesu urychlování je rovna jeho potenciální energii QU na začátku urychlování. Tedy:

$$\frac{mv^2}{2} = QU$$

a

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}. \quad (29.21)$$

Dosadíme-li vypočtenou hodnotu v do rov. (29.16), dostaneme

$$r = \frac{mv}{QB} = \frac{m}{QB} \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{Q}},$$

tedy

$$x = 2r = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mU}{Q}}.$$

Odtud získáme hledanou hmotnost iontu:

$$\begin{aligned} m &= \frac{B^2 Q x^2}{8U} = \\ &= \frac{(0,080\,000 \text{ T})^2 (1,602\,2 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (1,625\,4 \text{ m})^2}{8(1\,000,0 \text{ V})} = \\ &= 3,386\,3 \cdot 10^{-25} \text{ kg} = 203,93 \text{ u}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 29.4

Elektron s kinetickou energií $22,5 \text{ eV}$ vletá do oblasti magnetického pole o velikosti $B = 4,55 \cdot 10^{-4} \text{ T}$. Úhel mezi indukcí \mathbf{B} a rychlostí elektronu \mathbf{v} je $65,5^\circ$. Jaké bude stoupání šroubovice, po níž se pohybuje elektron?

ŘEŠENÍ: Jak jsme již uvedli, je stoupání p vzdálenost, o kterou se elektron posune za dobu jedné periody T ve směru vektoru magnetické indukce \mathbf{B} . Tato vzdálenost je $v_{\parallel} T$, kde v_{\parallel} je složka rychlosti elektronu do směru \mathbf{B} . Vyjdeme-li z rov. (29.20) a (29.17), dostaneme

$$p = v_{\parallel} T = v \cos \varphi \frac{2\pi m}{QB}. \quad (29.22)$$

Velikost rychlosti elektronu v můžeme vypočítat z jeho kinetické energie stejně jako v případě protonu (příklad 29.1). (Kinetická energie $22,5 \text{ eV}$ je mnohem menší než klidová energie elektronu, která je $5,11 \cdot 10^5 \text{ eV}$, takže nemusíme použít relativistického vzorce pro kinetickou energii elektronu.) Vypočteme, že $v = 2,81 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, a po dosazení do rov. (29.22) dostaneme

$$\begin{aligned} p &= (2,81 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}) (\cos 65,5^\circ) \cdot \\ &\cdot \frac{2\pi (9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}) (4,55 \cdot 10^{-4} \text{ T})} = \\ &= 9,16 \text{ cm}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

29.6 CYKLOTRONY A SYNCHROTRONY

Otázka struktury hmoty zajímala fyziky odedávna. Jeden ze způsobů, jak získat odpověď na tuto otázku, spočívá

v tom, že necháme urychlenou nabitou částici (např. proton) dopadnout na pevný terčik. Ještě výhodnější je sestavit experiment tak, aby se mohly dva velmi urychlené protony čelně srazit. Potom můžeme z rozboru zbytků po takových srážkách poznávat vlastnosti subatomových částic hmoty. Nobelovy ceny za fyziku v roce 1976 a 1984 byly uděleny právě za takové studie.

Jak můžeme udělit protonu dostatečnou kinetickou energii? Přímý a nejjednodušší způsob spočívá v tom, že necháme částici (např. proton) s nábojem Q prolétnout mezi místy s potenciálovým rozdílem U , což zvýší její kinetickou energii o hodnotu QU . Chceme-li však získávat stále větší energii, čekají nás stále větší těžkosti při vytváření potřebného napětí U .

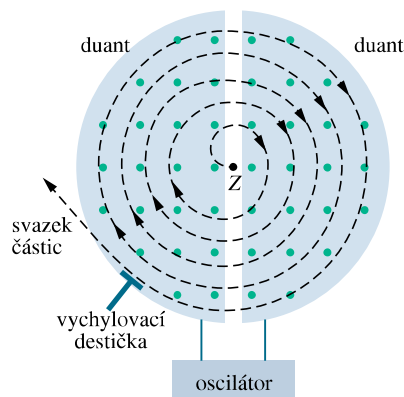
Lépe je sestavit experiment tak, aby proton obíhal po kružnici v magnetickém poli, a dodávat mu elektrickým polem malý impuls („postrčení“) při každé otočce. Otočí-li se například proton stokrát v magnetickém poli a získá-li přírůstek energie 100 keV při každém oběhu, bude končit svoje urychlování s kinetickou energií 10 MeV. Na tomto principu jsou založena dvě velmi užitečná zařízení.

Cyklotron

Obr. 29.15 znázorňuje pohled shora na **cyklotron**, ve kterém obíhají nabitě částice (například protony). Dva duté půlválce ve tvaru písmene D, otevřené na rovné straně, jsou vyrobeny z neferomagnetického, elektricky vodivého materiálu (např. měděných plechů) a nacházejí se v ploché vakuové komoře. Tyto tzv. duanty jsou částí elektrického oscilátoru, který vytváří střídavé napětí ve štěrbině mezi nimi. Celá komora i s duanty se nachází mezi rozsáhlými póly (o průměru až několika metry) silného elektromagnetu (např. $B = 1,5$ T). Na obr. 29.15 je pole kolmé k rovině obrázku a má směr k nám.

Předpokládáme, že proton, který vylétl ze zdroje Z ve středu cyklotronu, se zpočátku pohybuje směrem k záporně nabitému levému duantu. Jeho pohyb bude zrychlený. Když ale vletí dovnitř, nebude na něj působit elektrické pole, neboť prostor v duantu je proti elektrickému poli stíněn. Magnetické pole však není duantem odstíněno, neboť měď je diamagnetická (viz kap. 32), takže proton se bude v duantu pohybovat po kruhové trajektorii, jejíž poloměr (závislý na rychlosti) je dán rov. (29.16), tj. má velikost $r = mv/QB$.

Během doby, kdy proton letí uvnitř levého duantu, změníme polaritu napětí mezi oběma duanty. Proton tedy bude mít *opět* před sebou záporně nabitý duant a bude znovu urychlován. Tento proces pokračuje, obíhající proton stále drží krok s oscilacemi napětí mezi duanty, dokud se nedostane po spirálovité trajektorii k okraji duantu a nevyletí ven z cyklotronu.



Obr. 29.15 Schematické znázornění cyklotronu se zdrojem částic Z a oběma duanty. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám. Protony obíhají po spirálovité trajektorii a získávají energii pokaždé, když procházejí štěrbinou mezi duanty.

Aby cyklotron takto úspěšně urychloval protony, musí být frekvence f , se kterou proton obíhá v magnetickém poli (a která podle rov. (29.18) *nezávisí* na jeho rychlosti), rovna frekvenci f_{osc} elektrického oscilátoru, čili musí platit

$$f = f_{\text{osc}} \quad (\text{rezonanční podmínka}). \quad (29.23)$$

Má-li totiž energie obíhajícího protonu vzrůstat, musí být frekvence f_{osc} jednotlivých „postrčení“ rovna frekvenci, se kterou proton obíhá v magnetickém poli.

Zkombinujeme-li rov. (29.18) a (29.23), můžeme napsat rezonanční podmínku ve tvaru

$$QB = 2\pi m f_{\text{osc}}. \quad (29.24)$$

Náboj Q je vždy konstantní. V nerelativistickém případě je konstantní i hmotnost m částice. Oscilátor pracuje na jediné pevné frekvenci f_{osc} . Cyklotron potom ladíme pomocí změny B , dokud není splněna rov. (29.24) a neobjeví se svazek urychlených protonů.

Protonový synchrotron

Pokud mají protony energii vyšší než cca 50 MeV, začínají klasické cyklotrony selhávat z principiálních důvodů. Základním předpokladem pro činnost cyklotronu je totiž nezávislost frekvence obíhání nabitě částice na její rychlosti. To ale platí pouze pro rychlosti mnohem menší, než je rychlost světla. Pokud částice dosahují velkých rychlostí, musíme považovat problém za relativistický.

Z teorie relativity plyne, že obíhající nabitá částice, jejíž rychlost se blíží rychlosti světla, má hmotnost větší, než když byla v klidu. Podle rov. (29.24) tedy potřebuje stále

delší dobu k vykonání jednoho oběhu a její frekvence obíhání postupně klesá. Velmi rychlé protony tedy „vypadnou z rytmu“ frekvence cyklotronového oscilátoru (která je, jak již bylo uvedeno, konstantní). Nakonec přestane energie urychlovaného protonu růst.

Existuje však ještě další problém. Chceme-li například, aby proton získal energii 500 GeV v magnetickém poli o indukcii 1,5 T, musel by se pohybovat po kruhové dráze o poloměru 1,1 km. Magnet konvenčního cyklotronu, který by protony urychloval na tuto energii, by byl neúnosně drahý, plocha jeho pólových nástavců by musela být velmi rozsáhlá, asi $4 \cdot 10^6 \text{ m}^2$.

Protonový synchrotron je založen na principu, který odstraňuje obě tyto nevýhody. Velikost indukce B magnetického pole ani frekvence oscilátoru f_{osc} nejsou v tomto případě konstantní, jako tomu je u konvenčního cyklotronu. Synchrotron je navržen tak, aby se obě veličiny mohly během urychlovacího cyklu s časem měnit, což způsobí, že (1) frekvence obíhajícího protonu zůstává v rezonanci s oscilátorem po celou dobu urychlování, (2) protony se pohybují po kruhové trajektorii (a nikoli po spirále, jako tomu bylo v případě cyklotronu). Potom stačí, aby se magnetické pole nacházelo pouze podél této kružnice a nikoli na celé ploše kruhu (o obsahu např. $4 \cdot 10^6 \text{ m}^2$). Kružnice však musí mít velký poloměr, má-li být dosaženo vysokých energií. Protonový synchrotron ve Fermiho národní laboratoři urychlovačů (Fermilab) v Illinois (obr. 29.16) má obvod 6,3 km a může produkovat protony s energií přibližně $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$.



Obr. 29.16 Letecký pohled na Fermilab

PŘÍKLAD 29.5

Předpokládejme, že cyklotron pracuje s frekvencí oscilátoru 12 MHz a má poloměr duantu $R = 53 \text{ cm}$.

(a) Jak silné magnetické pole je potřeba k tomu, aby mohly být v tomto cyklotronu urychlovány deuterony?

ŘEŠENÍ: Deuteron má stejný náboj jako proton, ale asi dvakrát větší hmotnost ($m \doteq 3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$). Na základě rov. (29.24) můžeme psát

$$B = 2\pi m \frac{f_{\text{osc}}}{Q} = \frac{2\pi(3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(12 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1})}{(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})} = 1,57 \text{ T} \doteq 1,6 \text{ T.} \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že chceme-li urychlit protony, musí být magnetická indukce asi dvakrát menší při téže frekvenci oscilátoru 12 MHz.

(b) Jaká je výsledná kinetická energie deuteronu?

ŘEŠENÍ: Z rov. (29.16) vypočteme rychlost deuteronu na kruhové dráze o poloměru R :

$$v = \frac{RQB}{m} = \frac{(0,53 \text{ m})(1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1,57 \text{ T})}{(3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg})} = 3,99 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Této rychlosti odpovídá kinetická energie

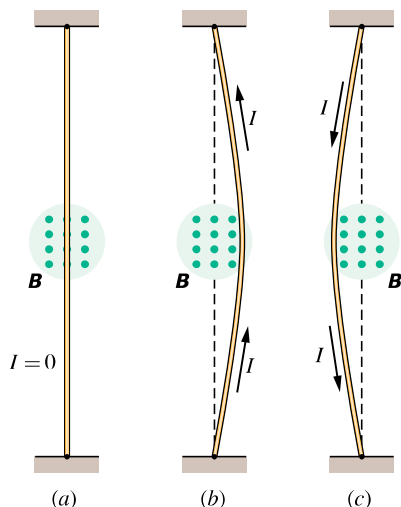
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(3,99 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2 \cdot \left(\frac{1 \text{ MeV}}{1,60 \cdot 10^{-13} \text{ J}} \right) = 16,6 \text{ MeV} \doteq 17 \text{ MeV.} \quad (\text{Odpověď})$$

29.7 AMPÉROVA SÍLA

Při výkladu Hallova jevu jsme ukázali, že magnetické pole působí „boční“ silou na pohybující se elektrony ve vodiči. Protože vodivostní elektrony nemohou vodič opustit, přenáší se tato síla na samotný vodič.

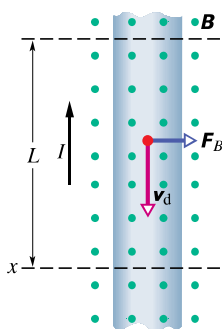
Na obr. 29.17a je svisle umístěný ohebný vodič, jímž protéká elektrický proud. Vodič je na obou koncích upevněn a nachází se mezi pólovými nástavci magnetu, jehož magnetické pole je kolmé k rovině obrázku a směřuje k nám. Na obr. 29.17b protéká proud vodičem směrem nahoru: vodič je vychylován směrem doprava. Na obr. 29.17c je obrácen směr proudu a vodič se vychyluje doleva.

Na obr. 29.18 je znázorněn malý úsek vodičů z obrázku 29.17. Sledujme jeden z vodivostních elektronů, pohybující se driftovou rychlostí v_d směrem dolů. Podle



Obr. 29.17 Na obrázku je ohebný vodič, umístěný mezi pólovými nastavci magnetu. (a) Neprotéká-li vodičem proud, je vodič rovný. (b) Teče-li vodičem proud směrem nahoru, prohne se doprava. (c) Teče-li vodičem proud směrem dolů, prohne se doleva. Kontakty pro přívod proudu na obou koncích vodiče nejsou zakresleny.

rov. (29.3) pro $\varphi = 90^\circ$ zjistíme, že na něj bude působit síla F_B o velikosti Qv_dB . Z rov. (29.2) plyne, že tato síla směřuje doprava, takže můžeme očekávat, že na vodič jako celek bude působit síla směrem doprava (v souladu s obr. 29.17b).



Obr. 29.18 Detailnější pohled na úsek vodiče z obr. 29.17b. Elektrický proud teče směrem nahoru, což znamená, že elektrony se pohybují driftovým pohybem směrem dolů. Magnetické pole, kolmé na rovinu obrázku, má směr k nám a způsobuje, že elektrony i s vodičem jsou vychýleny směrem doprava.

Jestliže bychom na obr. 29.18 obrátili *buď* směr magnetického pole, *nebo* směr elektrického proudu, změnil by se směr síly působící na vodič a ta by směřovala nyní doleva. Všimněte si, že výsledek nezáleží na tom, zda uvažujeme záporné náboje, pohybující se ve vodiči směrem dolů (případ demonstrováný na obrázku), nebo kladné náboje,

pohybující se směrem nahoru. Směr vychylující síly, působící na vodič, je týž. Neuděláme tedy chybu, budeme-li se držet dohodnutého směru proudu, který odpovídá pohybu kladných nosičů náboje.

Uvažujme úsek přímého vodiče na obr. 29.18. Vodičovní elektrony v tomto úseku vodiče se budou pohybovat driftovou rychlostí dolů kolmo k řezu x po dobu $t = L/v_d$. Za tuto dobu projde řezem náboj

$$Q = It = \frac{IL}{v_d}.$$

Dosadíme-li tento výsledek do rov. (29.3), dostaneme

$$F_B = Qv_dB \sin \varphi = \frac{IL}{v_d}v_dB \sin 90^\circ,$$

odkud

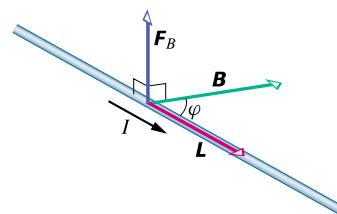
$$F_B = ILB. \quad (29.25)$$

Tato rovnice určuje sílu, kterou působí magnetické pole o indukci B na úsek přímého vodiče délky L protékný proudem I a ležícím v rovině kolmé k B .

Jestliže magnetické pole není kolmé k vodiči (obrázek 29.19), bude magnetická síla dána zobecněním rovnice (29.25). S užitím vektorů dostáváme vztah

$$F_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B} \quad (\text{síla působící na vodič protékný proudem}), \quad (29.26)$$

kteří je v souladu s rov. (29.2). Vektor *délky* \mathbf{L} má směr totožný se směrem proudu. Rov. (29.26) je ekvivalentní s rov. (29.2) v tom smyslu, že kterákoli z nich může být chápána jako definiční vztah pro indukci magnetického pole \mathbf{B} . V normě a v metrologii však definujeme magnetickou indukci \mathbf{B} pomocí rov. (29.26), neboť je mnohem snadnější měřit magnetickou sílu působící na vodič s proudem než sílu působící na osamělou pohybující se nabitou částici.



Obr. 29.19 Přímým vodičem délky L protéká proud I . Vodiči přiřadíme vektor \mathbf{L} ve směru proudu. Svírá-li \mathbf{L} úhel φ se směrem magnetické indukce \mathbf{B} , pak na vodič působí Ampérova síla $F_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$.

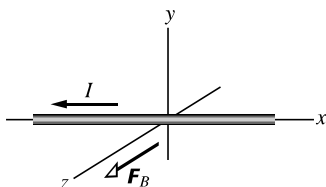
Není-li vodič přímý, můžeme jej myšleně rozdělit na infinitezimální délkové elementy $d\mathbf{s}$ a použít rov. (29.26)

pro každý z nich:

$$d\mathbf{F}_B = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \quad (29.27)$$

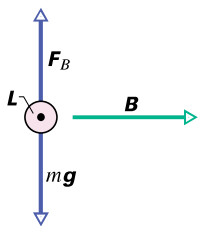
Výslednou sílu působící na proudovodič libovolného tvaru, můžeme získat integrací rov. (29.27). Sílu vyjádřenou rov. (29.26), resp. (29.27) nazýváme *Ampérova síla*.

KONTROLA 5: Na obrázku je zakreslen vodič protékáný proudem I , nacházející se v magnetickém poli \mathbf{B} , a Ampérova síla \mathbf{F}_B působící na vodič. Magnetické pole je orientováno tak, že síla je maximální. Jaký směr má magnetická indukce?



PŘÍKLAD 29.6

Přímým vodorovným měděným vodičem protéká proud $I = 28$ A. Určete magnetickou indukci \mathbf{B} , jejíž velikost bude mít minimální hodnotu potřebnou k tomu, aby se vodič vznášel, tj. k tomu, aby tíhová síla byla vykompenzována Ampérovou silou? Délková hustota vodiče je $46,6 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.



Obr. 29.20 Příklad 29.6. Vodič protékáný proudem (znázorněn průřez) se může vznášet — „levitovat“ — v magnetickém poli. Proud ve vodiči je kolmý k rovině obrázku a teče směrem k nám; magnetická indukce má směr doprava.

ŘEŠENÍ: Na obr. 29.20 je znázorněna situace pro úsek vodiče délky L , kterým protéká proud kolmo k rovině obrázku směrem k nám. Zadání splňuje vektor magnetické indukce, který leží ve vodorovné rovině, je kolmý k vodiči a míří doprava.

Aby byla Ampérova síla v rovnováze s tíhovou silou působící na úsek vodiče, musí platit $F_B = mg$, kde m je hmotnost tohoto úseku. Po dosazení za F_B z rov. (29.25) dostaneme

$$ILB = mg$$

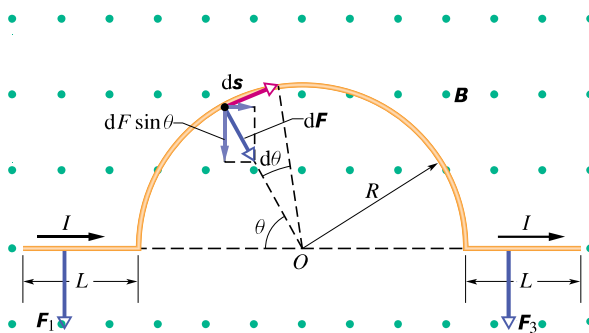
a odtud

$$B = \frac{(m/L)g}{I} = \frac{(46,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1})(9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2})}{28 \text{ A}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ T}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tato hodnota je asi 160krát větší než velikost indukce magnetického pole Země.

PŘÍKLAD 29.7

Na obr. 29.21 je vodič, jehož střední část má tvar půlkružnice. Celý vodič se nachází v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} , které je kolmé k rovině obrázku a míří k nám. Jaká výsledná Ampérova síla \mathbf{F} působí na tento vodič, protéká-li jím proud I ?



Obr. 29.21 Příklad 29.7. Úsek vodiče s proudem I se nachází v magnetickém poli. Výsledná Ampérova síla, která na něj působí, směřuje dolů.

ŘEŠENÍ: Síla, která působí na každý ze dvou přímých úseků vodiče, má velikost danou rov. (29.25)

$$F_1 = F_3 = ILB$$

a směřuje dolů, jak ukazují vektory sil \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_3 na obr. 29.21.

Na infinitezimální délkový element $d\mathbf{s}$ centrálního oblouku působí podle rov. (29.27) síla $d\mathbf{F}$, jejíž velikost je

$$dF = IB ds = IB(R d\theta)$$

a která směřuje radiálně k bodu O , tj. ke středu oblouku. Ve výsledné síle se projeví pouze složka síly $dF \sin \varphi$ působící dolů. Vodorovná složka této síly se vylučuje s vodorovnou složkou síly, která působí na element oblouku symetricky položený (vzhledem k ose symetrie půlkružnice).

Celková síla působící na půlkružnici směřuje dolů a má velikost

$$F_2 = \int_0^\pi dF \sin \theta = \int_0^\pi (IBR d\theta) \sin \theta = IBR \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2IBR.$$

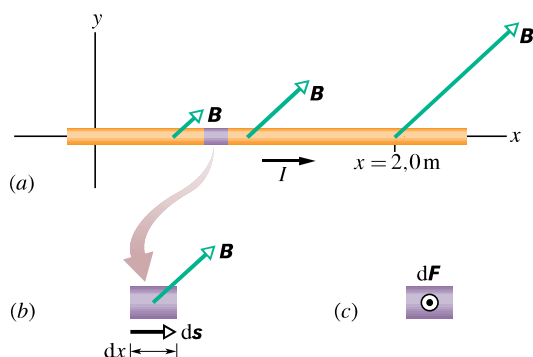
Výsledná síla působící na celý vodič, je potom

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = ILB + 2IBR + ILB = 2IB(L + R). \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že tato síla je rovna síle, která by působila na přímý vodič délky $2(L + R)$. Lze dokázat, že to platí bez ohledu na to, jaký tvar má střední část vodiče.

PŘÍKLAD 29.8

Na obr. 29.22a je vodič, kterým protéká proud $I = 6,0 \text{ A}$ v kladném směru osy x . Vodič se nachází v nehomogenním magnetickém poli charakterizovaném vektorem magnetické indukce $\mathbf{B} = (2,0x\mathbf{i} + 2,0x\mathbf{j}) \text{ T}\cdot\text{m}^{-1}$, kde \mathbf{B} i x jsou vyjádřeny v jednotkách SI. Určete Ampérovu sílu \mathbf{F}_B působící na úsek vodiče ohraničený souřadnicemi $x = 0$ a $x = 2,0 \text{ m}$.



Obr. 29.22 Příklad 29.8. (a) Vodič protékáný proudem I se nachází v nehomogenním magnetickém poli \mathbf{B} . (b) Infinitesimální délkový element $d\mathbf{s}$ o velikosti dx . (c) Síla $d\mathbf{F}$ působící na element definovaný v (b) způsobená magnetickým polem. Tato síla je kolmá k rovině obrázku a má směr k nám.

ŘEŠENÍ: Poněvadž magnetické pole podél vodiče je nehomogenní, musíme rozdělit vodič na infinitesimální úseky a potom použít rov. (29.27) k určení síly $d\mathbf{F}_B$, která působí na každý takový úsek. Nakonec sečteme (integrací) síly $d\mathbf{F}_B$ a najdeme tím celkovou Ampérovu sílu \mathbf{F}_B působící na celý úsek vodiče.

Na obr. 29.22b je infinitesimální délkový element $d\mathbf{s}$ vodiče. Tento vektor má délku dx a směr elektrického proudu (tj. kladný směr osy x). Můžeme ho tedy napsat ve tvaru

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i}. \quad (29.28)$$

Podle rov. (29.27) je síla $d\mathbf{F}_B$ působící na element dx vodiče rovna

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_B &= I d\mathbf{s} \times \mathbf{B} = \\ &= I(dx\mathbf{i}) \times (2,0x\mathbf{i} + 2,0x\mathbf{j}) = \\ &= I dx(2,0x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + 2,0x(\mathbf{i} \times \mathbf{j})) = \\ &= I dx(0 + 2,0x\mathbf{k}) = 2,0Ix dx\mathbf{k}, \end{aligned} \quad (29.29)$$

kde konstantě 2,0 přísluší jednotka tesla na metr. Z tohoto výsledku vidíme, že magnetická síla nezávisí na x -ové složce

vektoru \mathbf{B} (neboť tato složka má stejný směr jako proud). Rovněž vidíme, že magnetická síla $d\mathbf{F}_B$, působící na element dx vodiče, má směr rovnoběžný s kladným směrem osy z (na obr. 29.22c směrem k nám) a její velikost je $dF_B = (2,0Ix dx) \text{ T}\cdot\text{m}^{-1}$.

Poněvadž směr síly $d\mathbf{F}_B$ je stejný pro všechny elementy dx vodiče, můžeme najít velikost celkové síly sečtením velikostí všech sil dF_B od $x = 0$ po $x = 2,0 \text{ m}$:

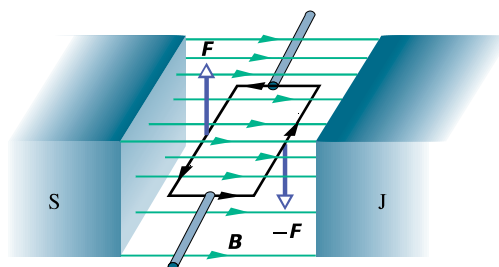
$$\begin{aligned} F_B &= \int dF_B = \int_0^{2,0} (2,0 \text{ T}\cdot\text{m}^{-1})Ix dx = \\ &= (2,0 \text{ T}\cdot\text{m}^{-1})I \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^{2,0} = \\ &= (2,0 \text{ T}\cdot\text{m}^{-1})(6,0 \text{ A})\left(\frac{1}{2}\right)(2,0 \text{ m})^2 = 24(\text{T}\cdot\text{A}\cdot\text{m}) = \\ &= 24 \text{ N}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Tato síla má směr kladné osy z .

29.8 MOMENT SÍLY PŮSOBÍCÍ NA PROUDOVOU SMYČKU

Průmysl všech zemí světa využívá práci elektrických motorů. Síly, které konají tuto práci, jsou síly, kterými magnetické pole působí na vodič protékáný proudem, které jsme studovali v předcházejícím odstavci.

Na obr. 29.23 je znázorněn princip jednoduchého elektromotoru, skládajícího se ze smyčky protékáné proudem (proudové smyčky) umístěné v magnetickém poli o indukci \mathbf{B} . Na smyčce působí dvě magnetické síly \mathbf{F} a $-\mathbf{F}$ tak, že vytvářejí silový moment, který způsobí otáčení smyčky. Třebaže jsme vynechali mnoho podstatných konstrukčních detailů, vysvětluje obrázek dostatečně dobře působení magnetického pole na proudovou smyčku. Rozeberme je podrobněji.



Obr. 29.23 Základní prvky elektrického motoru. Pravoúhlá smyčka protékáná proudem, volně otáčivá kolem pevné osy, se nachází v magnetickém poli. Komutátor (není zakreslen) mění směr proudu každou polovinu otáčky, takže silový moment má vždy tentýž směr.

Na obr. 29.24a je (nedeformovatelná) obdélníková smyčka se stranami a a b , kterou protéká proud I a která se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} . Umístíme ji tak, že její delší strany, označené 1 a 3, jsou vždy kolmé ke směru pole (které je kolmé k rovině obrázku a směřuje od nás), na rozdíl od krátkých stran, označených 2 a 4, které v obecné poloze nejsou k poli kolmé. Vodiče, přivádějící proud do smyčky a ven z ní, jsou ovšem nutné, ale pro přehlednost nejsou na obrázku zakresleny.

Abychom mohli popsat orientaci smyčky v magnetickém poli, zavádíme vektor normály \mathbf{n} , který je kolmý k ploše smyčky. Obr. 29.24b ukazuje použití pravidla pravé ruky k určení směru \mathbf{n} : orientujeme-li ohnuté prsty pravé ruky ve směru elektrického proudu ve smyčce, ukáže vztyčený palec potom směr vektoru \mathbf{n} .

Nechť vektor \mathbf{n} smyčky svírá úhel θ s vektorem magnetické indukce \mathbf{B} (obr. 29.24c). Nalezneme celkovou sílu a celkový moment sil působících na smyčku v této poloze.

Výsledná síla je rovna vektorovému součtu sil působících na každou ze čtyř stran smyčky. V případě strany 2 má vektor \mathbf{L} , vystupující v rov. (29.26), směr proudu a jeho velikost je b . Úhel mezi vektory \mathbf{L} a \mathbf{B} pro stranu 2 je $90^\circ - \theta$ (obr. 29.24c). Velikost síly působící na tuto stranu je

$$F_2 = IbB \sin(90^\circ - \theta) = IbB \cos \theta. \quad (29.30)$$

Snadno se přesvědčíme o tom, že síla \mathbf{F}_4 , působící na stranu 4, má stejnou velikost jako síla \mathbf{F}_2 , ale opačný směr. Síly \mathbf{F}_2 a \mathbf{F}_4 se tedy vruší. Jejich výslednice je nulová. A protože spojnice jejich působišť leží v ose smyčky, bude jejich výsledný silový moment rovněž nulový.

Situace je odlišná pro strany 1 a 3. Pro ně je velikost obou sil \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_3 rovna IaB , směry však mají opačné, takže nemohou uvést smyčku do posuvného pohybu

nahoru nebo dolů. Avšak, jak je ukázáno na obr. 29.24c, *neleží* tyto dvě síly na společné přímce, takže vytvářejí nenulový výsledný moment sil. Tento moment se snaží otočit smyčku tak, aby normálový vektor \mathbf{n} měl směr magnetické indukce \mathbf{B} . Rameno každé ze sil vůči ose otáčení je $(b/2) \sin \theta$, a tedy velikost výsledného momentu M' obou sil \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_3 je (obr. 29.24c)

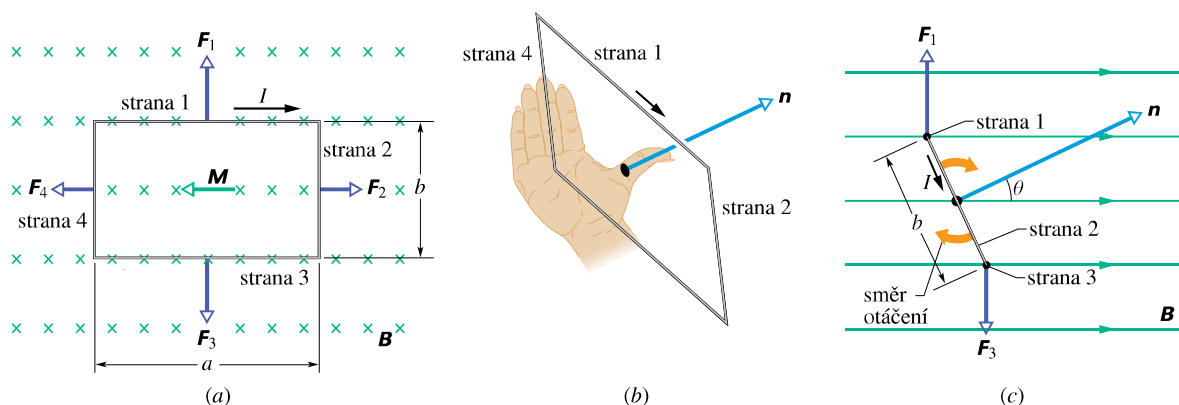
$$\begin{aligned} M' &= \left(IaB \frac{b}{2} \sin \theta \right) + \left(IaB \frac{b}{2} \sin \theta \right) = \\ &= IabB \sin \theta. \end{aligned}$$

Nyní nahradíme jednu smyčku *cívkou*, složenou z N smyček neboli *závitů*. Dále předpokládejme, že závity jsou vinuty dostatečně těsně k sobě, takže je můžeme chápat tak, jako by měly tentýž rozměr a ležely v jedné rovině. Potom říkáme, že tvoří *plochu cívky*. Na každý ze závitů působí moment M' , takže celkový moment působící na plochu cívky je

$$M = NM' = NIabB \sin \theta = (NIS)B \sin \theta, \quad (29.31)$$

kde $S = ab$ je obsah plochy ohraničené jedním závitkem cívky. Veličiny v závorkách (NIS) jsme záměrně zařadili k sobě, neboť všechny charakterizují vlastnosti cívky; je to počet závitů, proud tekoucí cívkou a obsah plochy jednoho závitu. Dá se ukázat, že rov. (29.31) platí pro všechny ploché cívky bez ohledu na jejich tvar za předpokladu, že magnetické pole je homogenní.

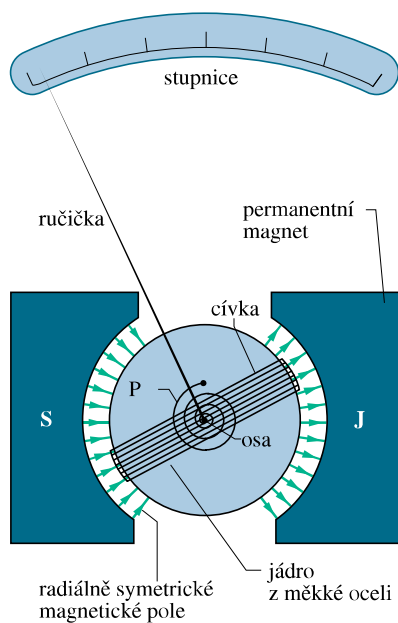
Zajímavé je sledovat pohyb vektoru \mathbf{n} , který má podle pravidla pravé ruky směr normály k rovině cívky. Z rov. (29.31) plyne, že magnetické pole bude plochou cívky protékanou proudem stáčet do polohy, ve které bude vektor \mathbf{n} souhlasně rovnoběžný se směrem magnetické indukce pole.



Obr. 29.24 Obdélníková smyčka o délce a a šířce b , kterou protéká proud I , se nachází v homogenním magnetickém poli. Moment síly \mathbf{M} se snaží otočit normálový vektor \mathbf{n} do směru magnetického pole. (a) Smyčka, jak ji vidíme ze směru magnetického pole. (b) Pohled na smyčku z perspektivy. Je ukázáno použití pravidla pravé ruky, pomocí něhož lze stanovit směr \mathbf{n} : je kolmý na plochu smyčky. (c) Boční pohled na smyčku. Smyčka rotuje tak, jak je ukázáno na obrázku.

PŘÍKLAD 29.9

Analogové voltmetry a ampérmetry pracují tak, že měří silový moment, kterým působí magnetické pole na cívku protékající proudem. Ručička přístroje ukazuje na stupnici výsledek. Na obr. 29.25 je znázorněna podstata *galvanometru*, který je základem většiny analogových ampérmetrů a voltmetrů. Uvažovaná cívka je 2,1 cm vysoká a 1,2 cm široká, má 250 závitů a může se otáčet kolem osy kolmé k rovině obrázku v magnetickém poli o velikosti $B = 0,23 \text{ T}$, které je v rovině obrázku radiálně symetrické. Díky jádru je magnetické pole ve šterbině kolmé k normálovému vektoru roviny cívky, ať je cívka natočena jakkoli. Pružina P působí silou, jejíž moment vyrovnává moment magnetické síly, takže stejnosměrnému proudu I v cívce odpovídá jednoznačně určitá úhlová výchylka φ . Nechť proud $100 \mu\text{A}$ způsobí úhlovou výchylku 28° . Jaká musí být torzní tuhost k_t pružiny, vystupující v rov. (16.24) ($M = -k_t\varphi$)?



Obr. 29.25 Příklad 29.9. Základní součásti, z nichž se skládá galvanometr. Podle potřeby jej lze konstrukčně upravit na ampérmetr nebo voltmetr.

ŘEŠENÍ: Položíme-li velikost momentu magnetické síly z rov. (29.31) rovnu velikosti silového momentu vyvolaného pružinou, dostaneme

$$N I S B \sin \theta = k_t \varphi, \quad (29.32)$$

ve kterém je φ úhlová výchylka cívky, resp. ručičky, a $S = 2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ je průřez cívky. Protože výsledné magnetické pole procházející cívkou je vždy kolmé k normálovému vektoru cívky, je $\theta = 90^\circ$.

Z rov. (29.32) dostaneme

$$\begin{aligned} k_t &= N I S B \frac{\sin \theta}{\varphi} = \\ &= (250)(100 \cdot 10^{-6} \text{ A})(2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{(0,23 \text{ T})(\sin 90^\circ)}{(28^\circ)(2\pi/360^\circ)} = \\ &= 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

Moderní ampérmetry a voltmetry jsou ovšem většinou přístroje digitální s přímým čtením hodnoty měřené veličiny a pracují na jiném principu, který nepoužívá otáčivé cívky.

29.9 MAGNETICKÝ DIPÓL

Cívku protékající proudem, s níž jsme se setkali v předcházejícím článku, můžeme charakterizovat pomocí jejího **magnetického dipólového momentu** μ . Směr μ je stejný jako je směr normálového vektoru \mathbf{n} k ploše cívky (obr. 29.24c). Velikost μ definujeme vztahem:

$$\mu = N I S \quad (\text{magnetický dipólový moment}). \quad (29.33)$$

Rov. (29.31) pak můžeme zapsat ve tvaru

$$M = \mu B \sin \theta, \quad (29.34)$$

kde θ je úhel mezi vektory μ a \mathbf{B} .

To vše lze vystihnout vektorovým zápisem

$$\mathbf{M} = \mu \times \mathbf{B}, \quad (29.35)$$

což velmi připomíná podobný vztah pro moment síly, kterým působí *elektrické* pole na *elektrický* dipól, tj. rov. (23.34):

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Obecně lze říci, že silový moment způsobený vnějším polem — ať už elektrickým nebo magnetickým — je roven vektorovému součinu příslušného dipólového momentu \mathbf{p} , resp. μ s vektorem \mathbf{E} , resp. \mathbf{B} , charakterizujícím odpovídající pole.

Protože magnetické pole působí na magnetický dipól (jakým je cívka, kterou protéká proud) momentem síly, koná se při otáčení dipólu práce. Magnetický dipól má tedy určitou **potenciální energii**, která závisí na jeho orientaci vůči poli. Pro elektrické dipóly jsme ukázali (rov. (23.38)), že

$$E_p(\theta) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

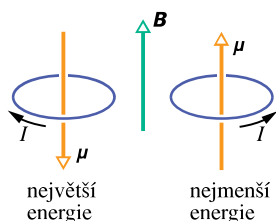
Analogicky platí pro případ magnetického pole

$$E_p(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{potenciální energie magnetického dipólu}). \quad (29.36)$$

Magnetický dipól má nejmenší potenciální energii $E_{p,\min} = -\mu B \cdot \cos 0^\circ = -\mu B$, když je jeho dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ rovnoběžný se směrem magnetického pole (obr. 29.26). Jeho největší energie $E_{p,\max} = -\mu B \cos 180^\circ = +\mu B$ odpovídá případu, že $\boldsymbol{\mu}$ má opačný směr než vektor pole. Rozdíl energií mezi těmito dvěma orientacemi magnetického dipólu je

$$\Delta E_p = (+\mu B) - (-\mu B) = 2\mu B. \quad (29.37)$$

Takovou práci musí vykonat vnější síla při otočení magnetického dipólu o 180° z počáteční polohy, v níž má dipól souhlasný směr s magnetickým polem.



Obr. 29.26 Orientace odpovídající největší a nejmenší energii magnetického dipólu ve vnějším magnetickém poli \mathbf{B} . Směr magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ je určen směrem proudu I pomocí pravidla pravé ruky, názorně ukazaného na obr. 29.24b.

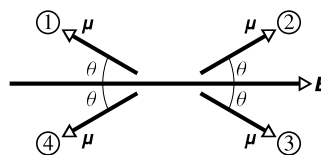
Dosud jsme se zabývali pouze cívku jako konkrétní realizaci magnetického dipólu. Avšak i jednoduchý tyčový magnet je magnetickým dipólem stejně jako rotující nabitá koule. I samotnou planetu Zemi můžeme pokládat za magnetický dipól. Také většina elementárních částic včetně elektronu, protonu a neutronu má svůj magnetický dipólový moment. Pro srovnání uvádíme velikosti některých magnetických dipólových momentů (tab. 29.2):

Tabulka 29.2 Některé magnetické dipólové momenty

Malý tyčový magnet	$5 \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Země	$8,0 \cdot 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Proton	$1,4 \cdot 10^{-26} \text{ A}\cdot\text{m}^2$
Elektron	$9,3 \cdot 10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$

KONTROLA 6: Na obrázku jsou čtyři orientace magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ charakterizované úhlem θ , který svírá magnetický moment se směrem magnetické indukce \mathbf{B} vnějšího magnetického pole. Seřadte sestupně tyto orientace (a) podle velikosti momentu

působícího na dipól a (b) podle potenciální energie dipólu.



PŘÍKLAD 29.10

(a) Jaký je magnetický dipólový moment cívky (př. 29.9), když jí protéká proud $100 \mu\text{A}$?

ŘEŠENÍ: Velikost magnetického dipólového momentu cívky o příčném průřezu $S = 2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, je

$$\begin{aligned} \mu &= NIS = \\ &= (250)(100 \cdot 10^{-6} \text{ A})(2,52 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = \\ &= 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ A}\cdot\text{m}^2 = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(Dokažte, že použité dvojí vyjádření jednotky je identické. Druhá z těchto jednotek plyne ihned z rov. (29.36).)

Směr $\boldsymbol{\mu}$, jak plyne z obr. 29.25, je totožný se směrem ručičky přístroje. Lze to ověřit následující úvahou: Budeme-li předpokládat, že $\boldsymbol{\mu}$ má směr této ručičky, bude moment síly vyjádřený rov. (29.35) takový, že se ručička přístroje bude skutečně pohybovat ve směru otáčení hodinových ručiček podél stupnice přístroje.

(b) Nechť má magnetický dipólový moment cívky galvanometru stejný směr jako vnější magnetické pole, jehož indukce je $0,85 \text{ T}$. Jak velké práce je potřeba na otočení cívky o 180° ?

ŘEŠENÍ: Potřebná práce je rovna přírůstku potenciální energie magnetického dipólu. Z rov. (29.37) dostaneme

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= E_p(180^\circ) - E_p(0^\circ) = \Delta E_p = 2\mu B = \\ &= 2(6,3 \cdot 10^{-6} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1})(0,85 \text{ T}) = \\ &= 10,7 \cdot 10^{-6} \text{ J} \doteq 11 \mu\text{J}, \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

což je přibližně rovno práci potřebné k vyzvednutí tabletky acylpyrinu do výšky 3 mm .

(c) Jaká je velikost maximálního momentu síly \mathbf{M} , kterým vnější magnetické pole o indukci \mathbf{B} působí na uvedenou cívku?

ŘEŠENÍ: Z rov. (29.34) plyne, že moment síly je maximální v případě, že $\sin \theta = 1$. Pak platí

$$\begin{aligned} M &= \mu B \sin \theta = \\ &= (6,3 \cdot 10^{-6} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1})(0,85 \text{ T})(1) = \\ &= 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ J}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Magnetická indukce

Magnetická indukce \mathbf{B} je definována pomocí síly \mathbf{F}_B působící na zkušební částici s nábojem Q , která se pohybuje rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli:

$$\mathbf{F}_B = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (29.2)$$

Jednotkou \mathbf{B} v soustavě SI je *tesla* (T): $1 \text{ T} = 1 \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Hallův jev

Umístíme-li do magnetického pole \mathbf{B} vodivý proužek průřezu S a šířky d , kterým protéká elektrický proud I , usadí se část nosičů náboje (z nichž každý má náboj o velikosti Q) na bočních stranách vodiče a tím se vytvoří napětí U_H . Polaritu U_H určuje znaménko nosičů náboje; počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče (koncentrace nosičů náboje) lze vypočítat ze vztahu

$$n = \frac{BI d}{U_H S Q}. \quad (29.12)$$

Nabitá částice pohybující se v magnetickém poli

Nabitá částice o hmotnosti m s nábojem Q , která se pohybuje rychlostí \mathbf{v} kolmou na indukci homogenního magnetického pole \mathbf{B} , koná rovnoměrný pohyb po kružnici. Použijeme-li Newtonova zákona na případ rovnoměrného pohybu po kružnici, dostaneme

$$QvB = \frac{mv^2}{r}. \quad (29.15)$$

Odtud můžeme určit poloměr r kružnice:

$$r = \frac{mv}{QB}. \quad (29.16)$$

Frekvence f , úhlová frekvence ω a perioda T pohybu jsou spojeny vztahy

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{QB}{2\pi m}. \quad (29.19, 29.18, 29.17)$$

Cyklotrony a synchrotrony

Cyklotron je urychlovač částic, ve kterém se využívá magnetické pole k udržení nabitých částic na kruhové dráze o postupně

vzrůstajícím poloměru tak, že nevelký urychlující elektrický potenciál může působit na částici opakovaně, a tím jí dodat vysokou energii. Poněvadž při rychlosti srovnatelné s rychlostí světla obíhající částice vypadne z rytmu frekvence oscilátoru cyklotronu, je energie dosažitelná cyklotronem omezena (tím více, čím je částice lehčí). Tyto těžkosti odstraní synchrotron, u kterého se jak velikost magnetické indukce B , tak i frekvence oscilátoru f_{osc} cyklicky mění, takže částice může dosáhnout nejen velké energie, ale může ji dosáhnout na dráze o konstantním poloměru.

Ampérova síla

Na přímý vodič délky L s proudem I , nacházející se v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} , působí síla

$$\mathbf{F}_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (29.26)$$

Síla, kterou působí magnetické pole o indukci \mathbf{B} na element $d\mathbf{s}$ vodiče protékaného proudem I , je

$$d\mathbf{F}_B = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}. \quad (29.27)$$

Směr vektoru \mathbf{L} , resp. $d\mathbf{s}$, je souhlasný se směrem proudu I .

Moment síly působící na cívku s proudem

Na cívku protékanou proudem I působí magnetické pole o indukci \mathbf{B} momentem síly \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}. \quad (29.35)$$

Zde $\boldsymbol{\mu}$ je **magnetický dipólový moment** cívky; jeho směr je dán pravidlem pravé ruky a velikost je $\mu = NIS$, kde N je počet závitů cívky a S obsah plochy jednoho závitu.

Potenciální energie magnetického dipólu

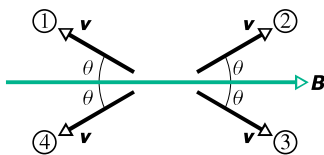
Magnetický dipól s momentem $\boldsymbol{\mu}$ má v magnetickém poli \mathbf{B} potenciální energii E_p , která závisí na orientaci $\boldsymbol{\mu}$ vůči \mathbf{B} :

$$E_p(\theta) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad (29.36)$$

kde θ je úhel sevřený vektory $\boldsymbol{\mu}$ a \mathbf{B} .

OTÁZKY

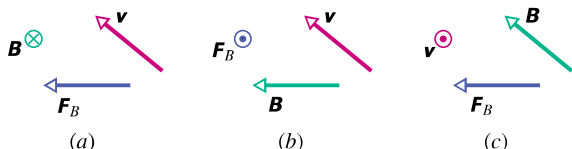
1. Na obr. 29.27 jsou znázorněny čtyři směry vektoru rychlosti \mathbf{v} záporně nabitě částice pohybující se pod úhlem θ vzhledem ke směru homogenního magnetického pole. (a) Seřadte v sestupném pořadí tyto směry podle velikosti magnetické síly působící na částici. (b) Pro který z vektorů je tato síla kolmá k rovině obrázku a míří k nám?



Obr. 29.27 Otázka 1

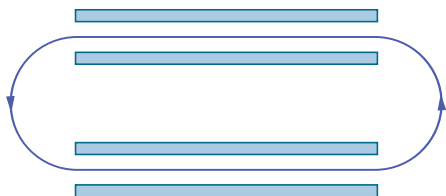
2. Mějme čtyři situace, které charakterizují pohyb protonu pohybujícího se rychlostí \mathbf{v} v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} : (a) $\mathbf{v} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $\mathbf{B} = 4\mathbf{k} \text{ T}$, (b) $\mathbf{v} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $\mathbf{B} = -4\mathbf{k} \text{ T}$, (c) $\mathbf{v} = (3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} \text{ T}$, (d) $\mathbf{v} = 20\mathbf{i} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $\mathbf{B} = -4\mathbf{i} \text{ T}$. Seřadte v sestupném pořadí tyto situace podle velikosti magnetické síly působící na proton (výpočty proveďte z paměti).

3. Na obr. 29.28 jsou ukázány tři různé situace, ve kterých se kladná částice pohybuje rychlostí \mathbf{v} v homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} a působí na ni magnetická síla \mathbf{F}_B . Pro každou situaci určete, zda orientace vektorů jsou z fyzikálního hlediska správně zakresleny.



Obr. 29.28 Otázka 3

4. Na obr. 29.29 je znázorněna dráha* elektronu pohybujícího se v magnetickém poli. Dráha se skládá ze dvou přímkových a dvou půlkruhových částí. Přímkové části se nacházejí v oblastech homogenních elektrických polí, vytvořených pomocí elektricky nabitých rovnoběžných desek. Která z desek (a) horního, (b) dolního páru má vyšší potenciál? (c) Jaký směr má magnetická indukce?



Obr. 29.29 Otázka 4

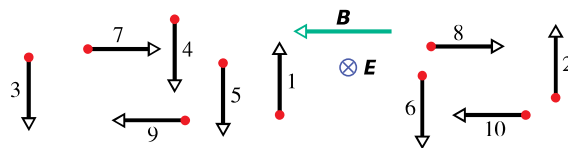
* V částicové fyzice (a také v nebeské mechanice) se často užívá termín „dráha“ ve smyslu „trajektorie“.

5. V čl. 29.3 jsme se zabývali pohybem nabitě částice ve zkřížených polích, ve kterých síla elektrická \mathbf{F}_E a magnetická \mathbf{F}_B působí proti sobě. Zjistili jsme, že částice se v takovém případě pohybuje po přímce a její rychlost je dána rov. (29.7) ($v = E/B$). Která z obou sil je větší, jestliže (a) $v < E/B$, (b) $v > E/B$?

6. Na obr. 29.30 jsou zkřížená homogenní pole, elektrické s intenzitou \mathbf{E} a magnetické o indukci \mathbf{B} . Do oblasti, kde obě pole působí, vletá 10 různých nabitých částic (vektory jejich rychlostí nejsou zakresleny ve správném měřítku). V tab. 29.3 jsou uvedena znaménka nábojů a to, zda je jejich rychlost menší, nebo větší než poměr E/B (srov. otázku 5). Které částice se budou pohybovat kolmo k rovině obrázku směrem k nám v okamžiku, kdy situace v uspořádání částic a polí odpovídá obr. 29.30?

Tabulka 29.3 Otázka 6

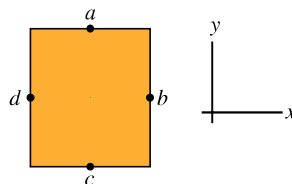
ČÁSTICE	NÁBOJ	RYCHLOST	ČÁSTICE	NÁBOJ	RYCHLOST
1	+	menší	6	-	větší
2	+	větší	7	+	menší
3	+	menší	8	+	větší
4	+	větší	9	-	menší
5	-	menší	10	-	větší



Obr. 29.30 Otázka 6

7. Letadlo letí směrem na západ od Brna, kde míří indukce \mathbf{B} magnetického pole Země k severu a je odkloněna dolů. (a) Na kterém křídle letadla, levém, nebo pravém, se budou pohybovat elektrony ve směru ke špičce křídla v důsledku působení magnetického pole? (b) Ke které špičce křídla, pravé, nebo levé, se budou pohybovat vodivostní elektrony, poletí-li letadlo směrem na východ?

8. Na obr. 29.31 je průřez vodičem, kterým protéká proud kolmo k rovině obrázku směrem od nás. (a) Kterou dvojici svorek ze

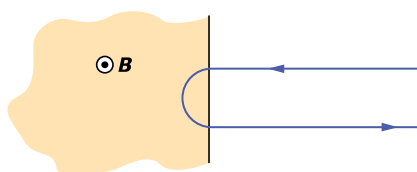


Obr. 29.31 Otázka 8

čtyř možných, označených (a, b, c, d), použijete k měření Hallova napětí, jestliže magnetické pole působí v kladném směru osy x ? Nosiče náboje mají záporné znaménko a pohybují se kolmo k rovině obrázku směrem od nás. Která svorka z této vybrané

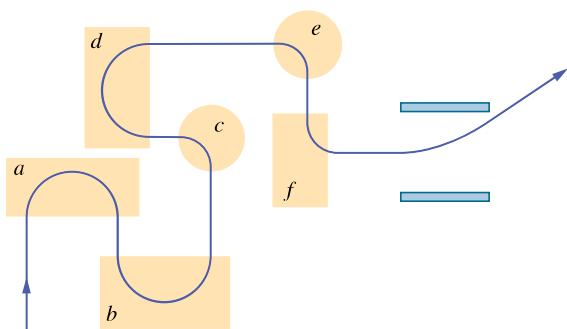
dvojice má vyšší potenciál? (b) Opakujte totéž pro magnetické pole působící v záporném směru osy y , mají-li tentokrát nosiče náboje kladné znaménko a pohybují-li se směrem k nám. (c) Proveďte stejný rozbor pro situaci, kdy má magnetická indukce směr rovnoběžný s kladným směrem osy z .

9. Na obr. 29.32 je znázorněna situace, kdy nabitá částice vletá s rychlostí o velikosti v_0 do homogenního magnetického pole o indukci \mathbf{B} , pohybuje se v něm po půlkružnici po dobu T_0 a poté je opustí. (a) Má částice kladný, nebo záporný náboj? (b) Je konečná velikost rychlosti částice větší, menší, nebo rovna v_0 ? (c) Jestliže počáteční rychlost bude $0,5v_0$, bude doba, po kterou se částice pohybuje v magnetickém poli, větší, menší, nebo rovna T_0 ? (d) Bude trajektorie částice opět půlkružnice?



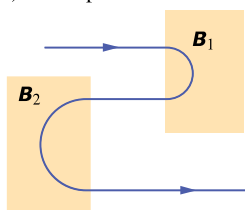
Obr. 29.32 Otázka 9

10. Na obr. 29.33 je dráha částice prolétající šesti oblastmi homogenního magnetického pole. Dráha v nich má tvar buď půlkružnice, nebo čtvrtkružnice. Po opuštění poslední oblasti se částice pohybuje mezi dvěma rovnoběžnými nabitými destičkami a je vychýlena směrem k destičce s vyšším potenciálem. Jaký je směr vektoru magnetické indukce v jednotlivých oblastech?



Obr. 29.33 Otázka 10

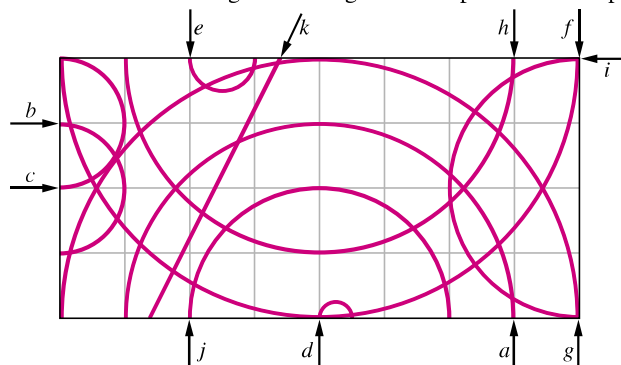
11. Na obr. 29.34 je stopa elektronu, který prolétá dvěma oblastmi homogenního magnetického pole s magnetickými indukcemi o velikostech B_1 a B_2 . Jeho dráha má v každé z oblastí tvar půlkružnice. (a) Které pole má větší magnetickou indukci?



Obr. 29.34 Otázka 11

(b) Jaký je směr polí v obou oblastech? (c) Je doba, po kterou se elektron pohybuje v oblasti s indukcí B_1 větší, nebo rovna době, po kterou se pohybuje v oblasti s indukcí B_2 ?

12. Částicový „autodrom“. Na obr. 29.35 je zakresleno 11 stop částic v oblasti homogenního magnetického pole. Jedna stopa



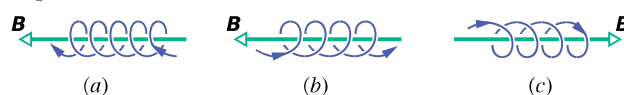
Obr. 29.35 Otázka 12

má tvar přímky, ostatní mají tvar půlkružnic. V tab. 29.4. jsou uvedeny hmotnosti, náboje a velikosti rychlosti těchto částic z obrázku. Přiřaďte stopy jednotlivým částicím.

Tabulka 29.4 Otázka 12

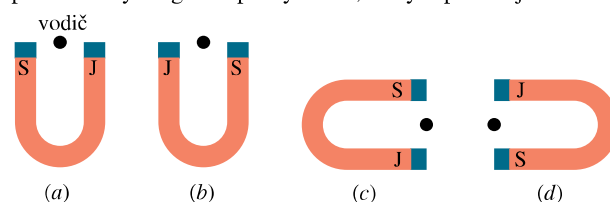
ČÁSTICE	HMOTNOST	NÁBOJ	RYCHLOST
1	$2m$	Q	v
2	m	$2Q$	v
3	$m/2$	Q	$2v$
4	$3m$	$3Q$	$3v$
5	$2m$	Q	$2v$
6	m	$-Q$	$2v$
7	m	$-4Q$	v
8	m	$-Q$	v
9	$2m$	$-2Q$	$3v$
10	m	$-2Q$	$8v$
11	$3m$	0	$3v$

13. Na obr. 29.36 jsou tři nabitě částice pohybující se po spirále v homogenním magnetickém poli. Který případ odpovídá záporně nabitě částici?



Obr. 29.36 Otázka 13

14. Na obr. 29.37 jsou nakresleny 4 situace, v nichž se nacházejí podkovovitý magnet a přímý vodič, kterým protékají elektrony



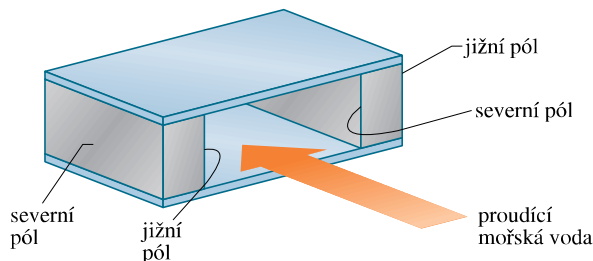
Obr. 29.37 Otázka 14

kolmo k obrázku směrem k nám. Ve kterém případě bude Amperova síla působící na vodič směřovat k horní části obrázku?

15. Vodičem, nacházejícím se v magnetickém poli o indukci \mathbf{B} , protéká proud I v záporném směru osy x . Bez písemného výpočtu seřaďte v sestupném pořadí velikosti sil, kterými působí magnetické pole na vodič: $\mathbf{B}_1 = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ T, $\mathbf{B}_2 = (4\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$ T, $\mathbf{B}_3 = (6\mathbf{i} + 3\mathbf{k})$ T a $\mathbf{B}_4 = (-8\mathbf{i} - 3\mathbf{k})$ T.

16. Tichý „housenkový pohon“ ponorek, známý z některých filmů, je založen na principu *magnetohydrodynamického* (MHD) pohonu: pohybuje-li se ponorka kupředu, protéká mořská voda několika kanály, umístěnými ve speciální konstrukci na zadní části trupu. Na obr. 29.38 je schematicky ukázán takový kanál. Magnety, nacházející se na protilehlých stěnách kanálu, mají opačné póly nastavené proti sobě, takže vytvářejí uvnitř kanálu homogenní magnetické pole. Elektrody (nejsou zakresleny) vytvářejí elektrické pole ve směru napříč kanálem. To způsobí příčný elektrický proud iontů ve vodě a magnetická síla na ně působící žene vodu směrem k zádi kanálu, a tedy pohání ponorku kupředu. Musí být elektrické pole působící na ionty (obr. 29.38)

orientováno nahoru, dolů, doleva, doprava, dopředu, nebo dozadu?



Obr. 29.38 Otázka 16

17. (a) Vraťme se ke kontrole 6, kde se magnetický dipólový moment μ otočí z orientace 1 do orientace 2. Bude práce, kterou vykoná *magnetické pole* při tomto otočení dipólu, kladná, záporná, nebo nulová? (b) Vypočítejte práci, kterou vykoná magnetické pole při otočení dipólu z orientace 1 do (α) orientace 2, (β) orientace 3, (γ) orientace 4. Seřaďte je sestupně od největší po nejmenší.

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 29.2 Definice magnetické indukce

1C. Vyjádřete jednotku magnetické indukce \mathbf{B} pomocí základních jednotek soustavy SI.

2C. Částice α se pohybuje rychlostí \mathbf{v} o velikosti $550 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ v homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} , jejíž velikost je $0,045 \text{ T}$. (Částice α má náboj $+3,2\cdot 10^{-19} \text{ C}$ a hmotnost $6,6\cdot 10^{-27} \text{ kg}$.) Úhel mezi vektory \mathbf{v} a \mathbf{B} je 52° . Jaká je velikost (a) magnetické síly \mathbf{F}_B , kterou působí na částici magnetické pole, a (b) zrychlení částice způsobené silou \mathbf{F}_B ? (c) Změní se velikost rychlosti částice?

3C. Elektron v televizní obrazovce letí rychlostí $7,20\cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ v magnetickém poli o indukci $83,0 \text{ mT}$. (a) Co můžete říci o největší a nejmenší velikosti síly, kterou působí magnetické pole na elektron, aniž známe směr tohoto pole? (b) V určitém místě je zrychlení elektronu $4,90\cdot 10^{14} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Jaký úhel svírá vektor rychlosti elektronu s vektorem magnetické indukce?

4C. Proton se pohybuje ve směru, který svírá úhel $23,0^\circ$ se směrem magnetické indukce, jejíž velikost je $2,60 \text{ mT}$. Magnetické pole působí na proton silou o velikosti $6,50\cdot 10^{-17} \text{ N}$. Určete: (a) rychlost protonu a (b) kinetickou energii protonu v jednotkách eV.

5Ú. Každý z elektronů, nacházejících se v elektronovém paprsku v televizní trubici, má kinetickou energii $12,0 \text{ keV}$. Trubice je orientována tak, že se v ní elektrony pohybují vodorovně směrem od jižního geomagnetického pólu k severnímu. Vertikální složka zemského magnetického pole směřuje dolů a má velikost $55,0 \mu\text{T}$. (a) Kterým směrem se bude paprsek ohýbat? (b) Jaké je zrychlení každého z elektronů způsobené tímto magnetickým

polem? (c) O jakou vzdálenost d se paprsek odchýlí v příčném směru na konci trubice o délce $20,0 \text{ cm}$?

6Ú. Elektron se pohybuje magnetickým polem o indukci $\mathbf{B} = (0,030\mathbf{i} - 0,15\mathbf{j}) \text{ T}$ rychlostí $\mathbf{v} = (2,0\cdot 10^6\mathbf{i} + 3,0\cdot 10^6\mathbf{j}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (a) Určete magnetickou sílu, která na něj působí. (b) Proveďte stejný výpočet pro proton, který má tutéž rychlost.

7Ú. Elektron pohybující se v homogenním magnetickém poli má rychlost $\mathbf{v} = (40\mathbf{i} + 35\mathbf{j}) \text{ km/s}$, když na něj začne působit magnetické pole silou $\mathbf{F} = (-4,2\mathbf{i} + 4,8\mathbf{j}) \text{ fN}$. Určete magnetickou indukci \mathbf{B} , víte-li, že $B_x = 0$.

ODST. 29.3 Objev elektronu

8C. Proton se pohybuje v elektrickém a magnetickém poli. Obě pole jsou homogenní. Magnetická indukce je $\mathbf{B} = -2,5\mathbf{i} \text{ mT}$. V určitém okamžiku je rychlost protonu $\mathbf{v} = 2000\mathbf{j} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jaká je v tomto okamžiku velikost celkové síly, působící na proton, je-li \mathbf{E} (a) $4,0\mathbf{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, (b) $-4,0\mathbf{k} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ (c) $4,0\mathbf{i} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$?

9C. Elektron s kinetickou energií $2,5 \text{ keV}$ vletěl vodorovně do oblasti, ve které působí směrem dolů elektrické pole o velikosti $10 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$. (a) Jaký je směr a (nejmenší) velikost magnetické indukce pole, které způsobí, že elektron bude pokračovat v pohybu ve vodorovném směru (nevychýlen)? Zanedbejte gravitační sílu, je malá ve srovnání s ostatními silami. (b) Je možné, aby se proton pohyboval touto konfigurací polí, aniž by byl vychýlen? Jestliže ano, za jakých okolností?

10C. Elektrické pole o velikosti intenzity $1,50 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$ a magnetické pole o velikosti indukce $0,400 \text{ T}$ působí současně na pohybující se elektron, přičemž výslednice těchto dvou sil je

rovna nule. (a) Určete minimální velikost rychlosti elektronu. (b) Nakreslete vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} a \mathbf{v} .

11Ú. Elektron má počáteční rychlost $(12,0\mathbf{j} + 15,0\mathbf{k}) \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ a konstantní zrychlení $(2,00\cdot 10^{12}\mathbf{i}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ v oblasti, kde na něj působí homogenní magnetické pole. Určete intenzitu elektrického pole \mathbf{E} , víte-li, že magnetická indukce $\mathbf{B} = 400\mathbf{i} \mu\text{T}$.

12Ú. Elektron je urychlen napětím 1,0 kV a vletí mezi dvě rovnoběžné desky vzdálené od sebe 20 mm. Rozdíl potenciálů mezi deskami je 100 V a elektron se pohybuje kolmo k siločáram elektrického pole. Jak velkou magnetickou indukci musí mít magnetické pole kolmé jak k vektoru rychlosti elektronu, tak i k vektoru intenzity elektrického pole, aby se elektron pohyboval po přímce? (Vektory \mathbf{v} , \mathbf{E} a \mathbf{B} tedy tvoří trojici ortogonálních vektorů.)

13Ú. Každý iont ${}^6\text{Li}$ (hmotnost 6,0 u) má náboj $+e$ a je vychylován napětím 10 kV. Svazek takových iontů vletí ve vodorovném směru do oblasti homogenního magnetického pole o indukci $B = 1,2 \text{ T}$. Vypočtěte nejmenší velikost intenzity elektrického pole, které musí působit v téže oblasti, aby ionty ${}^6\text{Li}$ z ní vylétly nevychýleny.

ODST. 29.4 Hallův jev

14C. Měděný proužek široký $150 \mu\text{m}$ se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} , jejíž velikost je 0,65 T; \mathbf{B} je kolmé k ploše proužku. Jestliže proužkem protéká elektrický proud $I = 23 \text{ A}$, naměříme na jeho šířce Hallovo napětí U_{H} . Určete jeho velikost, víte-li, že počet elektronů v objemové jednotce měděného vodiče je $8,47\cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

15C. Dokažte, že počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče lze vyjádřit pomocí intenzity Hallova elektrického pole E_{H} a proudové hustoty J vztahem $n = JB/(eE_{\text{H}})$.

16Ú. Při experimentu s Hallovým jevem protéká vodivým proužkem v podélném směru elektrický proud 3,0 A. Proužek je dlouhý 4,0 cm, široký 1,0 cm a tlustý $10 \mu\text{m}$. Magnetické pole o indukci 1,5 T je kolmé k ploše proužku (ve směru tloušťky) a na jeho šířce bylo naměřeno Hallovo napětí $10 \mu\text{V}$. Z uvedených údajů určete (a) driftovou rychlost nosičů náboje a (b) počet nosičů náboje v objemové jednotce vodiče. (c) Na náčrtku ukažte polaritu Hallova napětí s předpokládaným směrem elektrického proudu a magnetického pole. Nosiče náboje jsou elektrony.

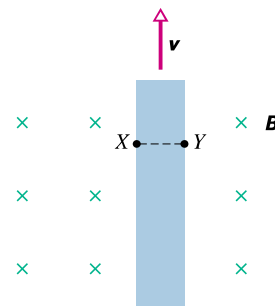
17Ú. (a) Dokažte (obr. 29.8), že poměr intenzity Hallova elektrického pole E_{H} a elektrického pole E způsobujícího pohyb elektronů podél proužku je

$$\frac{E_{\text{H}}}{E} = \frac{B}{ne\rho},$$

kde ρ je rezistivita materiálu a n je počet elektronů v objemové jednotce vodiče. (b) Vypočtěte tento poměr pro hodnoty ze cvič. 14 (viz tab. 27.1).

18Ú. Kovový proužek dlouhý 6,50 cm, široký 0,850 cm a tlustý 0,760 mm se pohybuje konstantní rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli o indukci \mathbf{B} , která je kolmá k ploše proužku

a má velikost 1,20 mT (obr. 29.39). Hallovo napětí měříme mezi body X a Y napříč proužkem. Vypočtěte velikost rychlosti v .



Obr. 29.39 Úloha 18

ODST. 29.5 Pohyb nabitě částice po kružnici

19C. Elektron je urychlován z klidu napětím 350 V. Poté vletí do homogenního magnetického pole o indukci 200 mT kolmo k vektoru magnetické indukce. Vypočtěte: (a) velikost rychlosti elektronu a (b) poloměr jeho dráhy v magnetickém poli.

20C. Jakou velikost musí mít magnetická indukce homogenního magnetického pole působícího na paprsek elektronů, které letí rychlostí $1,3\cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, aby se pohybovaly po kružnici o poloměru 0,35 m?

21C. (a) V magnetickém poli o indukci 0,50 T obíhá po kružnici elektron rychlostí rovnou 10 % rychlosti světla. Určete poloměr kružnice, po níž se pohybuje. (b) Jaká je kinetická energie elektronu (v jednotkách eV)? Relativistické efekty jsou při takové rychlosti ještě zanedbatelné.

22C. Jak velká indukce homogenního magnetického pole by udržela elektron letící rychlostí $1,0\cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ na kružnici velikosti zemského rovníku?

23C. Elektron má kinetickou energii 1,20 keV a pohybuje se po kružnici v rovině kolmé k vektoru magnetické indukce \mathbf{B} . Poloměr této kružnice je 25,0 cm. Určete: (a) velikost rychlosti elektronu, (b) velikost magnetické indukce pole, (c) frekvenci otáčení a (d) periodu otáčení.

24C. Holandský fyzik S. A. Goudsmit vyvinul přesnou metodu měření hmotností těžkých iontů pomocí měření period jejich oběhů v magnetickém poli o známé magnetické indukci. Jednou ionizované ionty jodu oběhnou 7,00krát v poli o indukci 45,0 mT za 1,29 ms. Vypočtěte jejich hmotnost a vyjádřete ji v atomové hmotnostní jednotce 1 u. (Hmotnosti iontů nyní měříme mnohem přesněji, než naznačuje náš příklad.)

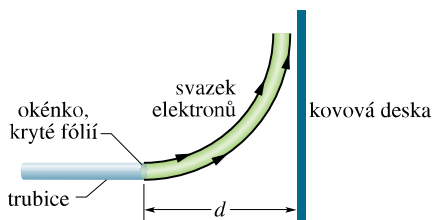
25C. Částice α ($Q = +2e, m = 4,00 \text{ u}$) se pohybuje po kružnici o poloměru 4,50 cm v magnetickém poli o indukci velikosti $B = 1,20 \text{ T}$. Vypočtěte: (a) velikost její rychlosti, (b) periodu jejího oběhu, (c) její kinetickou energii (v jednotkách eV) a (d) napětí, kterým musí být urychlena z klidu, aby dosáhla této energie.

26C. (a) Určete frekvenci oběhu elektronu s energií 100 eV v magnetickém poli o indukci $35,0 \mu\text{T}$. (b) Vypočtěte poloměr dráhy tohoto elektronu, jestliže má rychlost kolmou ke směru magnetické indukce.

27C. Elektrony s kinetickou energií E_k vylétají z „okénka“ vyrobeného tenkou fólií na konci trubice urychlovače. Ve vzdálenosti d od tohoto okénka se nachází kovová destička umístěná kolmo ke svazku vylétajících elektronů (obr. 29.40). Dokažte, že můžeme zabránit tomu, aby svazek dopadl na destičku, jestliže ho odchýlíme magnetickým polem \mathbf{B} o velikosti

$$B \geq \sqrt{\frac{2mE_k}{e^2d^2}}.$$

Zde m a e jsou hmotnost a velikost náboje elektronu. Jak musí být vektor magnetické indukce \mathbf{B} orientován?



Obr. 29.40 Cvičení 27

28Ú. Zdroj emituje elektrony s rychlostí o velikosti $v = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, které vlétají v bodě P do homogenního magnetického pole o magnetické indukci velikosti $B = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ T}$. Vektor rychlosti elektronu svírá úhel $\theta = 10^\circ$ s vektorem magnetické indukce. Určete vzdálenost bodu P od místa, kde elektron znovu protne indukční čáru, která prochází tímto bodem.

29Ú. V nukleárním experimentu se proton s kinetickou energií $1,0 \text{ MeV}$ pohybuje po kružnici v homogenním magnetickém poli. Jakou energii musí mít (a) α -částice ($Q = +2e$, $m = 4,0 \text{ u}$) a (b) deuteron ($Q = +e$, $m = 2,0 \text{ u}$), aby obíhaly po kružnici o stejném poloměru jako proton?

30Ú. Proton, deuteron a α -částice (viz úloha 29) jsou urychleny stejným napětím a vletí do homogenního magnetického pole o indukci \mathbf{B} ve směru k ní kolmém. (a) Porovnejte kinetické energie těchto částic. Jaký bude poloměr kruhové dráhy (b) deuteronu, (c) α -částice, je-li poloměr kruhové dráhy protonu 10 cm ?

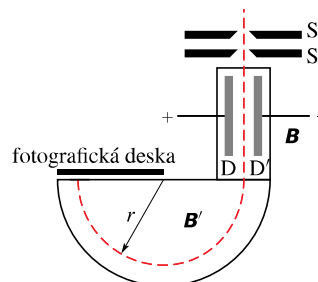
31Ú. Proton, deuteron a α -částice (viz úloha 29) mají stejnou kinetickou energii a vlétají do oblasti homogenního magnetického pole kolmo ke směru vektoru \mathbf{B} . Porovnejte poloměry kruhových drah, po nichž tyto částice obíhají.

32Ú. Proton s nábojem $+e$ a hmotností m vlétá do homogenního magnetického pole s vektorem indukce $\mathbf{B} = B\mathbf{i}$ s počáteční rychlostí $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}$. Napište obecný výraz pro rychlost protonu.

33Ú. Dva izotopy jedenkrát ionizovaného atomu mají stejný náboj Q , ale jejich hmotnosti se liší o malou hodnotu Δm . Jsou vstřelovány do hmotnostního spektrometru popsaneho v př. 29.3. (a) Vyjádřete tento rozdíl hmotností pomocí proměnných U , Q , B a m (kteréhokoliv z izotopů) a vzdálenosti Δx mezi stopami obou izotopů na fotografické desce. (b) Vypočítejte Δx pro svazek jedenkrát ionizovaných atomů chloru o hmotnostech 35 u a 37 u , jestliže $U = 7,3 \text{ kV}$ a $B = 0,50 \text{ T}$.

34Ú. V komerčních hmotnostních spektrometrech (viz př. 29.3) jsou uranové ionty s hmotností $3,92 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$ a nábojem $3,20 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ separovány od atomů, jejichž fyzikální charakteristiky jsou velmi blízké. Ionty jsou urychleny napětím 100 kV a poté dopadají do oblasti homogenního magnetického pole, kde se pohybují po půlkruhové dráze o poloměru $1,00 \text{ m}$. Na jejím konci proletí štěrbinou šířky $1,00 \text{ mm}$ a výšky $1,00 \text{ cm}$ a dopadají do speciální nádoby. (a) Jakou velikost musí mít indukce magnetického pole v separátoru? Je-li použit přístroj, který separuje 100 mg materiálu za hodinu, vypočítejte (b) proud iontů v přístroji a (c) teplo, které se vyvine v nádobce za $1,00 \text{ h}$.

35Ú. Bainbridgeův hmotnostní spektrometr, znázorněný na obrázku 29.41, separuje ionty, které mají tutéž rychlost, ale mírně odlišnou hmotnost. Ionty po průchodu štěrbinami S_1 a S_2 projdou selektorem rychlostí, ve kterém je elektrické pole \mathbf{E} tvořené nabitými deskami D a D' a magnetické pole \mathbf{B} kolmé k \mathbf{E} i k trajektorii iontů. Ionty, které projdou selektorem nevychýlí, budou mít stejně velkou rychlost v . Poté vniknou do oblasti, kde na ně působí jiné homogenní magnetické pole o indukci \mathbf{B}' , a to způsobí, že poleť po kružnici. Dopad iontů je registrován pomocí fotografické desky. Dokažte, že pro tyto ionty platí vztah $Q/m = E/(rBB')$, kde r je poloměr kružnice.



Obr. 29.41 Úloha 35

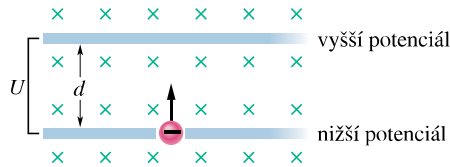
36Ú. Pozitron s kinetickou energií $2,0 \text{ keV}$ vlétá do homogenního magnetického pole o indukci \mathbf{B} , jejíž velikost je $0,10 \text{ T}$. Vektor rychlosti částice svírá úhel 89° s vektorem \mathbf{B} . Určete (a) periodu T , (b) stoupání p a (c) poloměr šroubovice, po níž se částice pohybuje.

37Ú. Neutrální částice je v klidu v homogenním magnetickém poli. V čase $t = 0$ se rozpadne na dvě nabitě částice, z nichž každá má hmotnost m . (a) Jestliže náboj jedné z nich je $+Q$, jaký náboj bude mít druhá částice? (b) Obě částice se pohybují dále po různých drahách, přičemž obě dráhy leží v rovině kolmé k vektoru \mathbf{B} . Později se obě částice navzájem srazí. Vyjádřete pomocí veličin m , B a Q dobu, která uplyne mezi rozpadem a srážkou obou částic.

38Ú. (a) Jak velkou rychlost by potřeboval proton, aby po kruhové dráze obletěl Zemi podél rovníku za předpokladu, že zemské magnetické pole má všude vodorovný směr rovnoběžný s poledníky? Úlohu je třeba počítat relativisticky. Velikost magnetické indukce na rovníku položte rovnu $0,41 \mu\text{T}$. (Tip: Hybnost mv v rov. (29.16) nahraďte relativistickou hybností z rov. (9.24)).

(b) Nakreslete vektory rychlosti a magnetické indukce odpovídající této situaci.

39Ú. Podle obr. 29.42 elektron o hmotnosti m s nábojem $-e$ vletá se zanedbatelnou rychlostí do prostoru mezi dvěma deskami, mezi nimiž je napětí U a mají vzdálenost d . Elektron vletá do této oblasti ve směru kolmém ke kladné horní desce. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině obrázku. Určete minimální velikost B , při které elektron nedopadne na horní desku.



Obr. 29.42 Úloha 39

ODST. 29.6 Cyklotrony a synchrotrony

40C. Proton se pohybuje v cyklotronu po kružnici o poloměru 0,50 m. Velikost magnetické indukce zakřivující dráhu protonu je 1,2 T. (a) Určete cyklotronovou frekvenci. (b) Jaká je kinetická energie protonu v jednotkách eV?

41C. Konstruktor má za úkol navrhnout cyklotron pro urychlování protonů na rychlost rovnou 1/10 rychlosti světla. Magnet, který bude součástí přístroje, bude vytvářet magnetické pole o indukci 1,4 T. Vypočítejte (a) poloměr cyklotronu, (b) odpovídající frekvenci oscilátoru. Relativistické efekty jsou při této rychlosti ještě zanedbatelné.

42Ú. Frekvence oscilátoru cyklotronu v př. 29.5 byla navržena tak, aby cyklotron urychloval deuterony. Nyní budeme chtít místo deuteronů urychlovat protony. (a) Na jakou kinetickou energii budou urychleny, nezměníme-li frekvenci oscilátoru? (b) Jak velké magnetické indukce k tomu bude potřeba? (c) Jakou kinetickou energii budou mít urychlené protony, jestliže magnetická indukce pole bude udržována na hodnotě, používané pro deuterony? (d) Na jakou hodnotu potom musíme naladit frekvenci oscilátoru? (e) Odpovězte na tytéž otázky pro případ urychlovaných α -částic ($Q = +2e$, $m = 4,0 u$).

43Ú. Na deutron pohybující se v cyklotronu po kruhové dráze o poloměru 50 cm působí homogenní magnetické pole, jehož indukce má velikost $B = 1,5 T$. Po lehké srážce s terčíkem se deutron rozpadne se zanedbatelnou ztrátou kinetické energie na proton a neutron. Popište následující pohyb každé z obou částic. Předpokládejte, že energie deutronu se rozdělí stejným dílem na obě vzniklé částice.

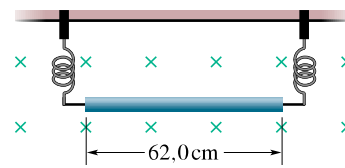
44Ú. Odhadněte celkovou délku dráhy deutronu pohybujícího se v cyklotronu (př. 29.5) během procesu jeho urychlování. Předpokládejte, že urychlovací potenciálový rozdíl mezi duanty cyklotronu je 80 kV.

ODST. 29.7 Ampérova síla

45C. Vodorovným vodičem dálkového elektrického vedení protéká proud 5 000 A ve směru z jihu na sever. Zemské magnetické

pole má indukci $60,0 \mu T$; ta směřuje na sever, přičemž její vektor svírá úhel 70° s vodorovnou rovinou. Určete velikost a směr magnetické síly, která působí na každých 100 m délky vodiče v magnetickém poli Země.

46C. Vodič délky 62,0 cm má hmotnost 13,0 g a je zavěšen na dvou vodivých pružinách. Umístíme jej do magnetického pole o indukci 0,440 T (obr. 29.43). Jaká musí být velikost a směr elektrického proudu protékajícího vodičem, aby v pružinách nevzniklo žádné mechanické napětí?

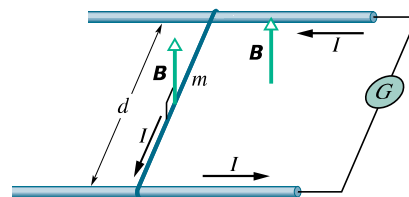


Obr. 29.43 Cvičení 46

47C. Vodičem délky 1,80 m, který svírá úhel 35° se směrem homogenního magnetického pole o indukci 1,50 T, protéká elektrický proud 13,0 A. Určete Ampérovu sílu působící na vodič.

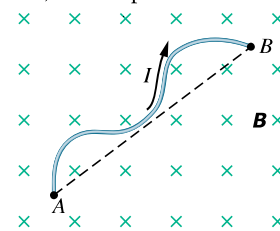
48Ú. Vodičem dlouhým 50 cm a rovnoběžným s osou x protéká proud 0,50 A v kladném směru osy x . Vodič se nachází v magnetickém poli o indukci $\mathbf{B} = (0,003 0\mathbf{j} + 0,010\mathbf{k}) T$. Určete Ampérovu sílu působící na vodič.

49Ú. Kovový vodič má hmotnost m a klouže bez tření po dvou vodorovných kolejnicích s rozchodem d , jak je ukázáno na obr. 29.44. Celá soustava se nachází ve svislém magnetickém poli o indukci \mathbf{B} . Stejnoseměrný elektrický proud I , dodávaný generátorem G, protéká první kolejnicí, vodičem a druhou kolejnicí, kterou se vrací zpět. Určete velikost rychlosti a směr pohybu vodiče jako funkci času za předpokladu, že v čase $t = 0$ byl v klidu.



Obr. 29.44 Úloha 49

50Ú. Na obr. 29.45 je schematicky nakreslen vodič obecného tvaru, kterým protéká elektrický proud I mezi body A a B. Vodič leží v rovině kolmé na směr homogenního magnetického pole \mathbf{B} . (a) Dokažte, že síla působící na vodič je stejně velká



Obr. 29.45 Úloha 50

jako síla působící na přímý vodič s proudem I , který teče přímo z A do B . (*Tip*: Nahraďte vodič lomenou čarou s úseky kolnými a rovnoběžnými s úsečkou AB .) (b) Dokažte, že síla, působící na vodič je nulová, když body A a B jsou uspořádány tak, že vytvářejí uzavřenou smyčku, jejíž plocha je kolmá k magnetické indukci \mathbf{B} .

51Ú. Dlouhým pevným vodičem ležícím v ose x protéká elektrický proud $5,0\text{ A}$ v záporném směru této osy. Magnetická indukce pole \mathbf{B} je dána vztahem $\mathbf{B} = 3,0\mathbf{i} + 8,0x^2\mathbf{j}$, kde x je vyjádřeno v metrech a \mathbf{B} v mT. Vypočítejte Ampérovu sílu působící na $2,0\text{ m}$ dlouhý úsek vodiče, který se nachází mezi body o souřadnicích $x = 1,0\text{ m}$ a $x = 3,0\text{ m}$.

52Ú. Uvažujte o možnosti konstrukce nového typu elektrického vlaku poháněného magnetickou silou, kterou na vodivou nápravu vlaku působí vodorovná složka magnetického pole Země. Elektrický proud teče zdola z jedné z kolejnic vodivým kolem do nápravy a druhým kolem se přes druhou kolejnici vrací zpět do zdroje. (a) Jak velký proud potřebujeme k tomu, aby vznikla nepříliš velká tažná síla 10 kN ? Položte velikost svislé složky magnetického pole Země rovnu $10\text{ }\mu\text{T}$ a délku nápravy $3,0\text{ m}$. (b) Jak bude výkon vlaku ovlivněn elektrickým odporem kolejnic? (c) Je takový vlak nereálný úplně, nebo pouze zdánlivě?

53Ú. Měděná tyč o hmotnosti $1,0\text{ kg}$ leží na dvou vodorovných kolejnicích vzdálených od sebe $1,0\text{ m}$. Kolejnicemi a tyčí protéká proud 50 A . Součinitel statického smykového tření mezi tyčí a kolejnicemi je $0,60$. Při jaké nejmenší velikosti magnetické indukce (nemusí mít nutně svislý směr), bude uvedena tyč do pohybu?

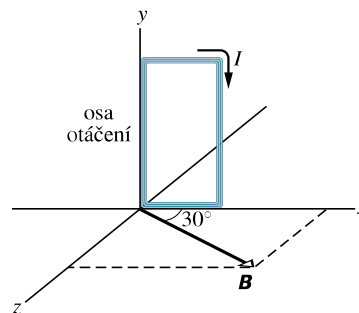
ODST. 29.8 Moment síly působící na proudovou smyčku

54C. Proudovou smyčkou, tvořenou jedním závitem, protéká proud $4,00\text{ A}$. Smyčka má tvar pravouhlého trojúhelníku se stranami $50,0\text{ cm}$, 120 cm a 130 cm . Smyčka se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci velikosti $75,0\text{ mT}$ a směru rovnoběžném se směrem elektrického proudu tekoucího nejdelší stranou smyčky. (a) Určete velikost Ampérové síly působící na každou ze tří stran smyčky. (b) Ukažte, že celková síla působící na smyčku je nulová.

55C. Na obr. 29.46 je obdélníková cívka skládající se z 20 závitů drátu. Strany cívky mají délku 10 cm a 5 cm a protéká jí elektrický proud $0,10\text{ A}$. Osa, kolem níž se může cívka otáčet, má směr její delší strany a je totožná s osou y . Magnetické pole má velikost indukce $0,50\text{ T}$ a směr vektoru \mathbf{B} svírá úhel 30° s rovinou xy , v níž cívka leží. Určete velikost a směr silového momentu působícího na cívku vzhledem k její ose otáčení.

56C. Vodičem délky L protéká elektrický proud I . Dokažte, že zformujeme-li drát do tvaru kruhové cívky, získáme při dané hodnotě magnetické indukce maximální silový moment tehdy, má-li cívka pouze jeden závit. Velikost tohoto momentu je $M = \frac{1}{4\pi}(L^2IB)$.

57Ú. Dokažte, že vztah $M = NISB \sin\theta$ platí pro uzavřenou rovinnou smyčku libovolného tvaru a nikoli pouze pro smyčku



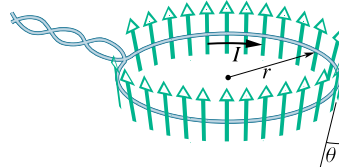
Obr. 29.46 Cvičení 55

obdélníkovou, jaká je na obr. 29.24. (*Tip*: Nahraďte smyčku libovolného tvaru soustavou přilehlých dlouhých, úzkých a obdélníkových smyček, které jsou v limitním případě (tj. $N \rightarrow \infty$) proudově ekvivalentní smyčce obecného tvaru.)

58Ú. Uzavřenou vodivou rovinnou smyčkou protéká elektrický proud I . Smyčka se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci \mathbf{B} a její rovina svírá úhel θ se směrem \mathbf{B} . Dokažte, že výsledná Ampérová síla působící na smyčku je nulová. Platí to také pro nehomogenní magnetická pole?

59Ú. Částice s nábojem Q se pohybuje po kružnici o poloměru r rychlostí o velikosti v . Považujte její kruhovou dráhu za proudovou smyčku, kterou protéká stálý proud o velikosti Q/T , kde T je doba oběhu. Určete maximální moment sil, kterým působí na smyčku homogenní magnetické pole o velikosti B .

60Ú. Na obr. 29.47 je kruhový vodič o poloměru r . Nachází se v rozbíhajícím se magnetickém poli souměrném podle osy smyčky kolmé k její rovině. V místě vodiče má magnetická indukce všude stejnou velikost B a její směr svírá úhel θ s normálou k rovině smyčky. Určete velikost a směr síly, kterou působí magnetické pole na kruhový vodič, protéká-li jím elektrický proud I . (Předpokládejte, že zkroutené přívodní vodiče nevytvářejí znatelné magnetické pole a neovlivní tedy výsledek.)

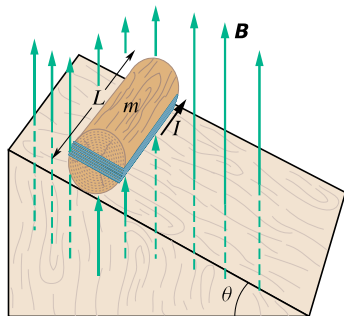


Obr. 29.47 Úloha 60

61Ú. Vnitřní odpor galvanometru je $75,3\text{ }\Omega$. Jeho ručička se vychýlí přes celou stupnici, jestliže cívku galvanometru protéká proud $1,62\text{ mA}$. (a) Určete odpor rezistoru potřebného k přeměně galvanometru na voltmetr, jehož rozsah měření má být $1,00\text{ V}$. Jak musíme tento odpor ke galvanometru připojit? (b) Určete velikost bočnicku, kterým změníme galvanometr na ampérmetr, jehož měřicí rozsah bude $50,0\text{ mA}$. Jak musíme tento odpor ke galvanometru připojit?

62Ú. Obr. 29.48 zobrazuje dřevěný válec o hmotnosti $m = 0,250\text{ kg}$ a délce $L = 0,100\text{ m}$, kolem něhož je v podélném

směru hustě navinuto $N = 10,0$ závitů vodiče. Jaký minimální proud I , protékající cívkou, zabrání válci ve valivém pohybu po nakloněné rovině, jestliže se válec s cívkou nachází v magnetickém poli o indukci $0,500$ T, které je orientováno svisle vzhůru? Rovina závitů cívky je rovnoběžná s nakloněnou rovinou, úhel nakloněné roviny je θ .



Obr. 29.48 Úloha 62

ODST. 29.9 Magnetický dipól

63C. Kruhová cívka se 160 závitů má poloměr $1,90$ cm. (a) Vypočítejte velikost elektrického proudu, který vytvoří magnetický dipólový moment o velikosti $2,30$ A·m². (b) Určete maximální moment sil, kterým na cívku s takovým proudem působí homogenní pole o velikosti magnetické indukce $35,0$ mT.

64C. Magnetický dipólový moment Země je $8,00 \cdot 10^{22}$ J·T⁻¹. Předpokládejte, že vznikl jako výsledek pohybu nábojů ve vnějším tekutém plášti Země na kruhových drahách o poloměru $3\,500$ km. Jaký elektrický proud tyto náboje vytvářejí?

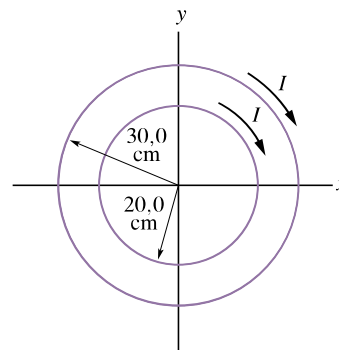
65C. Kruhovou vodivou smyčkou o poloměru $15,0$ cm protéká elektrický proud $2,60$ A. Normála ke smyčce svírá úhel $41,0^\circ$ se směrem indukce homogenního magnetického pole o velikosti $12,0$ T. (a) Určete magnetický moment smyčky. (b) Jaký moment síly působí na smyčku?

66C. Vodivá smyčka, kterou protéká elektrický proud $5,0$ A, má tvar pravouhlého trojúhelníku se stranami 30 cm, 40 cm a 50 cm. Cívka se nachází v homogenním magnetickém poli o indukci velikosti 80 mT, přičemž směr \mathbf{B} je rovnoběžný se směrem proudu tekoucího v nejdelší straně trojúhelníku. Určete (a) velikost magnetického dipólového momentu smyčky a (b) silový moment působící na smyčku.

67C. Poloměr ciferníku nemagnetických nástěnných hodin je 15 cm. Kolem jejich obvodu je navinuto 6 závitů drátu, kterým protéká elektrický proud $2,0$ A ve směru otáčení hodinových ručiček. Hodiny se nacházejí v místě, kde je homogenní vnější magnetické pole o indukci velikosti 70 mT (hodiny jdou zcela přesně). Ve $13,00$ h má hodinová ručička směr vnějšího magnetického pole. (a) Po kolika minutách bude mít minutová ručička stejný směr, jaký má moment síly působící ve vnějším magnetickém poli na závitů protékané proudem? (b) Určete velikost tohoto momentu.

68C. Dvě soustředné smyčky o poloměrech $20,0$ cm a $30,0$ cm leží v rovině xy . Každou z nich protéká ve směru otáčení hodi-

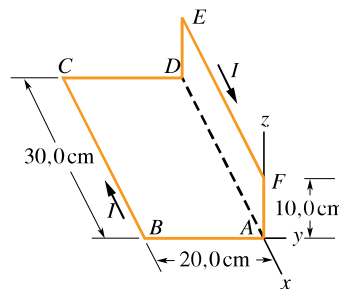
nových ručiček elektrický proud $7,00$ A (obr. 29.49). (a) Určete výsledný magnetický dipólový moment této soustavy smyček. (b) Opakujte vše pro opačný směr proudu ve vnější smyčce.



Obr. 29.49 Cvičení 68

69Ú. Kruhová vodivá smyčka má poloměr $8,0$ cm a protéká jí elektrický proud $0,20$ A. Magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu} = (0,60\mathbf{i} - 0,80\mathbf{j})$ A·m². Jestliže se smyčka nachází v magnetickém poli o indukci $\mathbf{B} = (0,25\mathbf{i} + 0,30\mathbf{k})$ T, určete: (a) moment síly působící na smyčku; (b) potenciální energii smyčky ve vnějším magnetickém poli.

70Ú. Na obr. 29.50 je proudová smyčka $ABCDEF A$, kterou protéká elektrický proud $I = 5,00$ A. Strany smyčky jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, přičemž $|AB| = 20,0$ cm, $|BC| = 30,0$ cm a $|FA| = 10,0$ cm. Vypočítejte velikost a směr magnetického dipólového momentu této smyčky. (Tip: Doplňte stejně velké, ale opačně orientované proudy do přímého úseku AD . Potom vyřešte úkol pro dvě kolmé smyčky $ABCD A$ a $ADEFA$.)



Obr. 29.50 Úloha 70

PRO POČÍTAČ

71Ú. Částice s hmotností m a nábojem Q se pohybuje v homogenním elektrickém poli o intenzitě \mathbf{E} , která má směr osy y , a v homogenním magnetickém poli s magnetickou indukci \mathbf{B} , která má směr osy z . Síla působící na částici je $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ a zrychlení částice je proto $\mathbf{a} = (Q/m)(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Leží-li vektor rychlosti \mathbf{v} v rovině xy , jsou složky zrychlení $a_x = (QB/m)v_y$ a $a_y = (QE/m) - (QB/m)v_x$. Chceme-li získat výrazy pro souřadnice částice,

musíme tyto výrazy dvakrát integrovat. Když částice startuje v čase $t = 0$ z počátku souřadnic s počáteční rychlostí $v_{0,x}$ v kladném směru osy x , potom

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{1}{\omega} \left(\frac{E}{B} - v_{0,x} \right) \sin \omega t$$

a

$$y = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{E}{B} - v_{0,x} \right) (1 - \cos \omega t),$$

kde $\omega = QB/m$. (a) Dosazením ověřte, že tyto vztahy vyhovují pohybovým rovnicím (druhému Newtonovu zákonu). Rov-

něž ověřte, že splňují dané počáteční podmínky. (b) Dosadte $B = 1,2 \text{ T}$, $E = 1,0 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ a $v_0 = 5,0 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a nakreslete trajektorii částice v časovém intervalu $(0; 4,0 \cdot 10^{-6} \text{ s})$. Dráhu můžeme charakterizovat jako kružnici v rovině xy , která se posouvá v kladném směru osy x . Kvalitativně objasněte, proč se pohyb děje podél osy x , když směr intenzity elektrického pole je rovnoběžný s osou y . Nakreslete také trajektorie pro (c) $v_0 = 3,0 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, (d) $v_0 = 6,0 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a (e) $v_0 = 9,0 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. (f) Proč se některé trajektorie protínají samy se sebou a jiné ne? Proč je jednou z nich přímka?

30

Magnetické pole elektrického proudu

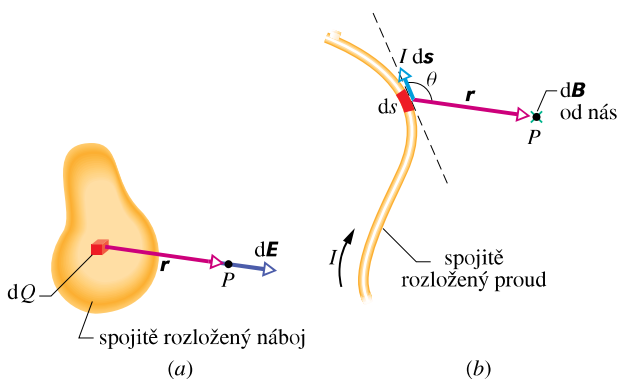


*Takto, pomocí raket a raketoplánů, vysíláme v současné době kosmonauty a dopravujeme materiál do kosmického prostoru. Je to cesta velmi náročná na kvalitu konstrukčních materiálů a paliva. Až však budeme doložit suroviny například na Měsíci nebo asteroidech, budeme potřebovat méně náročný způsob dopravy. Jedním z takových řešení mohou být **elektromagnetické katapulty**. Elektromagnetické dělo je v současné době schopné urychlit střelu z klidu na rychlost 10 km/s během jedné milisekundy. Jak lze dosáhnout tak obrovského zrychlení?*

30.1 MAGNETICKÉ POLE ELEKTRICKÉHO PROUDU

V čl. 29.1 jsme si vysvětlili, že magnetické pole můžeme vytvořit elektrickým proudem, tedy pohybujícím se nábojem. Po pečlivém prostudování celé následující kapitoly bychom měli umět vypočítat magnetické pole vytvořené danou konfigurací elektrických proudů. Budeme postupovat stejně jako v kap. 23, kde jsme určovali elektrické pole vytvořené daným rozložením nábojů.

Zopakujme si stručně základní postup. Nejprve jsme myšleně rozdělili celý náboj (spojitě rozložený) na infinitezimální elementy náboje dQ (obr. 30.1a). Potom jsme vypočítali infinitezimální intenzitu $d\mathbf{E}$ elektrického pole, kterou vytvoří v daném bodě P náboj dQ . Protože pro elektrické pole platí princip superpozice, určili jsme intenzitu v bodě P integrací příspěvků $d\mathbf{E}$ od všech elementů.



Obr. 30.1 (a) Element náboje dQ vytváří elektrické pole o intenzitě $d\mathbf{E}$ v bodě P . (b) Proudový element $I ds$ vytváří magnetické pole o indukci $d\mathbf{B}$ v bodě P . Zelený křížek vyjadřuje směr $d\mathbf{B}$ (kolmo k rovině obrázku, směrem od nás).

Připomeňme, že velikost vektoru $d\mathbf{E}$ vyjádříme vztahem

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2}, \quad (30.1)$$

kde r je vzdálenost bodu P od elementu náboje dQ . Pro kladný element náboje dQ je směr vektoru $d\mathbf{E}$ stejný jako směr vektoru \mathbf{r} , což je vektor, který má počátek v elementu náboje dQ a konec v bodě P (je to tedy průvodič bodu P vůči dQ). Rov. (30.1) pak můžeme přepsat do vektorového tvaru:

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^3} \mathbf{r}. \quad (30.2)$$

Všimněte si, že rov. (30.2) je zákon „převráceného čtverce“ (výraz $d\mathbf{E}$ závisí na převrácené hodnotě r^2 navzdory exponentu 3 ve jmenovateli; ten je tam jenom proto, že jsme jednotkový vektor \mathbf{r}^0 zapsali výrazem \mathbf{r}/r).

Analogicky budeme postupovat při výpočtu *magnetického pole* elektrického proudu. Na obr. 30.1b je tenký vodič obecného tvaru, kterým protéká elektrický proud I . Naším úkolem je vypočítat magnetickou indukci \mathbf{B} v libovolně zvoleném bodě P . Nejdříve myšleně rozdělíme vodič na infinitezimální délkové elementy ds , jejichž délka je ds a které mají směr tečny k vodiči a jsou orientovány ve směru proudu. Je vhodné zavést pojem infinitezimálního *proudového délkového elementu*, daného výrazem $I ds$ (dále pro stručnost pouze **proudový element**), určit indukci magnetického pole $d\mathbf{B}$ vytvořenou v bodě P takovým elementem. Pro magnetickou indukci platí princip superpozice stejně jako pro elektrickou intenzitu, tj. výsledné pole je rovno součtu polí dílčích. Výsledné pole o indukci \mathbf{B} v bodě P vypočteme tedy integrací příspěvků $d\mathbf{B}$ od všech proudových elementů. Rozdíl oproti elektrickému poli je v tom, že zatímco element elektrického náboje dQ , vytvářející elektrické pole, je skalární povahy, má proudový element $I ds$, vytvářející magnetické pole, povahu vektorovou.

Východiskem dalšího výkladu bude vzorec pro velikost magnetické indukce $d\mathbf{B}$, vytvořené v libovolně vybraném bodě P proudovým elementem $I ds$:

$$dB = \frac{\mu_0 I ds \sin \theta}{4\pi r^2}. \quad (30.3)$$

Zde μ_0 je konstanta* nazývaná *permeabilita vakua* neboli *magnetická konstanta*, jejíž hodnotu definujeme přesně:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \doteq \\ &\doteq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}. \end{aligned} \quad (30.4)$$

Vektor $d\mathbf{B}$ má směr daný vektorovým součinem $ds \times \mathbf{r}$ (obr. 30.1b), kde \mathbf{r} je polohový vektor směřující od proudového elementu k bodu P . Rov. (30.3) tedy můžeme zapsat ve vektorovém tvaru:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I ds \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (\text{Biotův-Savartův zákon}). \quad (30.5)$$

Tato vektorová rovnice, stejně jako její skalární tvar rov. (30.3), se nazývá **Biotův-Savartův zákon** (někdy též **Biotův-Savartův-Laplaceův**). Je to zákon, který také patří mezi zákony „převráceného čtverce“, v nichž veličina popisující pole klesá se čtvercem vzdálenosti od svého zdroje (v tomto případě proudového elementu $I ds$).

V našem výkladu bude Biotův-Savartův zákon výchozím zákonem při studiu magnetického pole, obdobně jako byl Coulombův zákon výchozím zákonem pro elektrostatické pole.

* Souvislost μ_0 s ϵ_0 a rychlostí světla c je uvedena v čl. 34.2.

(Magnetické pole je vytvářeno elektrickým proudem; vodič pouze vymezuje, kudy má proud téci. Často však píšeme jen „pole přímého vodiče“, resp. „pole kruhového oblouku“ a neprodujeme zbytečně text zdůrazňováním samozřejmosti, že jde o vodič daného tvaru, kterým protéká proud, tj. že je to „pole elektrického proudu, protékajícího vodičem majícím tvar přímky, resp. kruhového oblouku“.)

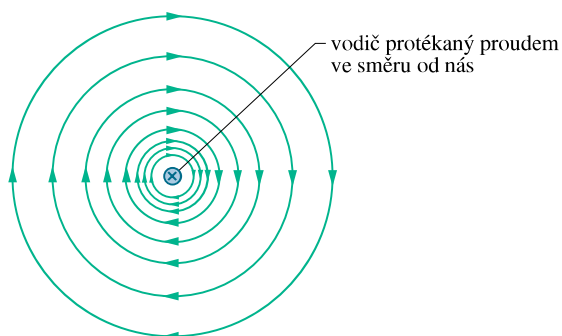
Magnetické pole dlouhého přímého vodiče

Vyjdeme z Biotova-Savartova zákona a dokážeme, že velikost magnetické indukce ve vzdálenosti R od nekonečně dlouhého přímého tenkého vodiče, kterým protéká elektrický proud I , je vyjádřena vztahem

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (\text{dlouhý přímý vodič}). \quad (30.6)$$

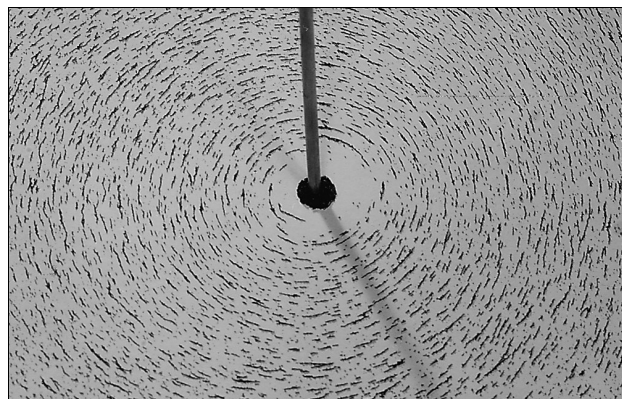
(Zdůrazněme, že v tomto vztahu je R (kolmá) vzdálenost bodu, ve kterém má být určeno B , od vodiče. Naproti tomu v rov. (30.3) a (30.5) — které jsou základní — je r vzdálenost tohoto bodu od proudového elementu.)

Velikost magnetické indukce B v rov. (30.6) závisí pouze na velikosti proudu a vzdálenosti uvažovaného bodu od vodiče. V našem odvození ukážeme, že indukční čáry vektoru magnetické indukce \mathbf{B} mají tvar soustředných kružnic kolem vodiče, jak je ukázáno na obr. 30.2 a jak lze demonstrovat pomocí železných pilin (obr. 30.3). Vzdálenost mezi magnetickými indukčními čarami na obr. 30.2 s rostoucí vzdáleností od vodiče roste tak, jak klesá velikost B v závislosti na R , tj. jako $1/R$.



Obr. 30.2 Magnetické indukční čáry pole vytvořeného proudem, protékajícím dlouhým přímým vodičem, jsou soustředné kružnice se středy ve vodiči (na obrázku jsou tyto čáry zobrazeny v rovinném řezu, kolmém k vodiči). Proud ve vodiči je kolmý na rovinu obrázku a má směr od nás, jak ukazuje křížek.

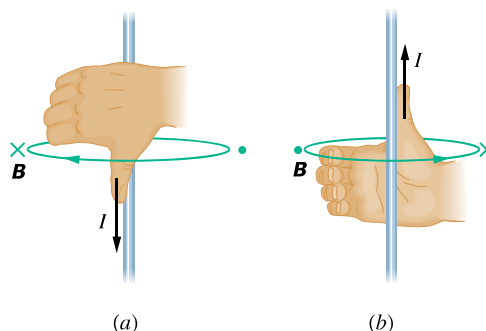
Pro určení směru magnetického pole délkového elementu dlouhého přímého vodiče používáme **pravidlo pravé ruky**:



Obr. 30.3 Železné piliny, kterými byl posypán tuhý papír kolmý na přímý dlouhý vodič protékáný proudem. Piliny se uspořádaly do tvaru soustředných kružnic kolem vodiče. Uspořádání je v souladu se směrem magnetické indukce pole vytvořeného elektrickým proudem ve vodiči.

Položte palec pravé ruky ve směru proudového elementu; zahnuté prsty ukazují směr magnetických indukčních čar.

Použití tohoto pravidla pro dlouhý přímý vodič protékáný proudem (obr. 30.2) vidíme na obr. 30.4a v bočním pohledu. Chceme-li určit směr indukce \mathbf{B} v určitém bodě, obejmeme pravou rukou vodič tak, aby palec byl ve směru proudu. Směr ohnutých prstů potom udává směr magnetické indukce \mathbf{B} v tomto bodě.



Obr. 30.4 Pravidlo pravé ruky určuje směr pole buzeného vodičem. (a) Situace z obr. 30.2 v bočním pohledu. Magnetická indukce \mathbf{B} v každém bodě vlevo od vodiče je kolmá k rovině papíru a má směr prstů pravé ruky. Směřuje tedy od nás, jak je znázorněno křížkem. (b) Jestliže je směr elektrického proudu opačný, potom indukce \mathbf{B} je v každém bodě vlevo od vodiče kolmá k obrázku a směruje k nám, jak je znázorněno tečkou.

Odvození vztahu (30.6)

Obr. 30.5 je obdobou obr. 30.1b s tím rozdílem, že se nyní jedná o přímý dlouhý vodič. Ilustruje to, co chceme vyřešit: hledáme magnetickou indukci \mathbf{B} v bodě P ležícím

ve vzdálenosti R od vodiče. Velikost magnetické indukce, kterou vytvoří v bodě P proudový element $I \, ds$, je dána rov. (30.3):

$$dB = \frac{\mu_0 I \, ds \sin \theta}{4\pi r^2}.$$

Směr magnetické indukce $d\mathbf{B}$ na obr. 30.5 je určen vektorovým součinem $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$, tj. $d\mathbf{B}$ je kolmé na rovinu obrázku a má směr od nás.

Všimněte si, že všechny proudové elementy, na které vodič rozdělujeme, vytvářejí v bodě P příspěvky $d\mathbf{B}$ ve stejném směru.

Velikost magnetické indukce vytvořené v bodě P proudovými elementy z horní poloviny vodiče získáme integrací příspěvků dB (rov. (30.3)) v mezích od nuly do nekonečna. Podle rov. (30.5) má magnetická indukce, kterou v bodě P vytváří symetricky umístěný proudový element z dolní poloviny, tutéž velikost a směr. Magnetická indukce, vytvořená v tomtéž bodě každou z polovin vodiče protékaného proudem, je tedy stejná. Velikost indukce B magnetického pole nekonečně dlouhého přímého tenkého vodiče je tedy

$$B = 2 \int_0^\infty dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta \, ds}{r^2}. \quad (30.7)$$

(B lze samozřejmě vyjádřit také integrálem $B = \int_{-\infty}^\infty dB$.) Proměnné θ , s a r v této rovnici jsou mezi sebou vázány vztahy, které jsou zřejmé z obr. 30.5:

$$r = \sqrt{s^2 + R^2},$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2 + R^2}}.$$

Tyto vztahy dosadíme do rov. (30.7) a integrací (dodatek E) dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\infty \frac{R \, ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}} =$$

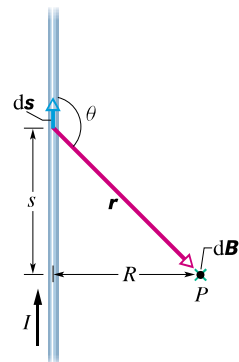
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \left[\frac{s}{(s^2 + R^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (30.8)$$

což jsme chtěli odvodit. Dodejme, že magnetická indukce v bodě P , vytvořená buď horní, nebo dolní polovinou nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaného proudem (obr. 30.5), je rovna polovině této hodnoty, tj.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \quad (\text{polopřímkový vodič s proudem}). \quad (30.9)$$

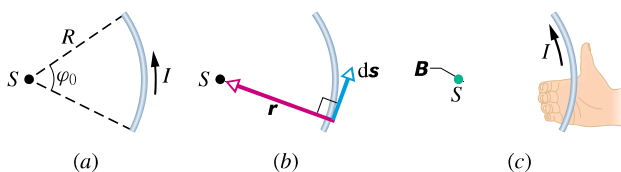
Magnetické pole kruhového oblouku

Chceme-li určit magnetické pole vytvořené proudem protékajícím zakřiveným vodičem, vyjdeme opět z rov. (30.3).



Obr. 30.5 Výpočet magnetického pole proudu I , který protéká dlouhým přímým vodičem o zanedbatelném průřezu. Magnetická indukce $d\mathbf{B}$ v libovolném bodě P je funkcí proudového elementu $I \, ds$, je kolmá k obrázku a má směr od nás.

Vyjádríme nejprve příspěvek magnetické indukce vytvořený proudovým elementem a integrací získáme výslednou magnetickou indukci vytvořenou všemi elementy celého vodiče. V závislosti na tvaru vodiče může být tato integrace značně obtížná; je však snadná, má-li vodič například tvar části kruhového oblouku a zajímá-li nás magnetická indukce pole v jeho středu S .



Obr. 30.6 (a) Vodičem ve tvaru kruhového oblouku se středem S protéká proud I . (b) Pro každý délkový element vodiče je úhel mezi směrem elementu $d\mathbf{s}$ a vektorem \mathbf{r} roven 90° . (c) Určení směru magnetické indukce ve středu S . Pole směřuje kolmo k rovině obrázku ve směru ohnutých prstů pravé ruky, jak je znázorněno barevnou tečkou v bodě S .

Na obr. 30.6a je znázorněn vodič, kterým protéká elektrický proud I a který má tvar části kruhového oblouku se středovým úhlem φ_0 , poloměrem R a středem S . V bodě S vytváří každý proudový element $I \, ds$ magnetickou indukci o velikosti dB danou rov. (30.3). Úlohu usnadňuje i skutečnost, že nezáleží na tom, ve kterém místě vodiče se takový element nachází (obr. 30.6b). Úhel θ , který svírají vektory $d\mathbf{s}$ a \mathbf{r} , je 90° a $r = R$. Proto z rov. (30.3) dostaneme

$$dB = \frac{\mu_0 I \, ds \sin 90^\circ}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I \, ds}{4\pi R^2}. \quad (30.10)$$

Příspěvek k magnetické indukci v bodě S , vytvořený každým proudovým elementem ve tvaru oblouku, má stejnou velikost.

Pomocí pravidla pravé ruky (obr. 30.6c) zjistíme, že všechny příspěvky magnetické indukce $d\mathbf{B}$ od kteréhokoliv místa vodiče mají v bodě S tentýž směr, jsou kolmé k rovině obrázku a směřují k nám. Velikost výsledné magnetické

indukce v bodě S je tedy rovna součtu (integrálu) všech příspěvků dB , daných rov. (30.10). Využijeme-li vztahu $ds = R d\varphi$ (čímž změňme integrační proměnnou s na φ), dostaneme z rov. (30.10)

$$B = \int dB = \int_0^{\varphi_0} \frac{\mu_0 I R d\varphi}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\varphi_0} d\varphi.$$

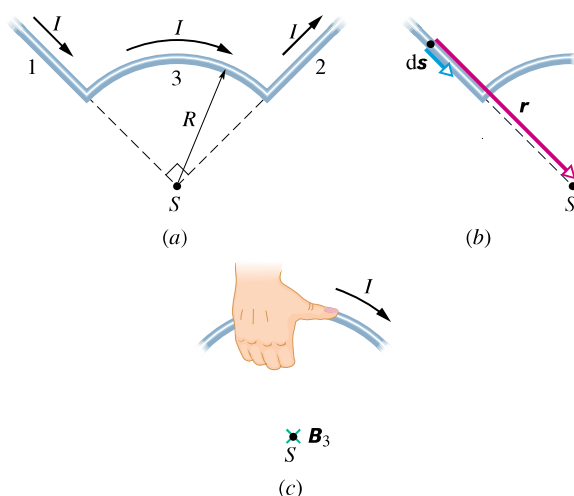
Po jednoduché integraci dostaneme

$$B = \frac{\mu_0 I \varphi_0}{4\pi R} \quad (\text{ve středu kruhového oblouku}). \quad (30.11)$$

Při výpočtech je třeba dosazovat úhel φ_0 v míře obloukové, nikoliv ve stupních. Tato rovnice udává magnetickou indukci pouze ve středu vodiče ve tvaru kruhového oblouku, kterým protéká proud.

PŘÍKLAD 30.1

Vodičem na obr. 30.7a protéká proud I . Vodič je tvořen kruhovým obloukem o poloměru R se středovým úhlem $(\pi/2)$ rad a dvěma přímkovými částmi, jejichž prodloužení se protínají ve středu S oblouku. Určete magnetickou indukci \mathbf{B} v bodě S .



Obr. 30.7 Příklad 30.1. (a) Vodičem složeným ze dvou přímkových částí 1 a 2 a kruhového oblouku 3 protéká proud I . (b) Pro proudový element v přímkovém úseku 1 je úhel mezi vektory ds a r roven nule. (c) Určení směru magnetické indukce \mathbf{B}_3 v bodě S (proud I protéká vodičem v naznačeném směru, magnetické pole je kolmé k rovině obrázku a směřuje od nás).

ŘEŠENÍ: Abychom úlohu vyřešili co nejjednodušším způsobem, rozdělíme vodič myšleně na tři části: (1) polopřímku vlevo, (2) polopřímku vpravo a (3) kruhový oblouk. Poté použijeme rov. (30.3) pro každou z těchto tří částí.

Pro každý proudový element úseku 1 je úhel θ mezi ds a r roven nule (obr. 30.7b). Z rov. (30.3) tedy dostáváme

$$dB_1 = \frac{\mu_0 I ds \sin \theta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I ds \sin 0}{4\pi r^2} = 0.$$

Elektrický proud, protékající přímým úsekem 1 (levá část vodiče), nevytváří tedy žádné magnetické pole v bodě S :

$$B_1 = 0.$$

Stejně je tomu i v případě přímého úseku 2, kdy je úhel θ mezi ds a r roven 180° pro každý proudový element. Tedy

$$B_2 = 0.$$

Poněvadž zakřivená část 3 představuje kruhový oblouk, můžeme využít rov. (30.11) pro výpočet magnetické indukce ve středu kruhu. Dosazením $\varphi = (\pi/2)$ rad dostaneme

$$B_3 = \frac{\mu_0 I (\pi/2)}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{8R}.$$

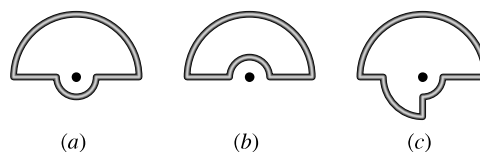
K určení směru magnetické indukce \mathbf{B}_3 použijeme pravidla pravé ruky. Vidíme, že je kolmá k rovině obrázku a směřuje od nás.

Výsledná magnetická indukce \mathbf{B} vytvořená v bodě S proudem protékajícím vodičem má tedy velikost

$$B = B_1 + B_2 + B_3 = 0 + 0 + \frac{\mu_0 I}{8R} = \frac{\mu_0 I}{8R}, \quad (\text{Odpověď})$$

je kolmá k rovině obrázku a míří od nás.

KONTROLA 1: Na obrázku jsou zakresleny tři obvody, obsahující soustředné kruhové oblouky (půlkružnice nebo čtvrtkružnice s poloměry r , $2r$ a $3r$) a radiální přímé úseky. Obvody protéká tentýž proud. Seřadte je sestupně podle velikosti magnetické indukce ve středu oblouků (označeném tečkou).



RADY A NÁMĚTY

Bod 30.1: Pravidlo pravé ruky

Uvádíme přehled různých variant pravidla pravé ruky:

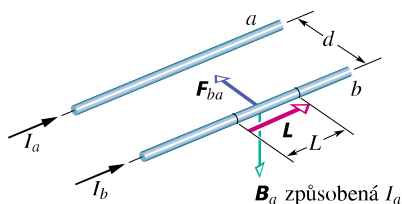
(a) V čl. 3.7 byl uveden postup, jak určit směr vektorového součinu dvou vektorů: orientujme prsty pravé ruky tak, že palec směřuje ve směru prvního vektoru a ukazováček ve směru vektoru druhého. Potom vztyčený prostředník ukáže směr vektorového součinu. V kap. 12 jsme použili tohoto pravidla k určení směru momentu (síly a hybnosti) a v kap. 29 k určení směru síly působící na vodič protékáný proudem v magnetickém poli.

(b) V některých případech (zejména v magnetismu) potřebujeme dát do vzájemného vztahu „zakřivené“ prvky a prvky „rovnné“. K tomu nám nejlépe poslouží ohnuté prsty a vztyčený palec pravé ruky. V čl. 29.8 jsme řešili příklad, kde se vyskytoval proud protékající smyčkou (zakřivený prvek) a normálový vektor \mathbf{n} (přímý prvek) smyčky. Ohneme-li prsty pravé ruky ve směru proudu tekoucího smyčkou, pak vztyčený palec ukazuje směr vektoru \mathbf{n} . To je také směr magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ smyčky.

V tomto odstavci jsme použili variantu (b): abychom určili směr indukčních čar magnetického pole v okolí proudového elementu, položíme vztyčený palec pravé ruky do směru elektrického proudu, tekoucího vodičem. Ohnuté prsty pravé ruky potom ukazují směr indukčních čar magnetického pole.

30.2 DVA ROVNOBĚŽNÉ VODIČE

Dva rovnoběžné vodiče, jimiž protéká elektrický proud, na sebe navzájem silově působí. Určeme tyto síly pro dlouhé tenké vodiče z obr. 30.8; jejich vzdálenost je d a protékají jimi proudy I_a a I_b .



Obr. 30.8 Dva vodiče se souhlasně rovnoběžnými proudy se navzájem přitahují. Indukce \mathbf{B}_a v místě vodiče b je vytvořena proudem tekoucím vodičem a . Výsledná síla \mathbf{F}_{ba} působící na vodič b je způsobena tím, že vodičem protéká elektrický proud v magnetickém poli o indukci \mathbf{B}_a .

Nejprve vyjádříme sílu, kterou působí vodič a na vodič b (obr. 30.8). Elektrický proud, který protéká vodičem a , vytváří kolem něj magnetické pole o indukci \mathbf{B}_a . Právě toto magnetické pole silově působí na vodič b . Abychom tuto sílu mohli vyjádřit, potřebujeme znát velikost a směr magnetické indukce \mathbf{B}_a v místě, kde leží vodič b . Velikost indukce \mathbf{B}_a v každém bodě vodiče b je podle rov. (30.6) rovna

$$B_a = \frac{\mu_0 I_a}{2\pi d}. \quad (30.12)$$

Pravidlo pravé ruky nám ukazuje, že vektor \mathbf{B}_a v místě vodiče b směřuje dolů (obr. 30.8).

Nyní, když známe velikost magnetické indukce pole, můžeme nalézt sílu, kterou působí toto pole na vodič b .

Rov. (29.27) určuje sílu \mathbf{F}_{ba} , kterou působí magnetické pole \mathbf{B}_a na úsek vodiče b délky L :

$$\mathbf{F}_{ba} = I_b \mathbf{L} \times \mathbf{B}_a. \quad (30.13)$$

Na obr. 30.8 jsou vektory \mathbf{L} a \mathbf{B}_a na sebe kolmé. Použitím rov. (30.12) dostaneme

$$F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}. \quad (30.14)$$

Směr vektoru \mathbf{F}_{ba} je dán vektorovým součinem $\mathbf{L} \times \mathbf{B}_a$. Použijeme-li pravidlo pravé ruky v obr. 30.8, zjistíme, že síla \mathbf{F}_{ba} míří k vodiči a . Obecný postup určení síly působící na vodič s proudem je tedy následující:

Sílu, kterou na sebe působí dva vodiče protékané proudem, zjistíme ve dvou krocích: (1) určíme magnetickou indukci \mathbf{B}_2 , kterou vytváří druhý vodič v místě prvního vodiče; (2) určíme sílu, kterou působí pole o indukci \mathbf{B}_2 na první vodič.

Nyní použijeme vyložený postup k výpočtu síly, kterou působí vodič b na vodič a . Zjistíme, že tato síla míří směrem k vodiči b ; odtud plyne, že dva rovnoběžné vodiče, jimiž protékají souhlasně orientované proudy, se navzájem přitahují. Naopak v případě, že proudy ve vodičích jsou orientovány nesouhlasně, se vodiče odpuzují. Tedy:

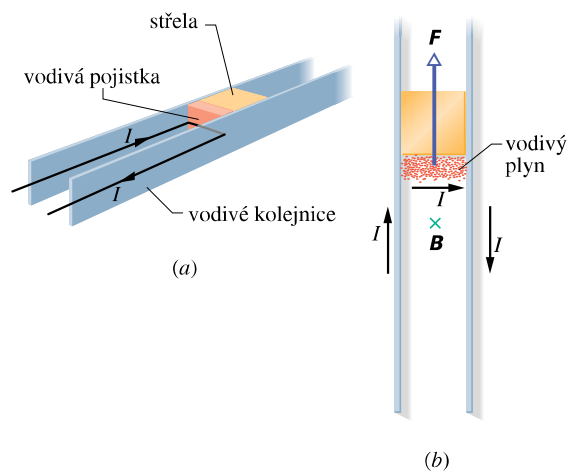
Dva rovnoběžné vodiče protékané souhlasně orientovanými proudy se přitahují, vodiče protékané opačně orientovanými proudy se odpuzují.

Síla působící mezi proudy tekoucími v rovnoběžných vodičích je základem pro definici ampéru, který je jednou ze sedmi základních jednotek soustavy SI. Podle definice přijaté v roce 1946 je ampér definován jako velikost stálého elektrického proudu, který při průtoku dvěma přímými rovnoběžnými a velmi dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu vzdálenými od sebe 1 m ve vakuu vyvolá mezi těmito vodiči sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na jeden metr jejich délky. Tato definice vychází z rov. (30.14) s $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T·m·A⁻¹ (přesně).

Elektromagnetické dělo

Princip elektromagnetického děla je znázorněn na obrázku 30.9a. Elektrický proud prochází první kolejnicí, poté napříč vodivou „pojistkou“ (úzký pásek mědi), která se nachází mezi oběma kolejnicemi, a vrací se druhou kolejnicí zpět do zdroje proudu. Střela, která má být vystřelena, leží na čelní straně pojistky a je uložena volně mezi oběma kolejnicemi. Po zapnutí proudu se pojistka okamžitě roztaví

a vypaří, takže v místě, kde se nacházela, vznikne elektricky vodivý plyn — plazma.



Obr. 30.9 (a) Elektromagnetické dělo v okamžiku, kdy je zapojen proud I . Ten nejprve roztaví a vzápětí vypaří vodivou pojistku. (b) Elektrický proud vytváří mezi kolejnicemi magnetické pole \mathbf{B} . To působí na vodivý plyn (vzniklý vypařením pojistky), který je částí vodivé dráhy, silou \mathbf{F} ; plyn urychlí střelu ve směru podél kolejnic a vystřelí ji.

Pravidlo pravé ruky (obr. 30.4) ukazuje, že elektrický proud v kolejnicích na obr. 30.9a vytvoří mezi nimi magnetické pole, které působí směrem dolů. Toto magnetické pole působí silou \mathbf{F} na vodivý plyn, jímž teče proud I (obr. 30.9b). Z rov. (30.13) a pravidla pravé ruky pro vektorový součin vidíme, že síla \mathbf{F} působí vyznačeným směrem ven podél kolejnic. Plyn vypuzený podél kolejnic tlačí střelu, přičemž jí udělí zrychlení větší než $5 \cdot 10^6 g$. Její rychlost může dosáhnout velikosti až $10 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (to vše proběhne během 1 ms).

PŘÍKLAD 30.2

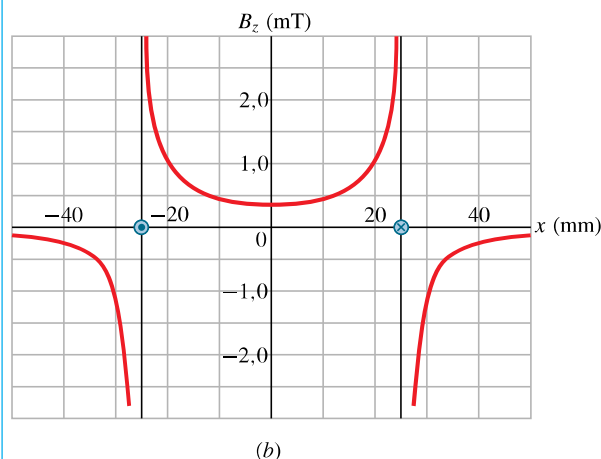
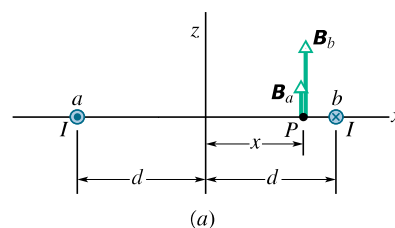
Dvěma dlouhými rovnoběžnými vodiči, vzdálenými od sebe $2d$, protéká stejný proud I v opačných směrech (obr. 30.10a). Odvoďte výraz pro $B_z(x)$, tj. výslednou magnetickou indukci v bodech ve vzdálenosti x od středu spojnice obou vodičů.

ŘEŠENÍ: Použitím pravidla pravé ruky lze z obr. 30.10a ukázat, že magnetická pole vytvořená proudy tekoucími v jednotlivých vodičích mají stejný směr ve všech bodech mezi vodiči. Z principu superpozice a z rov. (30.6) dostaneme pro libovolný bod mezi vodiči:

$$\begin{aligned} B_z(x) &= B_{a,z}(x) + B_{b,z}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+x)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)} = \\ &= \frac{\mu_0 I d}{\pi(d^2 - x^2)}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď}) \quad (30.15)$$

Rozbor tohoto vztahu ukazuje, že (1) závislost $B_z(x)$ je

symetrická vůči záměně $x \leftrightarrow -x$, (2) $B_z(x)$ má mezi vodiči svou minimální hodnotu $\mu_0 I / \pi d$ v bodě $x = 0$ a (3) $B_z(x) \rightarrow \infty$, když $x \rightarrow \pm d$. Pro $x = \pm d$ by bod P ležel na ose jednoho z vodičů. Naše odvození rov. (30.6) však platí pouze pro body vně vodiče, takže rov. (30.15) platí jenom k povrchu vodičů. (Polem uvnitř vodiče se zabýváme v následujícím článku.)



Obr. 30.10 Příklad 30.2. (a) Dva rovnoběžné vodiče, jimiž protékají elektrické proudy téže velikosti v opačných směrech (tj. kolmo k rovině obrázku, směrem k nám a od nás). V bodech mezi vodiči, např. v bodě P , směřují magnetická pole, vytvořená jednotlivými proudy, týmž směrem. (b) Závislost $B_z(x)$ pro $I = 25 \text{ A}$ a vzdálenost obou vodičů 50 mm .

Na obr. 30.10b je vynesena závislost daná rov. (30.15) pro číselné hodnoty $I = 25 \text{ A}$ a $2d = 50 \text{ mm}$. Ponecháváme jako cvičení 31 dokázat, že rov. (30.15) platí i pro všechny body „za vodiči“, tedy pro body, pro které platí $|x| > d$.

PŘÍKLAD 30.3

Na obr. 30.11a jsou dva dlouhé rovnoběžné vodiče, jimiž protékají elektrické proudy I_1 a I_2 v opačných směrech. Určete velikost a směr výsledné magnetické indukce v bodě P . Dosaďte číselné hodnoty $I_1 = 15 \text{ A}$, $I_2 = 32 \text{ A}$ a $d = 5,3 \text{ cm}$.

ŘEŠENÍ: Na obr. 30.11b jsou magnetické indukce \mathbf{B}_1 , resp. \mathbf{B}_2 , polí vytvořených proudy I_1 , resp. I_2 , v bodě P (pomocí pravidla pravé ruky si ověřte, že jejich směry

jsou správné). Velikosti magnetických indukcí těchto polí v bodě P jsou dány rov. (30.6), tedy

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d/\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d} I_1$$

a

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d/\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d} I_2,$$

kde jsme R nahradili veličinou $d/\sqrt{2}$, neboť $R/d = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2$.

Velikost výsledné magnetické indukce \mathbf{B} je

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \frac{\sqrt{2}\mu_0}{2\pi d} \sqrt{I_1^2 + I_2^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1})\sqrt{(15 \text{ A})^2 + (32 \text{ A})^2}}{2\pi(5,3 \cdot 10^{-2} \text{ m})} = \\ &= 1,89 \cdot 10^{-4} \text{ T} \doteq 190 \mu\text{T}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Pro úhel φ mezi vektory \mathbf{B} a \mathbf{B}_2 podle obr. 30.11b platí

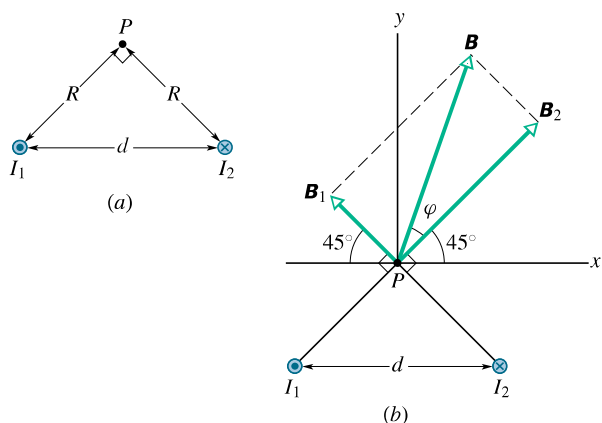
$$\text{tg } \varphi = \frac{B_1}{B_2}.$$

Dosadíme-li za B_1 a B_2 , dostaneme

$$\text{tg } \varphi = \frac{I_1}{I_2} = \frac{(15 \text{ A})}{(32 \text{ A})} = 0,469, \quad \text{odkud } \varphi = 25^\circ.$$

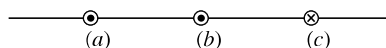
Úhel mezi vektorem \mathbf{B} a osou x je potom

$$\varphi + 45^\circ = 25^\circ + 45^\circ = 70^\circ. \quad (\text{Odpověď})$$



Obr. 30.11 Příklad 30.3. (a) Dvěma vodiči na obrázku protékají proudy I_1 a I_2 v opačných směrech (kolmo k rovině obrázku, směrem k pozorovateli a od něho). Všimněte si pravých úhlů v bodě P . (b) Dílčí pole s magnetickými indukcemi \mathbf{B}_1 a \mathbf{B}_2 se sčítají vektorově.

KONTROLA 2: Na obrázku jsou tři dlouhé, přímé, navzájem rovnoběžné vodiče, kterými protéká stejný proud. Vodič b leží uprostřed mezi vodiči a a c (obrázek). Směr elektrického proudu je vyznačen křížkem a tečkami. Seřaďte vodiče sestupně podle velikosti síly, kterou na každý z nich působí ostatní dva vodiče.



30.3 AMPÉRŮV ZÁKON

Elektrické pole \mathbf{E} libovolně rozložených nábojů lze vypočítat z rov. (30.2). Ta plyne z Coulombova zákona, vyjadřujícího síly působící mezi bodovými náboji. Coulombův zákon však má i svou polní paralelu: je to Gaussův zákon elektrostatiky (24.7), spojující tok intenzity \mathbf{E} elektrického pole s náboji, které pole vytvářejí.

Podobně můžeme vypočítat užitím Biotova-Savartova zákona (30.5) magnetickou indukci \mathbf{B} libovolně rozložených proudů. I tento zákon má však svou polní paralelu: je to Ampérův zákon, spojující cirkulaci vektoru \mathbf{B} s proudy, které pole vytvářejí. A podobně jako Gaussův zákon elektrostatiky nám i Ampérův zákon pomůže také zcela prakticky při řešení úloh s jistou symetrií (rovinnou, válcovou nebo kulovou) v rozložení proudů.

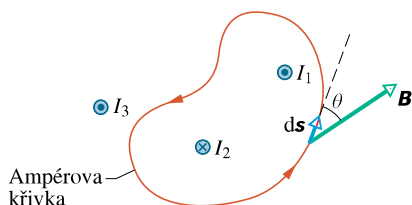
Ampérův zákon (nebo též zákon celkového proudu) má tvar

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_C \quad (\text{Ampérův zákon}). \quad (30.16)$$

Kroužek na znaménku integrálu značí, že integrujeme po uzavřené orientované křivce (libovolného tvaru); ve vztahu k Ampérovu zákonu ji nazýváme *Ampérova křivka*. Její infinitesimální element značíme $d\mathbf{s}$; leží v tečně ke křivce a je orientován souhlasně s ní. Integrál na levé straně nazýváme *cirkulací* vektoru \mathbf{B} . Proud I_C na pravé straně rovnice je součtem všech proudů obepnutých křivkou. (Uvažujeme *všechny* proudy, tedy *celkový* proud protékající plochou *libovolného* tvaru, která je ohraničená Ampérovou křivkou.)

Pro ilustraci použijeme nejprve Ampérův zákon v situaci na obr. 30.12. Jsou na něm znázorněny průřezy tří dlouhých přímých vodičů, jimiž protékají proudy I_1 , I_2 , a I_3 kolmo k rovině obrázku buď směrem k nám, nebo od nás. Zakreslená Ampérova křivka, ležící v rovině obrázku, obepíná dva z proudů, ale nikoliv třetí. Orientaci křivky pro integraci v rov. (30.16) zvolíme proti směru otáčení hodinových ručiček.

Abychom mohli použít Ampérova zákona, rozdělíme myšleně křivku (obr. 30.12) na infinitezimální elementy ds . V místě elementu ds je indukce výsledného magnetického pole, které je vytvořené třemi proudy, rovna \mathbf{B} . Protože vodiče jsou kolmé k rovině obrázku, budou jejich magnetická pole v místě elementu ds ležet v rovině obrázku. Proto také výsledná magnetická indukce \mathbf{B} v místě elementu ds musí ležet v této rovině. Na obr. 30.12 je vektor \mathbf{B} zakreslen v obecném směru svírajícím úhel θ se směrem ds .



Obr. 30.12 Ampérův zákon aplikovaný na (libovolně zvolenou) Ampérovu křivku, která obepíná dva dlouhé přímé vodiče, nikoli však vodič třetí. Všimněte si různých směrů proudů.

Skalární součin $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ na levé straně rov. (30.16) je roven $B \cos \theta ds$. Platí tedy

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B \cos \theta ds.$$

Integrovaný výraz můžeme také chápat jako součin infinitezimální délky ds Ampérovu křivky se složkou $B \cos \theta$ magnetické indukce \mathbf{B} ve směru tečny k Ampérově křivce. Integrace potom vyjadřuje součet všech takových součinů podél celé křivky. Rov. (30.16) má pak tvar

$$\oint B \cos \theta ds = \mu_0 I_c. \quad (30.17)$$

Znaménko každého z proudů, které vytvářejí proud I_c obepnutý křivkou, určuje pravidlo pravé ruky:

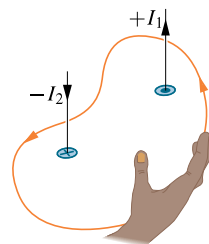
Ohněte prsty pravé ruky kolem Ampérovu křivky tak, aby ukazovaly ve směru její orientace. Potom proudu, který teče ve směru vztyčeného palce, přiřadíme kladné znaménko a proudu tekoucímu opačně znaménko záporné.

Pravidlo pravé ruky použijeme k určení celkového proudu I_c v situaci na obr. 30.13. Při zvolené orientaci na křivce (proti směru otáčení hodinových ručiček) je celkový proud obepnutý smyčkou

$$I_c = I_1 - I_2.$$

(Proud I_3 není obepnut křivkou). Rov. (30.17) můžeme proto přepsat do tvaru

$$\oint B \cos \theta ds = \mu_0 (I_1 - I_2). \quad (30.18)$$



Obr. 30.13 Ampérův zákon a pravidlo pravé ruky pro určení znaménka proudů obepnutých Ampérovou křivkou. Situace odpovídá obr. 30.12.

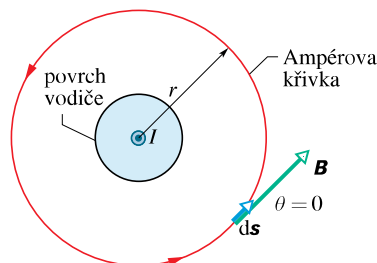
Proud I_3 sice také přispívá k magnetické indukci B , ale nevystupuje na pravé straně rov. (30.18). Lze totiž dokázat, že příspěvek takového proudu, který není obepnut Ampérovou křivkou, k cirkulaci \mathbf{B} (tj. ke křivkovému integrálu na pravé straně rov. (30.16)), je vždy nulový. (Je to situace příbuzná situaci z Gaussova zákona, když náboj ležel vně Gaussovy plochy.) K cirkulaci \mathbf{B} přispívají tedy pouze proudy obepnuté Ampérovou křivkou.

Integrál v rov. (30.18) by byl v situaci znázorněné na obr. 30.12 dosti složitý, výsledek integrace však známe: integrál musí být roven hodnotě $\mu_0 (I_1 - I_2)$, která je dána součtem všech proudů obepnutých křivkou.

Nyní použijeme Ampérova zákona pro dvě situace, ve kterých nám symetrie úlohy umožňuje jednoduše vypočítat integrál v rov. (30.16), resp. (30.17) a z něj určit indukci magnetického pole.

Magnetické pole vně dlouhého přímého vodiče

Na obr. 30.14 je znázorněn dlouhý přímý vodič kolmý k rovině obrázku protékáný proudem I směrem k nám. Podle rov. (30.6) má magnetická indukce \mathbf{B} pole vytvořeného proudem stejnou velikost ve všech bodech, které jsou ve stejné vzdálenosti od vodiče a indukční čáry mají tvar soustředných kružnic se středem ve vodiči. Jinými slovy,



Obr. 30.14 Použití Ampérova zákona k určení magnetického pole kolem dlouhého přímého vodiče, kterým teče proud I . Ampérovu křivku má tvar kružnice se středem uprostřed vodiče (a s poloměrem větším, než je poloměr vodiče).

magnetické pole \mathbf{B} má válcovou symetrii kolem vodiče. Této symetrii můžeme využít ke zjednodušení integrálu v Ampérově zákoně (rov. (30.16)) tak, že obklopíme vodič soustřednou kruhovou Ampérovou křivkou o poloměru r . Magnetická indukce \mathbf{B} má potom stejnou velikost B v každém bodě křivky. Chceme-li provést integraci v rov. (30.16), nemusíme předem znát směr vektoru \mathbf{B} . Můžeme například předpokládat, že \mathbf{B} má směr souhlasný se zvolenou orientací uzavřené křivky. Tato orientace určuje znaménka proudů na pravé straně rov. (30.16) v souladu s pravidlem pravé ruky. Jestliže při výpočtu \mathbf{B} vyjde kladná hodnota, zvolili jsme směr vektoru \mathbf{B} správně. Vyjde-li záporná, má \mathbf{B} směr opačný, než jsme zvolili.

Poněvadž \mathbf{B} a $d\mathbf{s}$ mají stejný směr, je integrál v rovnici (30.17) roven

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint B \cos 0 ds = B \oint ds = B(2\pi r).$$

Připomeňme, že $\oint ds$ v tomto vztahu znamená součet všech infinitezimálních délkových elementů ds podél kružnice. To dává obvod $2\pi r$ kružnice.

Pravidlo pravé ruky přiřazuje kladné znaménko proudu na obr. 30.14, takže pravá strana Ampérova zákona bude rovna $+\mu_0 I$. Proto dostaneme

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

a odtud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (30.19)$$

To je stejný výraz jako rov. (30.6), kterou jsme odvodili již dříve (se značně větší námahou) s použitím Biotova-Savartova zákona. Jelikož rov. (30.19) dává kladnou hodnotu B , je směr vektoru indukce \mathbf{B} orientován tak, jak ukazuje obr. 30.14.

Magnetické pole uvnitř dlouhého přímého vodiče

Na obr. 30.15 je průřez dlouhým přímým vodičem o poloměru R , kterým protéká v průřezu homogenně rozložený elektrický proud I směrem k nám. Protože se jedná o homogenní rozložení proudu, bude také jím vytvořené magnetické pole válcově symetrické. Chceme-li tedy určit magnetické pole v bodech uvnitř vodiče, můžeme znovu s výhodou využít jako Ampérovu křivku kružnici o poloměru $r < R$, jak je ukázáno na obr. 30.15. Ze symetrie úlohy dále plyne, že směr vektoru indukce \mathbf{B} je tečný ke křivce. Levou stranu Ampérova zákona můžeme proto psát ve tvaru

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint ds = B(2\pi r). \quad (30.20)$$

Abychom určili pravou stranu Ampérova zákona, musíme uvážit, že v důsledku homogenního rozložení elektrického proudu (hustota proudu \mathbf{J} je konstantní) bude proud I_c úměrný ploše ohraničené Ampérovou křivkou, tedy

$$I_c = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \quad (30.21)$$

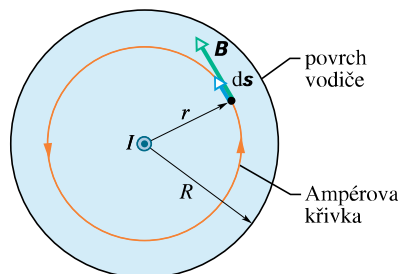
Podle pravidla pravé ruky má I_c kladné znaménko. Z Ampérova zákona tedy plyne

$$B(2\pi r) = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

a odtud

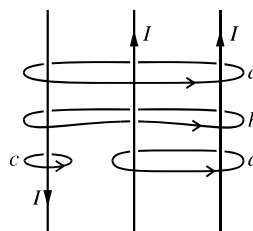
$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r. \quad (30.22)$$

Velikost magnetické indukce B uvnitř vodiče protékaného proudem rozloženým homogenně v jeho průřezu je tedy přímo úměrná vzdálenosti r od jeho osy. Je nulová v jeho středu a maximální na povrchu, kde $r = R$. Všimněte si, že rov. (30.19) pro magnetickou indukci vně vodiče a rov. (30.22) pro magnetickou indukci uvnitř vodiče dávají tutéž hodnotu pro $r = R$, tj. pro povrch vodiče.



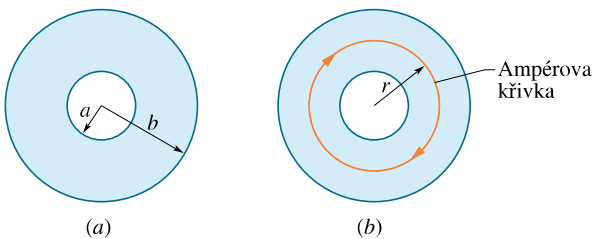
Obr. 30.15 Použití Ampérova zákona k určení magnetické indukce, kterou budí elektrický proud I uvnitř dlouhého přímého vodiče kruhového průřezu. Proud je homogenně rozložen v průřezu a směřuje k nám. Ampérová křivka se nachází uvnitř vodiče.

KONTROLA 3: Na obrázku jsou tři rovnoběžné vodiče se stejně velkými proudy I a čtyři Ampérovu křivky. Seřadte křivky sestupně podle velikosti $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ podél každé z nich.



PŘÍKLAD 30.4

Na obr. 30.16a je nakreslen příčný průřez dlouhého dutého vodivého válce s vnitřním, resp. vnějším poloměrem $a = 2,0$ cm, resp. $b = 4,0$ cm. Válcem protéká proud kolmo k obrázku, směrem k nám, s proudovou hustotou danou vztahem $J = cr^2$, kde $c = 3,0 \cdot 10^6$ A·m⁻⁴ a r je vyjádřeno v metrech. Určete magnetickou indukci \mathbf{B} v bodě, který se nachází ve vzdálenosti 3,0 cm od podélné osy válce.



Obr. 30.16 Příklad 30.4. (a) Průřez vodivým válcem s vnitřním poloměrem a a vnějším poloměrem b . (b) Ampérova křivka o poloměru r pro výpočet magnetického pole ve vzdálenosti r od osy válce.

ŘEŠENÍ: Protože rozložení proudu (a proto i magnetické pole) má válcovou symetrii vzhledem k podélné ose válce, můžeme použít Ampérova zákona k určení magnetické indukce \mathbf{B} . Protože chceme určit indukci ve vzdálenosti 3,0 cm od osy, zvolíme za Ampérovu křivku kružnici o tomto poloměru, se středem v ose válce (obr. 30.16b).

Do Ampérova zákona je třeba dále dosadit pravou stranu, tj. I_c , což je elektrický proud obepnutý Ampérovou křivkou. Nemůžeme předpokládat přímou úměrnost mezi velikostí proudu a obsahem plochy, kterou proud protéká, jak tomu bylo v případě rov. (30.21), neboť proud není v průřezu vodiče rozložen homogenně. Místo toho budeme postupovat jako v př. 27.2b a budeme integrovat proudovou hustotu od vnitřního poloměru válce a až po poloměr křivky r :

$$\begin{aligned} I_c &= \int J \, dS = \int_a^r cr^2 (2\pi r \, dr) = \\ &= 2\pi c \int_a^r r^3 \, dr = 2\pi c \left[\frac{r^4}{4} \right]_a^r = \\ &= \frac{\pi c (r^4 - a^4)}{2}. \end{aligned}$$

Protože Ampérova křivka je na obr. 30.16b orientována ve směru otáčení hodinových ručiček, přiřadíme proudu, který teče k nám, záporné znaménko.

Výpočet levé strany Ampérova zákona (30.16) s přihlédnutím k obr. 30.15 vede opět k hodnotě $B(2\pi r)$. Tím dostáváme

$$B(2\pi r) = -\frac{\mu_0 \pi c}{2} (r^4 - a^4).$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme

$$\begin{aligned} B &= -\frac{\mu_0 c}{4r} (r^4 - a^4) = \\ &= -\frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1})(3,0 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-4})}{4(0,030 \text{ m})} \cdot \\ &\quad \cdot ((0,030 \text{ m})^4 - (0,020 \text{ m})^4) = \\ &= -2,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}. \end{aligned}$$

Magnetická indukce \mathbf{B} má tedy velikost

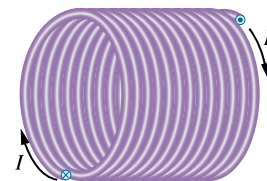
$$B = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ T} \quad (\text{Odpověď})$$

a má směr proti naší zvolené orientaci křivky (obr. 30.16b).

30.4 SOLENOID A TOROID

Magnetické pole solenoidu

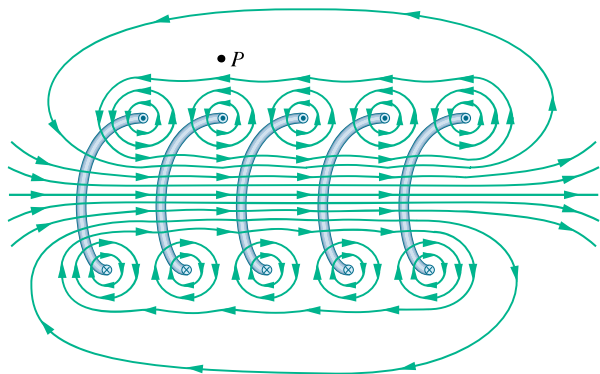
Nyní prostudujeme jinou situaci, ve které lze s výhodou použít Ampérův zákon. Jde o magnetické pole vytvořené proudem v dlouhé, hustě vinuté cívce. Takovou cívku nazýváme **solenoid** (obr. 30.17). Budeme vždy předpokládat, že délka solenoidu je mnohem větší než jeho průměr, takže můžeme zanedbat rušivý vliv začátku či konce vinutí.



Obr. 30.17 Solenoid, kterým protéká proud I .

Na obr. 30.18 je znázorněna část takového solenoidu. Magnetické pole solenoidu je rovno superpozici polí vytvořených jednotlivými závity. V bodech velmi blízkých k povrchu závitu má magnetické pole podobný průběh jako pole dlouhého přímého vodiče: indukční čáry kolem něho jsou tvarem velmi blízké soustředným kružnicím. Na obr. 30.18 vidíme, že v prostoru mezi sousedními závity se magnetická indukce značně zeslabí (v ideálním případě až do vymizení). Také je vidět, že v bodech uvnitř solenoidu dostatečně vzdálených od vinutí (vůči vzdálenosti jednotlivých závitů od sebe) je magnetické pole homogenní a jeho magnetická indukce \mathbf{B} je prakticky rovnoběžná s osou solenoidu; u *ideálního* solenoidu by toto platilo přesně.

V bodech mimo solenoid, např. v bodě P na obr. 30.18, je výsledné magnetické pole tvořeno jednak bližšími částmi závitů solenoidu (\mathbf{B} míří doleva, jak je ukázáno v těsné



Obr. 30.18 Indukční čáry magnetického pole znázorněné v řezu podél osy řídce vinutého solenoidu. Vidíme zde poloviny pěti závitů a magnetické indukční čáry kolem každého z nich. Poblíž osy solenoidu se pole jednotlivých závitů skládají ve výsledné magnetické pole, které má směr této osy. Husté rovnoběžné indukční čáry značí, že toto pole je silné a homogenní. Vně solenoidu jsou indukční čáry od sebe navzájem hodně vzdálené, což ukazuje, že magnetické pole je zde velmi slabé.

blízkosti bodu P , neboť proud v závitěch teče směrem k nám — je značen tečkou), jednak vzdálenějšími částmi závitů (\mathbf{B} míří doprava, neboť proud v závitěch teče směrem od nás — je značen křížkem). Oba příspěvky jsou orientovány proti sobě a v případě ideálního solenoidu se vyruší; magnetické pole v prostoru mimo solenoid je pak nulové. Tyto závěry platí pro reálný solenoid tím lépe, čím je délka solenoidu vůči jeho průměru větší a čím dále je zkoumaný bod P od okrajů solenoidu.

Orientace pole uvnitř solenoidu je určena pravidlem pravé ruky: uchopíme-li solenoid do pravé ruky tak, že prsty směřují ve směru proudu v závitěch, potom vztyčený palec ukazuje směr magnetického pole.

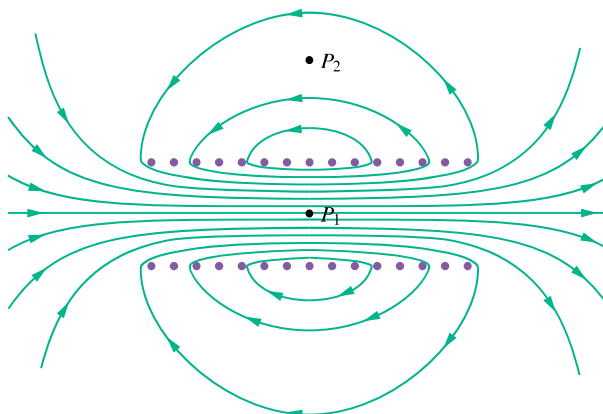
Na obr. 30.19 jsou indukční čáry reálného solenoidu. Jejich vzdálenost v centrální oblasti ukazuje na to, že pole uvnitř solenoidu je poměrně silné a homogenní v celém jeho průřezu. Pole vně solenoidu je však velmi slabé.

Pro výpočet velikosti B magnetické indukce použijme Ampérův zákon

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_c \quad (30.23)$$

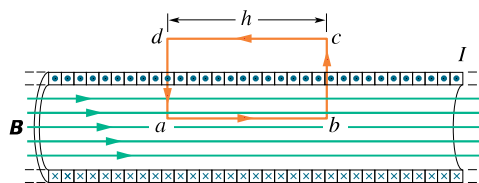
na pravoúhloú křivku $abcd$ nacházející se v ideálním solenoidu (obr. 30.20). Při odvozování předpokládáme, že pole \mathbf{B} uvnitř solenoidu je homogenní a vně solenoidu nulové. Integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ lze rozdělit na součet čtyř integrálů, každý pro jeden ze čtyř úseků pravoúhlé křivky:

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = & \int_a^b \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_b^c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \\ & + \int_c^d \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \int_d^a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (30.24)$$



Obr. 30.19 Indukční čáry znázorňující magnetické pole reálného solenoidu konečné délky. Pole je silné a homogenní uvnitř solenoidu (např. v bodě P_1), ale poměrně slabé vně solenoidu (např. bod P_2).

První integrál na pravé straně rov. (30.24) je roven Bh , kde B je velikost magnetické indukce \mathbf{B} uvnitř solenoidu a h je délka křivky od a do b . Druhý a čtvrtý integrál jsou rovny nule, protože pro každý délkový element těchto úseků je indukce \mathbf{B} buď kolmá k úseku, nebo nulová, takže skalární součin $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ je roven nule. Třetí integrál podél úsečky, která leží mimo solenoid, je nulový, neboť zde je $B = 0$ ve všech bodech mimo solenoid. Integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ je tedy pro celou pravoúhloú křivku roven Bh .



Obr. 30.20 Ampérův zákon pro případ dlouhého ideálního solenoidu, kterým protéká elektrický proud I . Ampérova křivka má tvar obdélníka $abcd$.

Výsledný proud I_c uzavřený v pravoúhlé Ampérově křivce na obr. 30.20 není pouze I , neboť uvnitř cívky se nachází více než jeden závit. Označíme-li počet závitů na jednotku délky n , je

$$I_c = I(nh)$$

a z Ampérova zákona plyne

$$Bh = \mu_0 I n h,$$

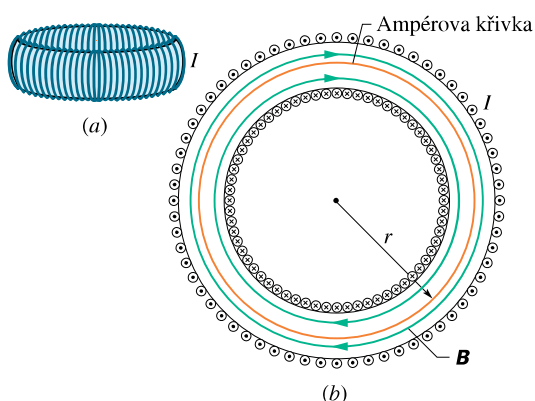
a tedy

$$B = \mu_0 I n \quad (\text{ideální solenoid}). \quad (30.25)$$

Dodejme, že v solenoidu konečné délky je pole poblíž konců slabší a rozbíhá se. I když jsme rov. (30.25) odvodili pro nekonečně dlouhý ideální solenoid, platí dosti dobře i pro reálný solenoid, zajímá-li nás magnetická indukce v bodech uvnitř solenoidu dostatečně daleko od jeho konců. Rov. (30.25) je v dobrém souladu s experimentálním faktem, že B nezávisí na průměru nebo délce solenoidu a že je konstantní v celém jeho průřezu. Solenoidem můžeme vytvořit homogenní magnetické pole podobně jako dvěma rovnoběžnými deskami kondenzátoru vytvoříme dostatečně homogenní pole elektrické.

Magnetické pole toroidu

Na obr. 30.21a je znázorněn **toroid**, který lze jednoduše charakterizovat jako solenoid stočený do tvaru prstence. Magnetickou indukci B uvnitř toroidu můžeme opět určit pomocí Ampérova zákona a využitím symetrie úlohy.



Obr. 30.21 (a) Toroid, kterým protéká elektrický proud I . (b) Průřez toroidem. Magnetické pole uvnitř toroidu můžeme vypočítat pomocí Ampérova zákona.

Z tvaru toroidu můžeme právem usuzovat na to, že indukční čáry vektoru B jsou soustředné kružnice uvnitř toroidu a mají směr zakreslený na obr. 30.21b. Vybereme si jednu takovou kruhovou indukční čáru o poloměru r jako Ampérovu křivku a projdeme ji ve směru otáčení hodinových ručiček. Ampérův zákon (rov. (30.16)) nám potom dává

$$B(2\pi r) = \mu_0 I N,$$

kde I je proud tekoucí toroidem (má zde kladné znaménko) a N je celkový počet závitů. Odtud obdržíme

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \quad (\text{uvnitř toroidu}). \quad (30.26)$$

Z tohoto vztahu vidíme, že na rozdíl od solenoidu není velikost magnetické indukce B konstantní v celém průřezu

toroidu. Pomocí Ampérova zákona lze snadno dokázat, že $B = 0$ pro všechny body ležící mimo *ideální* toroid.

Směr magnetické indukce uvnitř toroidu lze určit pomocí pravidla pravé ruky: uchopíme-li toroid tak, aby prsty pravé ruky směřovaly ve směru proudu v závitěch, pak vztyčený palec určuje směr magnetické indukce pole.

PŘÍKLAD 30.5

Solenoid má délku $L = 1,23$ m, vnitřní průměr $d = 3,55$ cm a protéká jím proud $I = 5,57$ A. Je těsně navinut v pěti vrstvách, z nichž každá má 850 závitů na délce L . Určete velikost magnetické indukce B v jeho středu.

ŘEŠENÍ: Z rov. (30.25) dostaneme

$$B = \mu_0 I n = (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1})(5,57 \text{ A}) \frac{(5 \cdot 850)}{(1,23 \text{ m})} = 2,42 \cdot 10^{-2} \text{ T} = 24,2 \text{ mT}. \quad (\text{Odpověď})$$

Všimněte si, že rov. (30.25) platí i v případě, když má solenoid více než jednu vrstvu závitů, neboť B nezávisí na průměru závitů.

30.5 CÍVKA JAKO MAGNETICKÝ DIPÓL

Dosud jsme se zabývali magnetickým polem dlouhého přímého vodiče, solenoidu a toroidu. Nyní si všimneme podrobněji pole krátké cívky, kterou protéká elektrický proud. V čl. 29.9 jsme dospěli k závěru, že taková cívka se chová ve vnějším magnetickém poli B jako magnetický dipól. Bude tedy na ni působit silový moment M vyjádřený vztahem (29.35), tj.

$$M = \mu \times B, \quad (30.27)$$

kde μ je magnetický dipólový moment cívky, jehož velikost je NIS (N je počet závitů, I je proud tekoucí každým závitěm a S je plošný obsah každého závitě).

Připomeňme (čl. 29.9), že směr vektoru μ je dán pravidlem pravé ruky: uchopíme-li cívku tak, že ohnuté prsty pravé ruky mají směr proudu v závitěch, pak vztyčený palec ukazuje směr dipólového momentu μ .

Magnetické pole cívky

Jaké magnetické pole vlastně vytváří cívka v bodech okolního prostoru? Taková úloha nemá dostatek symetrie, aby ji bylo možné vyřešit jen pomocí Ampérova zákona. Proto musíme vyjít ze zákona Biotova-Savartova, přičemž si úlohu co nejvíce zjednodušíme. Cívku nahradíme pouze jediným kruhovým závitěm se středem v počátku souřadnic

a s osou splývající s osou z . Magnetickou indukci budeme počítat jen na ose závitů, tj. na ose z . Ukážeme, že velikost magnetické indukce je

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (30.28)$$

kde R je poloměr závitů a z je souřadnice bodu, v němž počítáme indukci. Směr indukce \mathbf{B} je stejný jako směr momentu $\boldsymbol{\mu}$. Pro body značně vzdálené od cívky platí $z \gg R$ a předcházející rovnice získá tvar

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}.$$

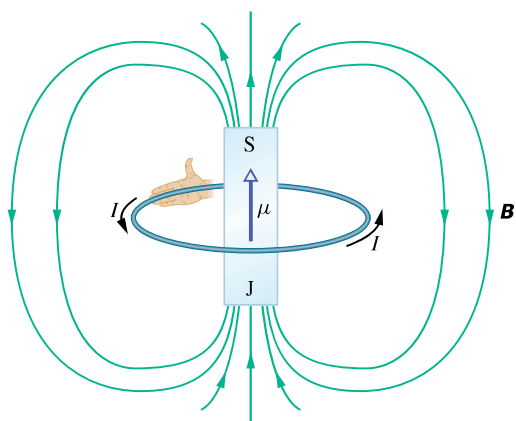
Po dosazení obsahu plochy závitů $S = \pi R^2$ a rozšíření výsledku pro cívku s N závitů můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$B(z) = \frac{\mu_0 N I S}{2\pi z^3}.$$

Protože \mathbf{B} a $\boldsymbol{\mu}$ mají stejný směr a $\boldsymbol{\mu} = N I S$, platí

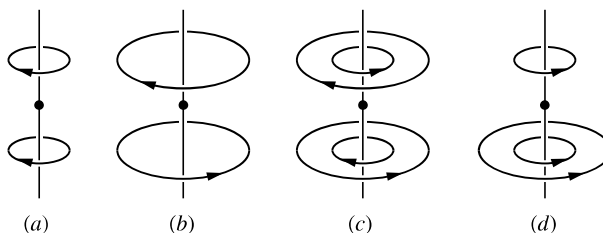
$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0 \boldsymbol{\mu}}{2\pi z^3} \quad (\text{pole na ose cívky}). \quad (30.29)$$

Máme tedy dva důvody, proč chápat cívku, kterou protéká elektrický proud, jako magnetický dipól: (1) vložíme-li ji do vnějšího magnetického pole, působí na ni moment sil; (2) cívka s proudem vytváří své vlastní magnetické pole, které je ve vzdálených bodech na ose cívky dáno rov. (30.29). Na obr. 30.22 je magnetické pole cívky protékané proudem; je podobné poli tyčového magnetu, kde jedno čelo cívky představuje severní pól (ve směru $\boldsymbol{\mu}$) a druhé pól jižní, jak je znázorněno zakreslením stínovaného tyčového magnetu na obrázku.



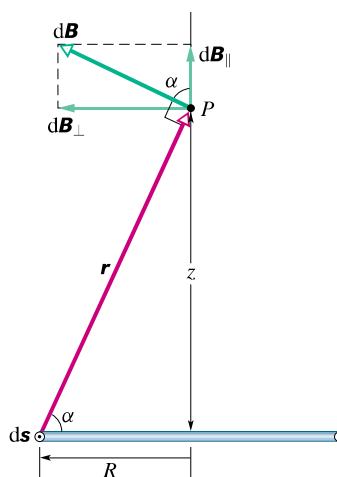
Obr. 30.22 Smyčka protékaná proudem vytváří magnetické pole velmi podobné poli (krátkého) tyčového magnetu. Magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$ smyčky, daný pravidlem pravé ruky, míří od jižního pólu k pólu severnímu, ve směru vektoru magnetické indukce \mathbf{B} uvnitř smyčky.

KONTROLA 4: Na obrázku jsou čtyři skupiny kruhových smyček o poloměrech r a $2r$. Jejich středy leží na společných osách a protékají jimi stejné proudy v označených směrech. Seřadte sestupně tyto skupiny smyček podle velikosti výsledného magnetického pole v bodě označeném tečkou.



Odvození rov. (30.28)

Obr. 30.23 představuje boční pohled na kruhovou smyčku o poloměru R , kterou protéká elektrický proud I . Magnetickou indukci budeme počítat v bodě P na její ose ve vzdálenosti z od roviny smyčky. Vyjdeme z Biotova-Savartova zákona a vypočítáme magnetickou indukci $d\mathbf{B}$ vytvořenou v bodě P proudovým elementem na levé straně smyčky. Vektor $d\mathbf{s}$ tohoto elementu je kolmý k rovině obrázku a směřuje k nám. Vektory $d\mathbf{s}$ a \mathbf{r} jsou navzájem kolmé, rovina jimi tvořená je kolmá k rovině obrázku. Z Biotova-Savartova zákona (a pravidla pravé ruky) plyne, že magnetická indukce $d\mathbf{B}$ vytvořená v bodě P proudovým elementem $I d\mathbf{s}$ je kolmá k rovině tvořené vektory \mathbf{r} a $d\mathbf{s}$, a leží proto v rovině obrázku a je kolmá k vektoru \mathbf{r} .



Obr. 30.23 Smyčka protékaná proudem má poloměr R . Rovina smyčky je kolmá k rovině obrázku. K výpočtu magnetické indukce pole v bodě P na ose smyčky použijeme Biotova-Savartova zákona.

Rozložme nyní magnetickou indukci $d\mathbf{B}$ do průmětu $d\mathbf{B}_{\parallel}$ rovnoběžného s osou z a $d\mathbf{B}_{\perp}$ kolmého k ose z . Ze symetrie úlohy plyne, že vektorový součet všech průmětů $d\mathbf{B}_{\perp}$ je nulový. Zůstávají tedy pouze průměty $d\mathbf{B}_{\parallel}$ rovnoběžné s osou z , a proto můžeme psát

$$B = \int dB_{\parallel}.$$

Pro velikost magnetické indukce $d\mathbf{B}$ vzbuzené elementem vodiče $d\mathbf{s}$ protékaného proudem na obr. 30.23 dostáváme z Biotova-Savartova zákona (rov. (30.3)):

$$dB = \frac{\mu_0 I ds \sin 90^\circ}{4\pi r^2}.$$

Současně platí $dB_{\parallel} = dB \cos \alpha$. Z těchto dvou vztahů dostáváme

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I \cos \alpha ds}{4\pi r^2}. \quad (30.30)$$

Z obr. 30.23 plyne, že veličiny r a α nejsou navzájem nezávislé. Obě vyjádříme pomocí proměnné z , tj. pomocí vzdálenosti bodu P od středu smyčky:

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \quad (30.31)$$

a

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (30.32)$$

Dosažením rov. (30.31) a (30.32) do rov. (30.30) dostaneme

$$dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} ds.$$

Všimněte si, že veličiny I , R a z mají tytéž hodnoty pro všechny elementy ds po celém obvodu smyčky. Integrovaním tedy tuto rovnici, lze je vytknout před integrál a stačí vypočítat pouze velmi jednoduchý integrál $\int ds$, který je roven obvodu kruhové smyčky $2\pi R$. Tedy

$$B = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(R^2 + z^2)^{3/2}} \int ds$$

a odtud

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

což je rov. (30.28), kterou jsme chtěli odvodit.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Biotův-Savartův zákon

Magnetické pole vodiče, kterým protéká elektrický proud, můžeme určit pomocí Biotova-Savartova zákona. Podle tohoto zákona je magnetická indukce $d\mathbf{B}$ vytvořená proudovým elementem $I d\mathbf{s}$ ve vzdálenosti r od tohoto elementu dána vztahem

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (\text{Biotův-Savartův zákon}). \quad (30.5)$$

Zde \mathbf{r} je vektor, který směřuje od elementu $I d\mathbf{s}$ do bodu, v němž určíme magnetickou indukci. Veličina μ_0 je permeabilita vakua: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \doteq 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$.

Magnetické pole dlouhého přímého vodiče

Velikost magnetické indukce pole přímého dlouhého vodiče ve vzdálenosti R od něj je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (\text{dlouhý přímý vodič}). \quad (30.6)$$

Magnetické pole vodiče ve tvaru kruhového oblouku

Velikost magnetické indukce ve středu kruhového oblouku vodiče se středovým úhlem φ_0 a poloměrem R , kterým protéká elektrický proud I , je

$$B = \frac{\mu_0 I \varphi_0}{4\pi R} \quad (\text{ve středu kruhového oblouku}). \quad (30.11)$$

Síla mezi dvěma rovnoběžnými vodiči protékanými proudem

Rovnoběžné vodiče protékané souhlasně orientovanými proudy se navzájem přitahují. Mají-li proudy opačnou orientaci, vodiče se odpuzují. Velikost síly, která působí na jednotku délky L každého z vodičů, je

$$F_{ab} = F_{ba} = I_b L B_a \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 L I_a I_b}{2\pi d}, \quad (30.14)$$

kde d je vzdálenost obou vodičů, I_a a I_b jsou proudy tekoucí vodiči a a b .

Ampérův zákon

Vztah mezi elektrickým proudem a magnetickou indukcí vyjadřuje vedle Biotova-Savartova zákona také Ampérův zákon:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_c \quad (\text{Ampérův zákon}). \quad (30.16)$$

Křivkový integrál počítáme podél uzavřené orientované křivky, která se nazývá *Ampérova křivka*. Proud I_c je celkový elektrický proud, obepnutý křivkou (to znamená celkový proud, který prochází libovolnou plochou, mající za hranici tuto uzavřenou křivku).

Magnetické pole solenoidu a toroidu

Uvnitř *solenoidu* (dlouhé hustě vinuté cívky), kterým protéká elektrický proud I , je v bodech vzdálených od konců solenoidu velikost magnetické indukce rovna

$$B = \mu_0 I n \quad (\text{ideální solenoid}), \quad (30.25)$$

kde n je počet závitů připadající na jednotku délky solenoidu. Uvnitř *toroidu* s N závitů je velikost magnetické indukce B rovna

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \quad (\text{toroid}), \quad (30.26)$$

kde r je vzdálenost mezi středem toroidu a bodem, v němž indukci určujeme. Vně toroidu je $B = 0$.

Pole magnetického dipólu

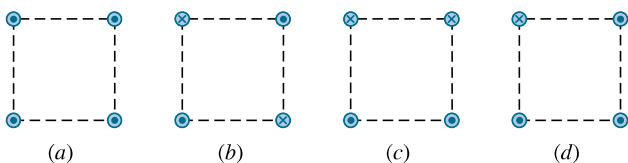
Cívka, kterou protéká elektrický proud, tvoří *magnetický dipól*. V bodě P ležícím na ose cívky je magnetická indukce

$$B(z) = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi z^3}, \quad (30.29)$$

kde μ je dipólový moment cívky a z je souřadnice bodu P na ose cívky (závitu).

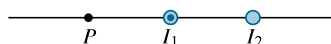
OTÁZKY

1. Na obr. 30.24 jsou 4 různá uspořádání dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku, jimiž protékají stejně velké, ale různě orientované elektrické proudy. Vodiče procházejí vrcholy stejně velkých čtverců. Seřadte tato uspořádání sestupně podle velikosti výsledné magnetické indukce ve středu každého ze čtverců.



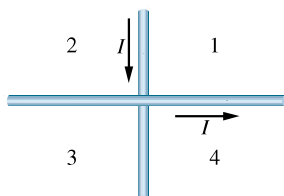
Obr. 30.24 Otázka 1

2. Na obr. 30.25 je průřez dvěma dlouhými přímými vodiči; vodičem na levé straně obrázku protéká proud I_1 kolmo k obrázku směrem k nám. Jestliže víte, že výsledná magnetická indukce vytvořená oběma proudy je v bodě P rovna nule, odpovězte na otázky: (a) Teče proud I_2 v pravém vodiči směrem k nám, nebo od nás? (b) Je proud I_2 větší než I_1 , nebo je mu roven?



Obr. 30.25 Otázka 2

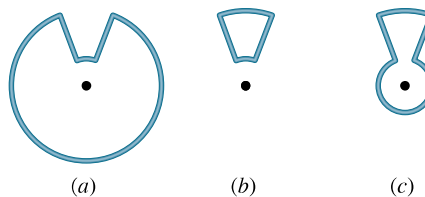
3. Na obr. 30.26 jsou dva dlouhé přímé vodiče, které se těsně kolmo mýjejí, aniž se dotýkají. Ve kterém kvadrantu existují body, v nichž je výsledná magnetická indukce rovna nule?



Obr. 30.26 Otázka 3

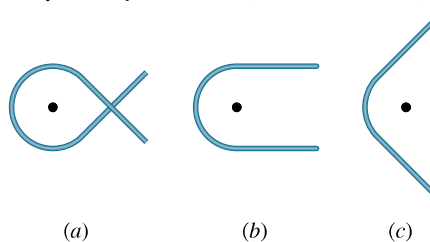
4. Na obr. 30.27 jsou tři smyčky, z nichž každá se skládá ze dvou soustředných kruhových oblouků o poloměrech r a R (kde $R > r$) a dvou radiálních úsečků. Každou ze smyček protéká stejný

elektrický proud a středový úhel vymezený přímými radiálními částmi vodiče je stejný. Seřadte obvody sestupně podle velikosti výsledné magnetické indukce ve středech oblouků vyznačených na obrázku.



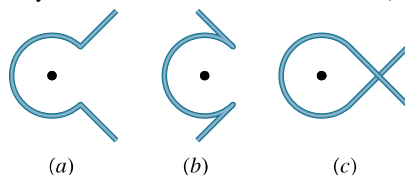
Obr. 30.27 Otázka 4

5. Na obr. 30.28 jsou tři části různých elektrických obvodů, z nichž každá se skládá z vodiče zakřiveného do tvaru kruhového oblouku (všechny mají stejný poloměr) a dvou dlouhých přímých úseků, které mají směr tečny k oblouku. Vodiče se kříží bez dotyku. Každou z těchto částí protéká stejný elektrický proud. Seřadte úseky sestupně podle velikosti magnetické indukce ve vyznačených bodech (středech oblouků).



Obr. 30.28 Otázka 5

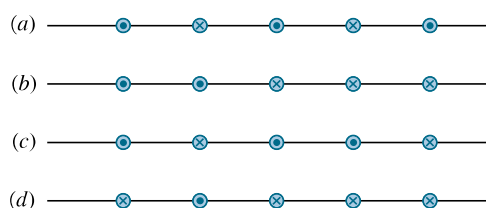
6. Na obr. 30.29 jsou tři úseky různých elektrických obvodů, z nichž každý se skládá z kruhového oblouku (všechny mají



Obr. 30.29 Otázka 6

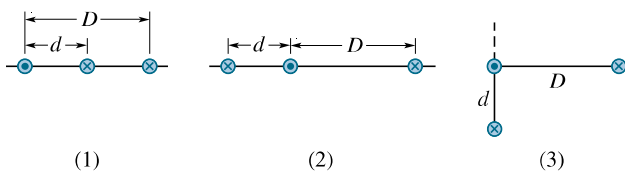
stejný poloměr a středový úhel) a ze dvou dlouhých přímých částí. Přímé části mají v případě úseku a radiální směr a v případě úseků b a c tečný směr; vodiče se kříží bez dotyku. Ve všech třech případech protéká vodiči stejný proud. Seřadte úseky sestupně podle velikosti výsledné magnetické indukce ve středu každého oblouku.

7. Na obr. 30.30 jsou čtyři konfigurace dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku a umístěných stejně daleko od sebe. Vodiči protéká stejný elektrický proud buď směrem k nám, nebo od nás. Seřadte sestupně tyto konfigurace podle velikosti výsledné síly, kterou působí na prostřední vodič ostatní vodiče.



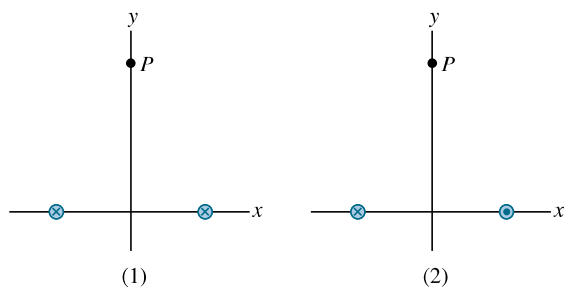
Obr. 30.30 Otázka 7

8. Na obr. 30.31 jsou tři konfigurace dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku, kterými protéká stejný elektrický proud buď směrem k nám, nebo od nás. (a) Seřadte sestupně jednotlivé konfigurace podle velikosti celkové síly, kterou působí ostatní vodiče na ten vodič, jímž teče proud směrem k nám. (b) Jaký je v případě (3) úhel mezi čárkovanou polopřímku a celkovou silou, kterou působí ostatní vodiče na vodič s proudem, tekoucím směrem k nám — je větší, roven, nebo menší než 45° ?



Obr. 30.31 Otázka 8

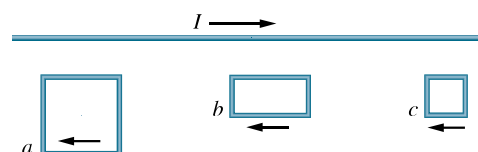
9. Na obr. 30.32 jsou dvě konfigurace dlouhých přímých vodičů kolmých k rovině obrázku, kterými protéká stejný elektrický proud buď směrem od nás, nebo k nám. Oba vodiče jsou stejně vzdáleny od osy y . (a) Pro každou z konfigurací určete směr výsledné magnetické indukce v bodě P . (b) Pro každou konfiguraci dále určete směr síly, kterou by působily oba vodiče na



Obr. 30.32 Otázka 9

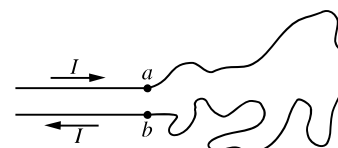
rovnoběžný vodič procházející bodem P a protékaný stejným proudem směrem od nás.

10. Na obr. 30.33 je dlouhý přímý vodič, kterým protéká elektrický proud I směrem doprava. Vedle něho se nacházejí tři vodivé pravoúhlé smyčky, kterými protéká stejně velký elektrický proud v naznačeném směru. Délky stran smyček jsou buď L , nebo $2L$ a všechny strany smyček přilehlé k vodiči mají od něho stejnou vzdálenost. Seřadte sestupně smyčky podle velikosti celkové síly, kterou na ně působí magnetické pole přímého vodiče.



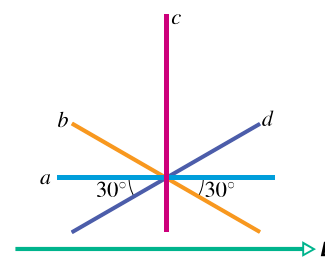
Obr. 30.33 Otázka 10

11. Na obr. 30.34 je vodivá smyčka nepravidelného tvaru položená na hladkém stole tak, že její body a a b jsou ke stolu připevněny. Začne-li smyčkou protékat elektrický proud, změní se její tvar. Bude se smyčka vypínat do tvaru oblouku, nebo se bude stahovat dovnitř?



Obr. 30.34 Otázka 11

12. Na obr. 30.35 je znázorněno homogenní magnetické pole o indukci \mathbf{B} a čtyři přímé úseky stejné délky. Seřadte je sestupně podle velikosti integrálu $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ podél úseků.

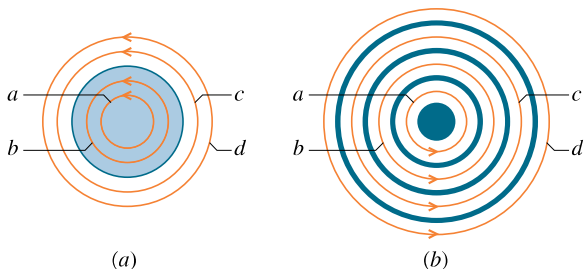


Obr. 30.35 Otázka 12

13. Na obr. 30.36a jsou čtyři Ampérové křivky a , b , c a d . Válcovým vodičem protéká elektrický proud kolmo k obrázku směrem k nám. Proudová hustota má stejnou velikost i směr v celém kruhovém průřezu vodiče. Seřadte tyto křivky sestupně podle velikosti integrálu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ podél každé z nich.

14. Na obr. 30.36b jsou čtyři Ampérové křivky — kružnice a , b , c , d a čtyři dlouhé válcové vodiče. Vodič s nejmenším poloměrem má kruhový průřez a zbývající vodiče jsou duté válce (křivky i vodiče jsou soustředné). Elektrické proudy tekoucí vodiči kolmo k rovině obrázku mají (od nejmenšího poloměru

po největší hodnoty: 4 A (k nám), 9 A (od nás), 5 A (k nám) a 3 A (od nás). Seřadte křivky sestupně podle velikosti integrálu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ podél každé z nich.



Obr.30.36 Otázky 13 a 14

15. Na obr. 30.37 jsou čtyři přímé rovnoběžné vodiče protékány stejnými elektrickými proudy I a pět orientovaných Ampérových křivek obepínajících vodiče. Seřadte tyto křivky sestupně podle velikosti integrálu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$.

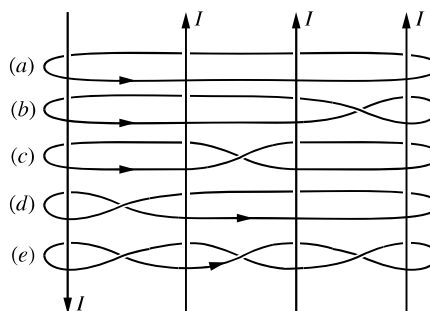
16. Následující tabulka uvádí pro šest ideálních solenoidů o různých poloměrech počet závitů na jednotku délky n a proud I jimi tekoucí. Chceme několik z nich soustředně zasunout do sebe tak, aby výsledná magnetická indukce na společné podélné ose byla nulová. Je to možné udělat pomocí (a) dvou, (b) tří, (c) čtyř

a (d) pěti z nich? Které solenoidy byste použili? Určete směry příslušných proudů.

Solenoid	1	2	3	4	5	6
n	5	4	3	2	10	8
I	5	3	7	6	2	3

17. Polohový vektor částice pohybující se po kružnici o poloměru r je \mathbf{r} . Určete hodnotu integrálu $\oint \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}$ podél této kružnice.

18. Vypočítejte hodnotu integrálu $\oint ds$ podél obvodu (a) čtverce s délkou strany a a (b) rovnostranného trojúhelníka s délkou strany d .



Obr.30.37 Otázka 15

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 30.1 Magnetické pole elektrického proudu

1C. Velikost magnetické indukce v bodě, který je vzdálen 88,0 cm od osy dlouhého přímého vodiče, je $7,30 \mu\text{T}$. Jak velký elektrický proud protéká vodičem?

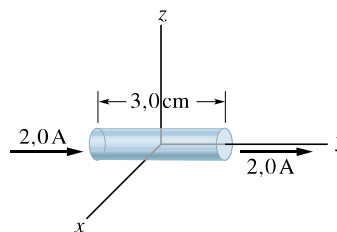
2C. Neizolovaný měděným vodičem (průměr 2,6 mm) může bez přehřátí procházet proud 50 A. Jaká je přitom magnetická indukce na povrchu vodiče?

3C. Zeměměřič určuje zeměpisnou polohu pomocí magnetické buzoly 6,0 m pod elektrickým vedením, kterým protéká stejnosměrný elektrický proud 100 A. (a) Jaká je magnetická indukce vytvořená tímto proudem v místě, kde se nachází buzola? (b) Bude toto vedení nějak ovlivňovat její údaje? Vodorovná složka indukce magnetického pole Země v místě, kde se nachází zeměměřič s buzolou, je $20 \mu\text{T}$.

4C. Elektronové dělo v televizní obrazovce vystřeluje elektrony s kinetickou energií 25 keV v paprsku o průměru 0,22 mm. Za každou sekundu dopadne na obrazovku $5,6 \cdot 10^{14}$ elektronů. Vypočítejte magnetickou indukci, kterou budí paprsek v místě vzdáleném 1,5 mm od své osy.

5C. Na obr. 30.38 je 3,0 cm dlouhý úsek vodiče, kterým protéká elektrický proud 2,0 A ve směru osy y . Úsek vodiče je umístěn tak, že se jeho střed nachází v počátku soustavy souřadnic. Určete magnetickou indukci \mathbf{B} v bodech (a) $(0; 0; 5,0 \text{ m})$, (b) $(0; 6,0 \text{ m}; 0)$, (c) $(7,0 \text{ m}; 7,0 \text{ m}; 0)$ a (d) $(-3,0 \text{ m}; -4,0 \text{ m}; 0)$. Můžete k tomu použít Biotova-Savartova zákona ve tvaru $\mathbf{B} = (\mu_0/4\pi)I\Delta s \sin \theta/r^2$, kam

dosadíte $\Delta s = 3,0 \text{ cm}$ (veličiny r a θ jsou v našem zadání prakticky konstantní pro celý úsek vodiče).



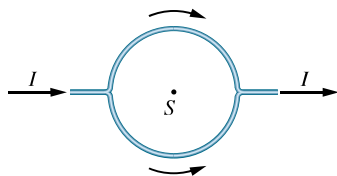
Obr. 30.38 Cvičení 5

6C. Dlouhý vodič, kterým protéká elektrický proud 100 A, se nachází ve vnějším homogenním magnetickém poli o indukci 5,0 mT a je k němu kolmý. Určete body, ve kterých je výsledné magnetické pole rovno nule.

7C. V laboratoři na Filipínách má indukce magnetického pole Země velikost $39 \mu\text{T}$ a směr vodorovně k severu. Ve vzdálenosti 8,0 cm nad dlouhým přímým vodorovným vodičem, kterým protéká elektrický proud I , je výsledná magnetická indukce nulová. Určete (a) velikost a (b) směr elektrického proudu I .

8C. Kladně nabitá částice s nábojem Q se nachází ve vzdálenosti d od dlouhého přímého vodiče, kterým protéká proud I . Částice se pohybuje rychlostí \mathbf{v} kolmo k vodiči. Určete směr a velikost magnetické síly působící na částici, pohybuje-li se (a) směrem k vodiči, (b) směrem od vodiče.

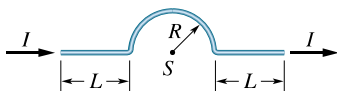
9C. Přímý vodič, kterým protéká proud I , se rozděluje na dva půlkruhové oblouky, jak je ukázáno na obr. 30.39. Určete magnetickou indukci ve středu S kruhové části vodiče.



Obr. 30.39 Cvičení 9

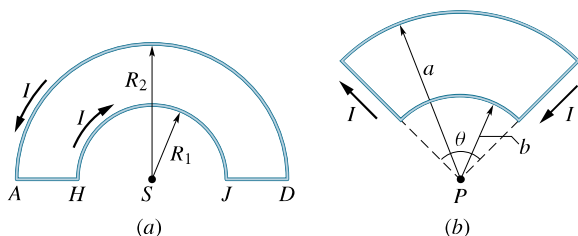
10C. Dlouhým přímým vodičem protéká proud 50 A. Elektron letí rychlostí $1,0 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ve vzdálenosti 5,0 cm od vodiče. Jaká síla na něj působí, letí-li (a) kolmo k vodiči, (b) rovnoběžně s vodičem a (c) kolmo k oběma předcházejícím směrům?

11Ú. Vodičem na obr. 30.40 protéká proud I . Určete v bodě S (středu půlkružnice) magnetickou indukci \mathbf{B} vyvolanou proudem protékajícím (a) v každém z přímých úseků vodiče délky L , (b) v půlkruhovém úseku vodiče o poloměru R , (c) v celém vodiči.



Obr. 30.40 Úloha 11

12Ú. Použijte Biotův-Savartův zákon k výpočtu magnetické indukce \mathbf{B} v bodě S , který je společným středem půlkruhových oblouků AD a HJ (obr. 30.41a). Oba oblouky jsou spojeny tak, že vytvářejí obvod $AHJDA$, kterým protéká proud I .

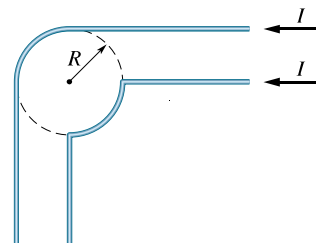


Obr. 30.41 Úlohy 12 a 13

13Ú. Na obr. 30.41b je elektrický obvod skládající se ze dvou kruhových oblouků o poloměrech a a b . Oba jsou propojeny radiálními přímými úseky. Určete magnetickou indukci \mathbf{B} v bodě P (středu oblouků), víte-li, že obvodem protéká proud I .

14Ú. Každým ze dvou nekonečně dlouhých vodičů protéká proud I . Geometrické uspořádání obou vodičů je znázorněno na obr. 30.42. Ukažte, že magnetická indukce ve středu kružnice o poloměru R je stejná jako magnetická indukce ve vzdálenosti R pod jediným nekonečně dlouhým přímým vodičem, jímž protéká proud I směrem doleva.

15Ú. Vlášenska protékána proudem I má tvar podle obr. 30.43. Určete směr a velikost magnetické indukce \mathbf{B} (a) v bodě A , (b) v bodě B . Úlohu řešte numericky pro $R = 5,0 \text{ mm}$ a pro



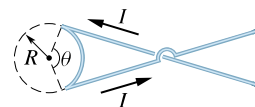
Obr. 30.42 Úloha 14

vzdálenosti AB mnohem větší než R (každý z obou přímkových úseků pokračuje do nekonečna).



Obr. 30.43 Úloha 15

16Ú. Vodič, kterým protéká proud I , má tvar podle obr. 30.44. Jaký musí být úhel θ , aby magnetická indukce \mathbf{B} byla ve středu kružnice nulová?

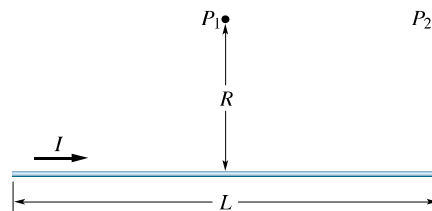


Obr. 30.44 Úloha 16

17Ú. Na obr. 30.45 je přímý vodič, kterým protéká proud I . Dokažte, že velikost magnetické indukce \mathbf{B} , kterou vytváří proud tekoucí úsekem vodiče o délce L v bodě P_1 ve vzdálenosti R od středu úseku, je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}.$$

Dokažte, že tento výraz přechází pro $L \rightarrow \infty$ v rov. (30.6).



Obr. 30.45 Úloha 17 a 18

18Ú. Na obr. 30.45 je úsek přímého vodiče délky L , kterým protéká proud I . Dokažte, že velikost magnetické indukce \mathbf{B} buzené úsekem v bodě P_2 ve vzdálenosti R od konce vodiče je

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \frac{L}{\sqrt{L^2 + R^2}}.$$

19Ú. Čtvercovou smyčkou s délkou strany a protéká proud I . S využitím výsledku úlohy 17 dokažte, že ve středu této smyčky

má magnetická indukce velikost

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

Určete její směr.

20Ú. S využitím výsledku úlohy 17 dokažte, že magnetická indukce ve středu obdélníkové smyčky o délce L a šířce d , kterou protéká proud I , je

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi} \frac{\sqrt{L^2 + d^2}}{Ld}.$$

Ukažte, že pro $L \gg d$ přejde tento výraz do tvaru totožného s výsledkem př. 30.2.

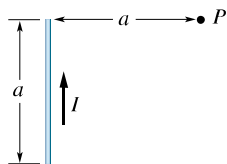
21Ú. Čtvercovou vodivou smyčkou o délce strany a protéká proud I . S využitím výsledku úlohy 17 dokažte, že velikost magnetické indukce v bodě ležícím na ose kolmé k rovině smyčky ve vzdálenosti x od jejího středu je

$$B(x) = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(4x^2 + a^2)\sqrt{4x^2 + 2a^2}}.$$

Dokažte, že tento výsledek souhlasí s výsledkem úlohy 19.

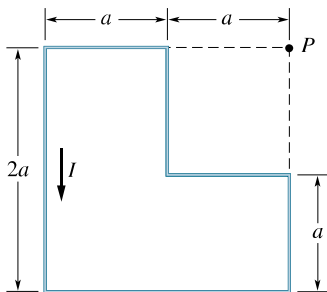
22Ú. Dva vodiče mají stejnou délku L . Jeden má tvar čtverce, druhý tvar kružnice a každým protéká stejný proud I . Dokažte, že magnetická indukce ve středu čtvercové smyčky je větší než ve středu smyčky kružové (viz úlohu 19).

23Ú. Na obr. 30.46 je úsek přímého vodiče délky a , kterým protéká proud I . Dokažte, že velikost magnetické indukce buzené úsekem v bodě P je $B = \sqrt{2}\mu_0 I / (8\pi a)$.



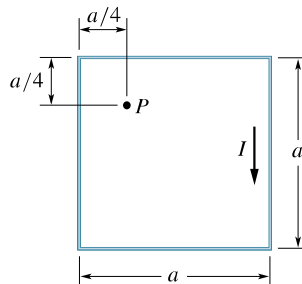
Obr. 30.46 Úloha 23

24Ú. Vypočítejte magnetickou indukci B v bodě P na obr. 30.47 (viz úlohu 23).



Obr. 30.47 Úloha 24

25Ú. Určete magnetickou indukci B v bodě P na obr. 30.48 pro $I = 10 \text{ A}$ a $a = 8,0 \text{ cm}$ (viz úlohy 18 a 23).



Obr. 30.48 Úloha 25

26Ú. Na obr. 30.49 je průřez dlouhého vodiče ve tvaru proužku o šířce D , kterým protéká stejnoměrně rozložený elektrický proud I kolmo k obrázku, směrem od nás. Určete velikost a směr magnetické indukce B v bodě P ležícím v rovině proužku ve vzdálenosti d od jeho hrany. (Tip: Představte si, že proužek je složený z mnoha dlouhých, infinitezimálně tenkých rovnoběžných vodičů.)



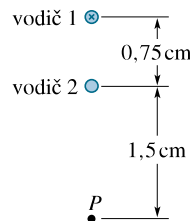
Obr. 30.49 Úloha 26

ODST. 30.2 Dva rovnoběžné vodiče

27C. Dva dlouhé rovnoběžné vodiče leží ve vzdálenosti $8,0 \text{ cm}$ od sebe. Teče jimi stejný proud I . Jak velký musí být, aby magnetická indukce uprostřed mezi vodiči měla velikost $300 \mu\text{T}$? Směr proudů nechť je (a) souhlasný, (b) nesouhlasný.

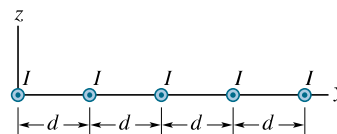
28C. Dvěma dlouhými rovnoběžnými vodiči ve vzdálenosti d protékají proudy I a $3I$ stejným směrem. Určete bod (nebo body), ve kterém se jejich magnetická pole navzájem vynuší.

29C. Dva dlouhé přímé rovnoběžné vodiče vzdálené od sebe $0,75 \text{ cm}$ leží kolmo k rovině obr. 30.50. Vodičem 1 protéká proud o velikosti $6,5 \text{ A}$ směrem od nás. Jaký musí být proud (velikost a směr) ve vodiči 2, aby výsledné magnetické pole v bodě P bylo nulové?



Obr. 30.50 Cvičení 29

30C. Na obr. 30.51 leží pět dlouhých rovnoběžných vodičů v rovině xy . Každým z nich protéká proud $I = 3,00 \text{ A}$

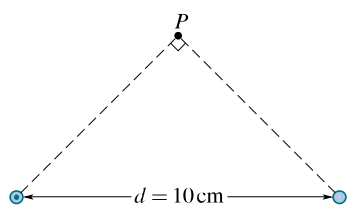


Obr. 30.51 Cvičení 30

v kladném směru osy x . Vzdálenost mezi sousedními vodiči je $d = 8,00$ cm. Určete magnetickou sílu, kterou působí ostatní vodiče na jeden metr délky každého z vodičů. Sílu vyjádřete ve vektorovém tvaru pomocí jednotkových vektorů $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

31C. Pro rovnoběžné vodiče z př. 30.2 dokažte, že rov. (30.15) platí i pro body vně celé konfigurace, tj. pro body se souřadnicí $x > d$ nebo $x < -d$.

32C. Každým ze dvou dlouhých rovnoběžných vodičů, vzdálených od sebe 10 cm, protéká proud 100 A. Oba vodiče leží kolmo k rovině obrázku a bod P je od obou stejně vzdálen (obr. 30.52). Určete směr a velikost magnetické indukce v bodě P , jestliže proud levým vodičem teče směrem k nám a proud pravým vodičem teče (a) směrem k nám a (b) směrem od nás.



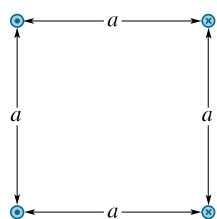
Obr. 30.52 Cvičení 32

33Ú. Předpokládejme, že oba proudy tekoucí vodiči na obrázku 30.10a mají stejný směr, k nám. Dokažte, že magnetická indukce v rovině určené oběma vodiči je

$$B_z(x) = \frac{\mu_0 I x}{\pi(x^2 - d^2)}.$$

Dosaďte hodnoty $I = 10$ A, $d = 2,0$ cm a vynesete graficky závislost $B_z(x)$ v intervalu -2 cm $< x < 2$ cm. Průměr vodiče pokládejte za zanedbatelně malý.

34Ú. Čtyři dlouhé vodiče jsou navzájem rovnoběžné a procházejí vrcholy čtverce se stranami $a = 20$ cm kolmo k jeho rovině. Každým z vodičů protéká proud $I = 20$ A ve směru podle obr. 30.53. Určete velikost a směr magnetické indukce \mathbf{B} ve středu čtverce.



Obr. 30.53 Úlohy 34, 35 a 36

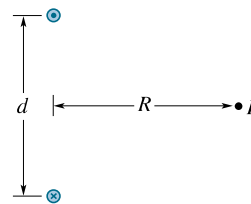
35Ú. Předpokládejme, že vodiči na obr. 30.53 nyní protékají proudy I o stejné velikosti a stejným směrem k nám. Určete směr a velikost magnetické síly působící na jednotku délky každého z vodičů.

36Ú. Určete velikost a směr magnetické síly působící na jednotku délky vodiče, který je umístěn na obr. 30.53 dole vlevo. Každým z vodičů protéká proud I v naznačeném směru.

37Ú. Každým ze dvou dlouhých přímých vodičů, umístěných ve vzdálenosti d od sebe, protéká proud I v opačném směru (obr. 30.54). (a) Dokažte, že velikost magnetické indukce v bodě P , který je stejně vzdálen od každého z vodičů, je dána vztahem

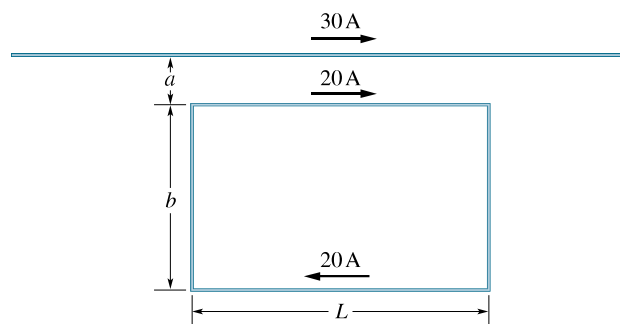
$$B = \frac{2\mu_0 I d}{\pi(4R^2 + d^2)}.$$

(b) Jaký směr má magnetická indukce \mathbf{B} v tomto bodě?



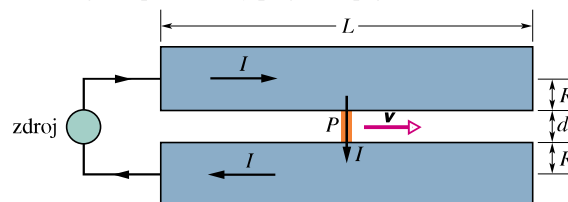
Obr. 30.54 Úloha 37

38Ú. Na obr. 30.55 protéká dlouhým přímým vodičem proud 30 A a obdélníkovou smyčkou proud 20 A. Vypočítejte výslednou sílu působící na smyčku. Dosaďte hodnoty $a = 1,0$ cm, $b = 8,0$ cm a $L = 30$ cm.



Obr. 30.55 Úloha 38

39Ú. Na obr. 30.56 je idealizované schéma principu elektromagnetického děla. Projektil je umístěn mezi dvěma širokými kolejnicemi s kruhovým průřezem. Elektrický proud protéká z jedné kolejnice přes vodivý projektil (pojistka není zakreslena)



Obr. 30.56 Úloha 39

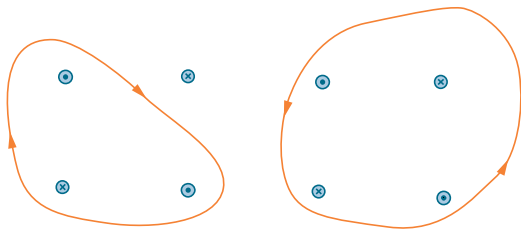
do druhé kolejnice a zpět do zdroje. (a) Nechť d je vzdálenost mezi kolejnicemi, R poloměr každé z nich a I proud, který jimi protéká. Dokažte, že síla působící na projektil má směr doprava podél kolejnic a její velikost je vyjádřena přibližným vztahem

$$F = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \ln \frac{d+R}{R}.$$

(b) Projektil se začne pohybovat od levého konce děla až k jeho ústí. Určete velikost rychlosti v , kterou byl vystřelen. Dosadte hodnoty $I = 450 \text{ kA}$, $d = 12 \text{ mm}$, $R = 6,7 \text{ cm}$, $L = 4,0 \text{ m}$ a hmotnost projektilu $m = 10 \text{ g}$.

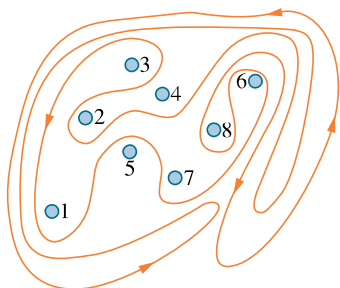
ODST. 30.3 Ampérův zákon

40C. Každým z osmi vodičů na obr. 30.57 protéká proud $2,0 \text{ A}$ kolmo k obrázku ve vyznačeném směru. Na obrázku jsou zakresleny dvě Ampérové křivky pro výpočet integrálu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$. Jaká je jeho hodnota pro křivku (a) v levé, (b) v pravé části obrázku?



Obr. 30.57 Cvičení 40

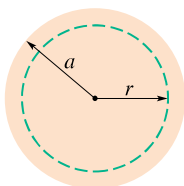
41C. Každý z osmi dlouhých přímých vodičů je kolmý k rovině obr. 30.58. Vodičem číslo k ($k = 1, 2, \dots, 8$) protéká proud kI . Lichými vodiči protéká proud směrem k nám, sudými naopak od nás. Určete integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ po uzavřené křivce v naznačeném směru.



Obr. 30.58 Cvičení 41

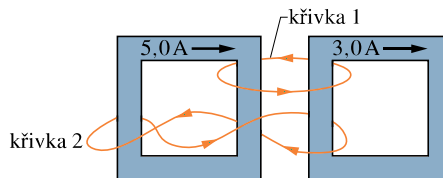
42C. Prostorem protéká elektrický proud v kladném směru osy z s konstantní proudovou hustotou $15 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$. Určete hodnotu integrálu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ po lomené Ampérově křivce vedoucí po úsečkách od bodu $(4d, 0, 0)$ přes $(4d, 3d, 0)$ a $(0, 0, 0)$ zpět do $(4d, 0, 0)$, kde $d = 20 \text{ cm}$.

43C. Na obr. 30.59 je průřez dlouhým válcovým vodičem o poloměru a , kterým protéká homogenně rozložený proud I . Dosadte hodnoty $a = 2,0 \text{ cm}$ a $I = 100 \text{ A}$ a nakreslete závislost $B(r)$ pro $0 < r < 6,0 \text{ cm}$.



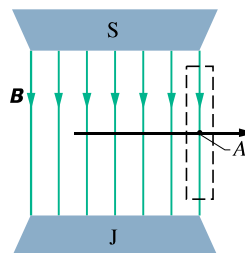
Obr. 30.59 Cvičení 43

44Ú. Dvěma vodivými smyčkami čtvercového tvaru protékají proudy $5,0 \text{ A}$ a $3,0 \text{ A}$, jak je ukázáno na obr. 30.60. Určete hodnotu integrálu $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ pro každou ze dvou uzavřených křivek, vyznačených na obrázku červenou barvou.



Obr. 30.60 Úloha 44

45Ú. Dokažte, že homogenní magnetické pole o indukci \mathbf{B} nemůže od bodu A klesnout ve směru šipky náhle k nule, jak by se zdálo z obr. 30.61. (Tip: Použijte Ampérův zákon pro případ pravoúhlé křivky, naznačené na obrázku čárkovaně.) U reálných magnetů se vždy setkáme s rozptylem indukčních čar magnetického pole, což znamená, že magnetická indukce \mathbf{B} klesá k nule postupně. Opravte indukční čáry zakreslené na obrázku, aby byly reálnější.

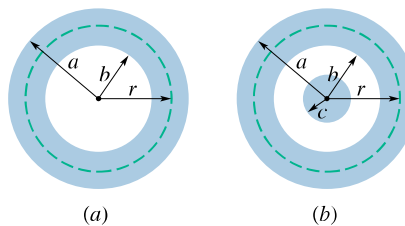


Obr. 30.61 Úloha 45

46Ú. Na obr. 30.62a je průřez dutého válcového vodiče, jehož vnější, resp. vnitřní poloměry jsou a , resp. b . Vodičem protéká proud I homogenně rozložený v celém průřezu. (a) Dokažte, že závislost $B(r)$ pro $b < r < a$ má tvar

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a^2 - b^2)} \frac{r^2 - b^2}{r}.$$

(b) Dokažte, že pro $r = a$ dává tato rovnice velikost magnetické indukce vně dlouhého přímého vodiče, pro $r = b$ bude výsledná magnetická indukce rovna nule a pro $b = 0$ dostaneme vztah pro magnetickou indukci uvnitř plného vodiče. (c) Dosadte hodnoty $a = 2,0 \text{ cm}$, $b = 1,8 \text{ cm}$ a $I = 100 \text{ A}$ a vynesete závislost $B(r)$ pro r v intervalu $0 < r < 6 \text{ cm}$.

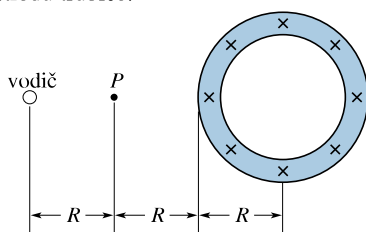


Obr. 30.62 Úlohy 46 a 47

47Ú. Na obr. 30.62b je řez dlouhým přímým koaxiálním kabelem. Každým z vodičů protéká co do velikosti stejný, ale co do směru opačný proud I homogenně rozložený v jejich průřezu. Odvoďte výraz pro závislost $B(r)$ v intervalech (a) $r < c$, (b) $c < r < b$, (c) $b < r < a$, (d) $r > a$. (e) Diskutujte výrazy s ohledem na všechny zvláštní případy, které mohou nastat. (f) Pro hodnoty $a = 2,0$ cm, $b = 1,8$ cm, $c = 0,40$ cm a $I = 120$ A vynesete závislost $B(r)$ pro r v intervalu $0 < r < 3$ cm.

48Ú. Hustota elektrického proudu uvnitř dlouhého válcového vodiče o poloměru a má směr jeho osy a její velikost klesá se vzdáleností r od osy podle vztahu $J = J_0 r/a$. Určete magnetickou indukci $B(r)$ uvnitř vodiče.

49Ú. Dlouhou přímou trubicí s kruhovým průřezem o vnějším poloměru R protéká homogenně rozložený proud I ve směru od nás (obr. 30.63). Dlouhý přímý vodič zanedbatelného průřezu je rovnoběžný s osou trubice; vzdálenost mezi vodičem a osou trubice je $3R$. Určete, jakou velikost a směr musí mít elektrický proud tekoucí vodičem, aby výsledná magnetická indukce v bodě P měla stejnou velikost, ale opačný směr, než má magnetická indukce ve středu trubice.



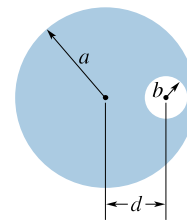
Obr. 30.63 Úloha 49

50Ú. Na obr. 30.64 je průřez dlouhým přímým vodičem válcového tvaru o poloměru a s válcovou dutinou o poloměru b . Osa válce a dutiny jsou rovnoběžné a jejich vzdálenost je d . Proud I je ve vodiči rozložen homogenně v celém barevně vyznačeném průřezu. (a) Na základě principu superpozice dokažte, že magnetická indukce ve středu dutiny má velikost

$$B = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2 - b^2)}.$$

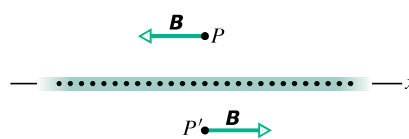
(b) Diskutujte dva zvláštní případy, kdy $b = 0$ nebo $d = 0$. (c) Pomocí Ampérova zákona dokažte, že magnetické pole v dutině je homogenní. (Tip: Představte si dutinu jako vodič, kterým proudí dva co do velikosti sobě rovné, ale co do směru opačné proudy, které se navzájem ruší. Předpokládejte, že každý z těchto proudů má stejnou hustotu, jako je hustota proudu ve vodiči mimo dutinu. Potom sečtěte magnetické indukce obou plných válců o poloměrech a a b ; proud v každém válci má stejnou proudovou hustotu.)

51Ú. Na obr. 30.65 je průřez nekonečně vodivé desky, kterou protéká proud kolmo k obrázku směrem k nám (proud připadající na jednotku délky ve směru osy x je λ). (a) Využijte symetrie úlohy a pomocí Biotova-Savartova zákona dokažte,



Obr. 30.64 Úloha 50

že pro všechny body P nad deskou a všechny body P' pod ní je magnetická indukce \mathbf{B} rovnoběžná s rovinou desky a má směr podle obrázku. (b) Využitím Ampérova zákona dokažte, že $B = \frac{1}{2}\mu_0\lambda$ pro všechny body P a P' .



Obr. 30.65 Úloha 51

52Ú*. Magnetická indukce v určité oblasti prostoru je dána vztahem $\mathbf{B} = (3,0\mathbf{i} + 8,0(x^2/d^2)\mathbf{j})$ mT, kde d je konstanta s rozměrem délky a x i d jsou vyjádřeny v metrech. Víme, že toto pole je způsobeno elektrickým proudem. (a) Vypočítejte integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ po lomené Ampérově křivce vedoucí po úsečkách z bodu $(0, 0, 0)$ přes $(d, 0, 0)$, $(d, d, 0)$ a $(0, d, 0)$ zpět do $(0, 0, 0)$. (b) Dosadte hodnotu $d = 0,50$ m do výrazu pro indukci \mathbf{B} a pomocí Ampérova zákona vypočítejte velikost elektrického proudu tekoucího ve směru kolmém ke čtverci o délce strany $0,5$ m. Čtverec leží v prvním kvadrantu roviny xy a má jeden z vrcholů v počátku soustavy souřadnic. (c) Teče tento proud ve směru jednotkového vektoru $+\mathbf{k}$, nebo $-\mathbf{k}$?

ODST. 30.4 Solenoid a toroid

53C. Solenoid s 200 závitů má délku 25 cm, průměr 1,0 cm a protéká jím proud 0,30 A. Vypočítejte velikost magnetické indukce \mathbf{B} v dutině solenoidu.

54C. Solenoid dlouhý 95,0 cm má poloměr 2,00 cm a jeho 1 200 závitů protéká proud 3,60 A. Určete velikost magnetické indukce \mathbf{B} v dutině solenoidu.

55C. Solenoidem o délce 1,30 m a průměru 2,60 cm protéká proud 18,0 A. Magnetická indukce uvnitř tohoto solenoidu je 23,0 mT. Vypočítejte délku vodiče, z něhož je solenoid navinut.

56C. Toroid byl vytvořen stočením solenoidu (s 500 čtvercovými závitů o délce strany 5 cm) do prstence s vnitřním průměrem 50 cm. Určete magnetickou indukci uvnitř toroidu v bodech (a) těsně nad vnitřním poloměrem, (b) těsně pod vnějším poloměrem (je větší o 5,00 cm), jestliže jím protéká proud 0,800 A.

57C. Dokažte, že v případě, kdy tloušťka toroidu je velmi malá ve srovnání s jeho poloměrem (velmi tenký toroid), přechází rov. (30.26) pro magnetickou indukci uvnitř toroidu na rov. (30.25) pro magnetickou indukci uvnitř solenoidu. Objasněte, proč se tento výsledek dá očekávat.

58Ú. Považujte ideální solenoid za tenký válec, po jehož plášti krouží kolem jeho osy proud o velikosti λ na jednotku délky osy. Dokažte, že velikost magnetické indukce uvnitř takového solenoidu je vyjádřena vztahem $B = \mu_0 \lambda$. To je zároveň velikost změny indukce \mathbf{B} při přechodu z vnitřku solenoidu ven přes jeho stěnu (vně ideálního solenoidu je magnetická indukce nulová). Ukažte, že se stejnou změnou indukce se setkáte při průchodu skrz nekonečně velkou desku protékající proudem podle obr. 30.65. Překvapila vás ta shoda?

59Ú. V čl. 30.4 jsme odvodili, že velikost magnetické indukce uvnitř toroidu závisí na vzdálenosti r od jeho osy (obr. 30.21) vztahem

$$B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}.$$

Dokažte, že při přechodu přes vnější plášť toroidu bude velikost změny indukce \mathbf{B} rovna právě $\mu_0 \lambda$, nezávisle na r . (Délková hustota λ elektrického proudu má též význam jako v úloze 58.) Srovnajte tento výsledek s tím, který jsme získali v úloze 58. Není ta shoda překvapující?

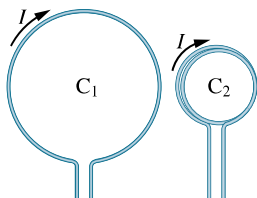
60Ú. Dlouhým solenoidem s hustotou 10,0 závitů na centimetr a poloměrem 7,00 cm protéká proud 20,0 mA. Přímým vodičem ležícím v ose solenoidu protéká proud 6,00 A. (a) V jaké vzdálenosti od osy bude svírat vektor výsledné magnetické indukce úhel 45° s osou vodiče? (b) Jaká je v tomto místě velikost magnetické indukce?

61Ú. Dlouhým solenoidem s hustotou 100 závitů na centimetr protéká proud I . Elektron se pohybuje uvnitř solenoidu po kružnici o poloměru 2,30 cm kolmo na osu solenoidu. Rychlost elektronu je $0,0460c$ (c je rychlost světla). Určete velikost elektrického proudu tekoucího solenoidem.

ODST. 30.5 Cívka jako magnetický dipól

62C. Jaký je magnetický dipólový moment μ solenoidu popsaného ve cvič. 53?

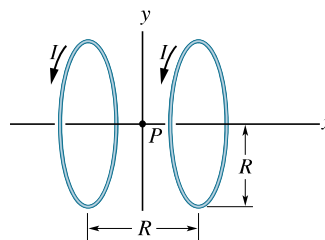
63C. Na obr. 30.66 je vodič, kterým protéká proud I . Vodič je jednou stočen do tvaru kruhové smyčky C_1 (cívka s jedním závitěm), podruhé tvoří cívku C_2 se dvěma závitěmi o polovičním poloměru, než má smyčka C_1 . (a) Vypočítejte poměr B_2/B_1 , jsou-li B_1 a B_2 velikosti magnetické indukce ve středech obou cívek. (b) Jaký je poměr dipólových momentů μ_2/μ_1 obou cívek?



Obr. 30.66 Cvičení 63

64C. Na obr. 30.67 jsou Helmholtzovy cívky. Skládají se ze dvou kruhových sousedních cívek, z nichž každá má N závitů a poloměr R . Obě cívky jsou ve vzdálenosti R od sebe a každou z nich

protéká proud I v téže směru. Určete velikost celkové magnetické indukce v bodě P ležícím na ose cívek uprostřed mezi nimi.

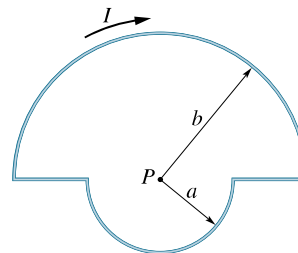


Obr. 30.67 Cvičení 64 a úlohy 68 a 72

65C. Student si vyrobil elektromagnet navinutím 300 závitů vodiče kolem dřevěného válce o průměru $d = 5,0$ cm. Cívka je připojena k baterii, která jí dodává elektrický proud 4,0 A. (a) Určete velikost magnetického momentu cívky. (b) V jaké vzdálenosti $z \gg d$ na ose cívky bude mít magnetická indukce tohoto dipólu velikost $5,0 \mu\text{T}$ (což je přibližně desetina velikosti magnetické indukce zemského pole)?

66C. Velikost $B(x)$ magnetické indukce v bodech na ose čtvercové proudové smyčky o straně a byla vypočtena v úloze 21. (a) Ukažte, že magnetické pole této smyčky je na její ose pro $x \gg a$ stejné jako pro magnetický dipól (rov. (30.29)). (b) Jaká je velikost magnetického dipólu této smyčky?

67Ú. Smyčka má tvar podle obr. 30.68 a protéká jí elektrický proud I . (a) Určete magnetickou indukci \mathbf{B} v bodě P . (b) Určete magnetický dipólový moment smyčky.

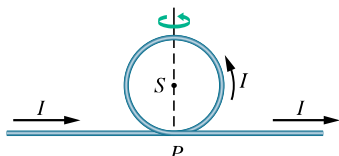


Obr. 30.68 Úloha 67

68Ú. Dvěma cívkami (obr. 30.67), z nichž každá má 300 závitů a poloměr R , protéká elektrický proud I . Cívky jsou ve vzdálenosti R . Vyneste závislost velikosti magnetické indukce $B(x)$ na vzdálenosti x od bodu P na společné ose pro $-R \leq x \leq R$. Zvolte $R = 5,0$ cm a $I = 50$ A. (Cívky takové konstrukce vytvářejí homogenní magnetické pole v okolí bodu P .) (Tip: Vyděte z rov. (30.28).)

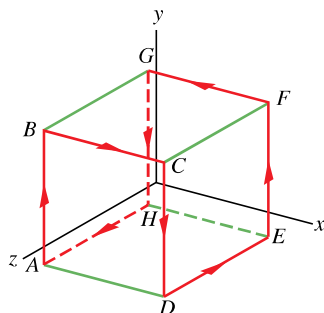
69Ú. Kruhovou smyčkou o poloměru 12 cm protéká proud 15 A. Cívkou s ní soustřednou o poloměru 0,82 cm s 50 závitěmi protéká proud 1,3 A. (a) Jakou magnetickou indukci \mathbf{B} vytváří samotná smyčka ve svém středu? (b) Jaký moment síly působí na cívku? Předpokládejte, že roviny smyčky i závitů cívky jsou rovnoběžné a že magnetické pole smyčky je přibližně homogenní v celém objemu cívky.

70Ú. (a) Dlouhý izolovaný vodič je stočen podle obr. 30.69. Poloměr kruhové části je R . Určete velikost a směr magnetické indukce \mathbf{B} ve středu S kruhové části, protéká-li vodičem elektrický proud I v naznačeném směru. (b) Předpokládejte, že kruhová část vodiče se otočí kolem čárkovaně vyznačeného průměru do polohy, ve které je rovina kruhu kolmá na přímkovou část vodiče. Magnetický dipólový moment příslušný kruhové části (smyčce) vodiče má nyní stejný směr jako proud, který teče v přímé části vodiče. Určete v tomto případě magnetickou indukci \mathbf{B} v bodě S .



Obr. 30.69
Úloha 70

71Ú. Obvod, kterým protéká elektrický proud 6,0 A, je tvořen uzavřenou smyčkou $ABCDEFGHA$ zahrnující 8 z 12 hran krychle (délka jedné hrany je 10 cm, obr. 30.70). (a) Obvod můžeme nahradit třemi následujícími smyčkami ve tvaru čtverce: $BCFGB$, $ABGHA$ a $CDEFC$. Proč? (Tip: Zakreslete proudy, které jimi tekou.) (b) Využijte toho k určení magnetického dipólového momentu $\boldsymbol{\mu}$ (velikost i směr) původní smyčky $ABCDEFGHA$. (c) Vypočítejte magnetickou indukci \mathbf{B} v bodech $P(x, y, z) = (0, 0; 5, 0; 0, 0)$ a $(5, 0; 0, 0; 0, 0)$. (Souřadnice jsou v metrech.)



Obr. 30.70
Úloha 71

72Ú. Předpokládejte, že u Helmholtzových cívek na obr. 30.67 není vzdálenost mezi cívkami konstantní, ale proměnná (např. s). (a) Ukažte, že první derivace magnetické indukce ($d\mathbf{B}/dx$) je v bodě P rovna nule bez ohledu na hodnotu s . Jak to plyne ze symetrie úlohy? (b) Ukažte, že druhá derivace ($d^2\mathbf{B}/dx^2$) bude v bodě P též rovna nule pro $s = R$.

PRO POČÍTAČ

73Ú. Kruhovým závitem o poloměru R teče proud I . V bodech na ose závitů je magnetická indukce \mathbf{B} s touto osou rovnoběžná a má podle rov. (30.28) velikost

$$B(z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

kde z je vzdálenost od středu závitů. Solenoid můžeme modelovat velkým počtem kruhových závitů, které mají stejný poloměr, společnou osu a protéká jimi stejný elektrický proud. Předpokládejte, že solenoid má délku 25,0 cm, poloměr 1,00 cm a skládá se z N stejně od sebe vzdálených závitů. Každým z nich protéká proud 1,00 A. Pro (a) $N = 11$, (b) $N = 21$ a (c) $N = 51$ vypočítejte velikost magnetické indukce ve středu solenoidu sečtením indukci polí, vytvořených jednotlivými závitů. Pro každou hodnotu N srovnajte výsledek s hodnotou nalezenou použitím rov. (30.25), která platí pro dlouhý solenoid s velkým počtem těsně u sebe navinutých závitů.

74Ú. Užitím počítače lze ověřit Ampérův zákon pro situaci, ve které Ampérova křivka nesplyvá s indukčními čarami magnetického pole. Předpokládejte, že střed čtverce se stranou a je umístěn do počátku soustavy souřadnic tak, že jeho strany jsou rovnoběžné s osami x a y . Dlouhý přímý vodič, kterým protéká elektrický proud I , je kolmý k rovině čtverce a protíná osu x v bodě o souřadnici x' . Určete integrál $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ numericky. Rozdělte stranu čtverce na N úseků o stejné délce Δs a pro každý takový úsek určete hodnotu výrazu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \Delta s$, kde \mathbf{B} je magnetická indukce pole ve středu úseku a \mathbf{u} je jednotkový vektor rovnoběžný s úsekem a se směrem souhlasným s orientací smyčky. Pro různé úseky může \mathbf{u} nabývat hodnot $i, j, -i$, nebo $-j$. Magnetická indukce v bodě se souřadnicemi x a y je vyjádřena vztahem

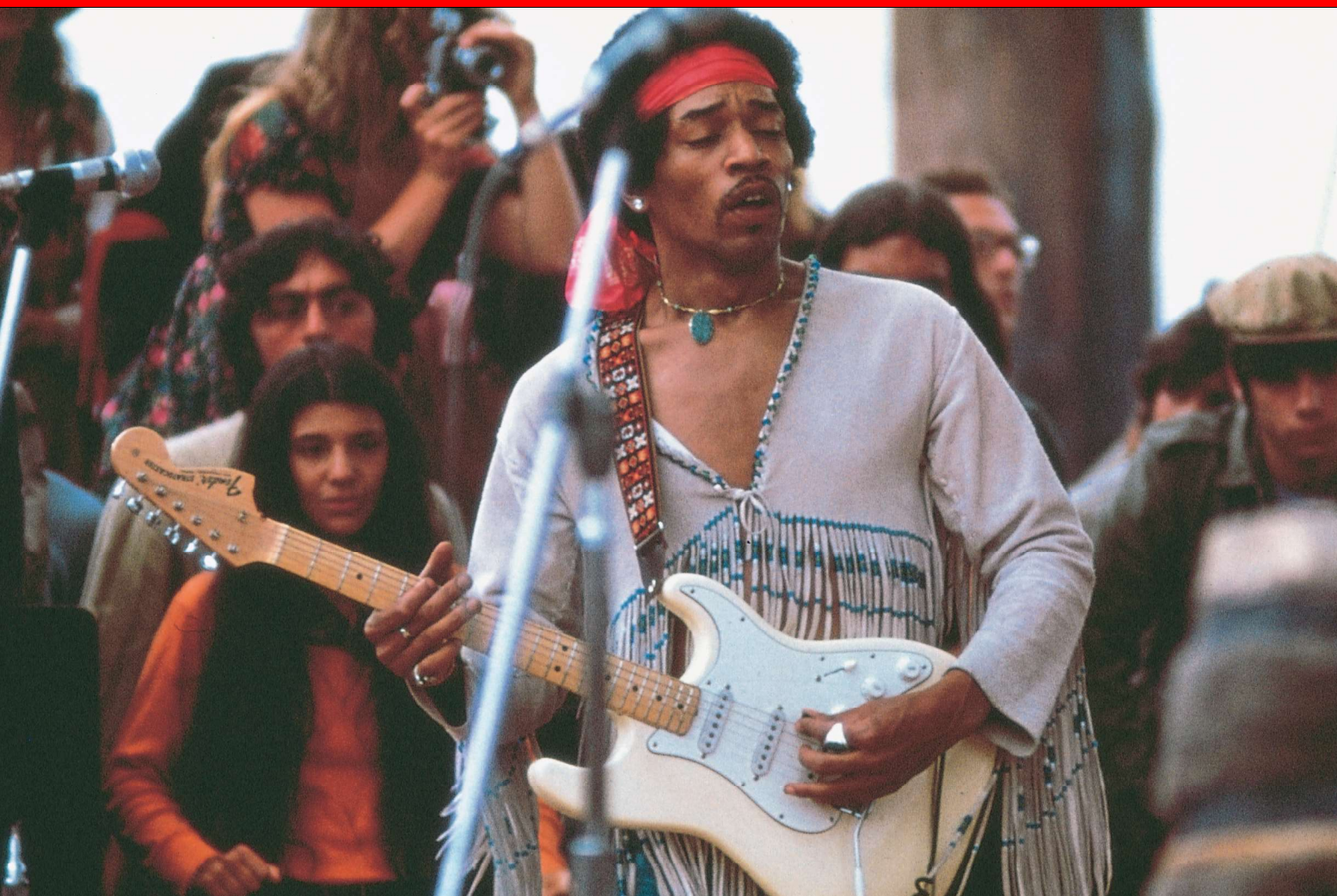
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I [-y\mathbf{i} + (x - x')\mathbf{j}]}{2\pi[(x - x')^2 + y^2]}.$$

Pro strany čtverce, které jsou rovnoběžné s osou x , položte $y = a/2$ nebo $-a/2$; pro strany, které jsou rovnoběžné s osou y položte $x = a/2$ nebo $-a/2$. Dosaďte délku strany čtverce $a = 1,00$ m, elektrický proud $I = 1,00$ A a pro každý následující případ vypočítejte součet přes všechny úseky pro každou stranu čtverce zvlášť. Sečtením potom získáte výsledek pro celý čtverec. Výsledek porovnejte s hodnotou $\mu_0 I_c$, kde I_c je proud tekoucí plochou čtverce. Hodnota $N = 50$ by měla dát výsledek na tři platné číslice. Počítejte pro (a) $x' = 0$ (vodič je ve středu čtverce), (b) $x' = 0,200$ m (vodič prochází vnitřkem čtverce bodem mimo jeho střed), (c) $x' = 0,400$ m (vodič prochází čtvercem blízko středu jeho strany) a (d) $x' = 0,600$ m (vodič je mimo čtverec).

75Ú. Dva dlouhé vodiče jsou rovnoběžné s osou z soustavy souřadnic. Rovinu xy protínají ve dvou bodech ležících na ose x : první vodič v bodě $x = a$ (protéká jím proud I_1 v kladném směru osy z) a druhý vodič v bodě $x = 0$ (protéká jím proud I_2 , který může měnit jak svou velikost, tak i směr). Elektrický proud pokládejme za kladný, teče-li v kladném směru osy z , a za záporný, teče-li opačně. (a) Napište vztah, který určuje výslednou magnetickou indukci \mathbf{B} na ose x pro $x > a$. (b) Přepište tento vztah pro $x = 2a$ po substituci $I_2 = bI_1$, kde b je proměnná. (c) Na základě tohoto nového vztahu vynesete závislost složky B_y indukce na b v intervalu $-3 \leq b \leq 3$.

31

Elektromagnetická indukce



Když v polovině padesátých let začal rock, vyměnili záhy kytaristé své akustické nástroje za elektrické. Jimi Hendrix jako první z nich pojal elektrickou kytaru jako elektronický nástroj. Zářil na scéně šedesátých let technikou rozezvučování nástroje, polohou kytary u mikrofonu udržoval zpětnou vazbu, aby ji pak ve vrcholu ztlumil. Jeho myšlenky ovlivňují rock dodnes. Co ale vlastně natolik odlišuje elektrickou kytaru od akustické, že Hendrix mohl tak vynalézavě užívat tento elektronický nástroj?

31.1 DVĚ SYMETRICKÉ SITUACE

Pustíme-li proud do vodivé smyčky v magnetickém poli, bude na ni magnetické pole působit momentem síly, přičemž platí:

$$\begin{aligned} \text{proudová smyčka} + \text{magnetické pole} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{moment síly;} \quad (31.1) \end{aligned}$$

to jsme zjistili v čl. 29.8. A co když naopak vypneme proud a budeme otáčet smyčkou ručně: obrátí se šipka ve vztahu (31.1)? Objeví se nyní ve smyčce proud? Odpověď je kladná:

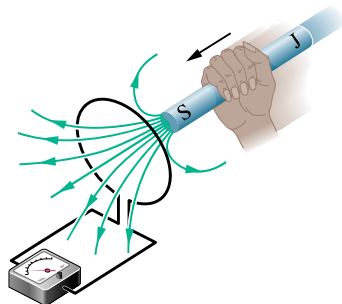
$$\begin{aligned} \text{moment síly} + \text{magnetické pole} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{elektrický proud.} \quad (31.2) \end{aligned}$$

Souvislosti vyjádřené vztahy (31.1) a (31.2) jsou symetrické. Fyzikální zákon vyjadřující proces (31.2) se nazývá *Faradayův zákon elektromagnetické indukce*. Zatímco podle procesu (31.1) pracuje elektrický motor, je proces (31.2) základem činnosti elektrického generátoru. Faradayovým zákonem a jeho důsledky se budeme zabývat v následující kapitole.

31.2 DVA POKUSY

Zkoumejme dva jednoduché pokusy jako přípravu k výkladu Faradayova zákona elektromagnetické indukce.

První pokus. Obr. 31.1 ukazuje vodivou smyčku připojenou k citlivému měřidlu elektrického proudu. Obvodem neteče žádný proud, protože v něm není zapojena



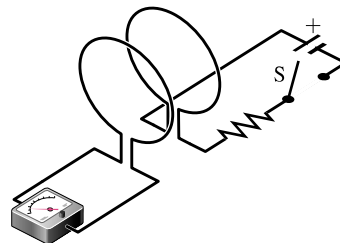
Obr. 31.1 Měřidlo proudu (ampérmetr) ukazuje proud ve smyčce, dokud se magnet vůči smyčce pohybuje.

baterie ani jiný zdroj elektromotorického napětí. Pokud se však přiblížíme tyčovým magnetem ke smyčce, v obvodu se proud objeví. Proud zanikne, když se magnet zastaví. Vzdalujeme-li se magnetem od smyčky, proud opět obvodem protéká, ale tentokrát v opačném směru. Ve smyčce vzniká proud také tehdy, pohybujeme-li smyčkou vzhledem k magnetu. Po chvíli experimentování můžeme učinit tyto závěry:

1. Vznik proudu je vázán na relativní pohyb mezi smyčkou a magnetem (jedno se musí pohybovat vůči druhému); proud zanikne, ustane-li relativní pohyb.
2. Rychlejší pohyb způsobí větší proud.
3. Způsobuje-li pohyb severního pólu magnetu směrem ke smyčce proud v jednom směru, potom pohyb od smyčky způsobuje proud ve směru opačném. Pohyb jižního pólu magnetu též vytváří proud, a to vždy ve směrech opačných, než tomu bylo u pohybu pólu severního.

Proud vytvořený ve smyčce tímto způsobem se nazývá **indukovaný proud**, práce připadající na jednotkový náboj při vytváření tohoto proudu se nazývá **indukované emn** a tento proces vytvoření proudu se nazývá **elektromagnetická indukce**.

Druhý pokus. K tomuto pokusu použijeme aparaturu znázorněnou na obr. 31.2. Skládá se ze dvou smyček, které jsou blízko sebe, ale nedotýkají se. Zapneme-li spínačem S proud ve smyčce na pravé straně, pak měřidlo na levé straně náhle a krátce zaznamená proud — indukovaný proud. Vypneme-li spínačem proud, měřidlo v levé smyčce opět na krátký čas zaznamená proud, tentokrát v obráceném směru. Indukovaný proud (a tedy také emn) opět vzniká pouze tehdy, když se proud v pravé části mění (buď při zapnutí, nebo vypnutí), nikoliv ale v případech, kdy je proud budící magnetické pole stálý, i kdyby dosahoval jakkoli vysokých hodnot.



Obr. 31.2 Měřidlo proudu ukazuje proud v levé smyčce jednak po zapnutí proudu spínačem v pravé smyčce, jednak po následném vypnutí proudu. Smyčky se nepohybují.

Indukované emn a indukovaný proud v těchto pokusech zřejmě vznikají tehdy, když se něco mění. Co ale je ono „něco“? Faraday to poznal jako první.

31.3 FARADAYŮV ZÁKON ELEKTROMAGNETICKÉ INDUKCE

Faraday přišel na to, že emn a proud mohou být ve smyčce indukovány (tak jako tomu bylo v našich dvou pokusech) měnícím se *magnetickým polem* procházejícím *smyčkou*. Dále přišel na to, že magnetické pole lze znázornit pomocí

magnetických indukčních čar procházejících smyčkou. Faradayův zákon elektromagnetické indukce, vyjádřený na základě našich pokusů, zní:

Ve smyčce znázorněné na obr. 31.1 a 31.2 se indukuje emn, když se mění počet indukčních čar procházejících plochou smyčky.

Velmi důležité je, že nezáleží na počtu indukčních čar procházejících plochou* smyčky; velikost emn a indukovaného proudu závisí na rychlosti změny tohoto počtu. V našem prvním pokusu (obr. 31.1) vycházejí indukční čáry ze severního pólu magnetu. Když tedy přibližujeme severní pól ke smyčce, roste počet indukčních čar procházejících smyčkou. Tímto nárůstem se zjevně vyvolá pohyb vodivostních elektronů ve smyčce (indukovaný proud) a poskytuje se energie (indukované emn) k jejich pohybu. Zastaví-li se magnet, nemění se počet indukčních čar procházejících smyčkou a indukovaný proud i indukované napětí zaniknou.

Pokud je v našem druhém pokusu (obr. 31.2) spínač vypnut, pak neteče elektrický proud, není žádné magnetické pole a tedy ani žádné indukční čáry. Když však zapojíme elektrický proud do pravé smyčky, vytvoří vzrůstající elektrický proud kolem ní, a tedy i v okolí levé smyčky, rostoucí magnetické pole. Tak jako v prvním pokusu i zde pole narůstá, tedy indukčních čar přibývá a v levé smyčce se indukuje emn, které v ní vyvolá proud. Dosáhne-li proud v pravé smyčce ustálené hodnoty, přestane se již měnit počet indukčních čar procházejících plochou levé smyčky a indukované emn i indukovaný proud v ní vymizí.

Kvantitativní pojednání

Abychom mohli Faradayova zákona užívat k výpočtům, potřebujeme stanovit vhodnou míru magnetického pole procházejícího smyčkou. V čl. 24.3 jsme v podobné situaci ke stanovení míry elektrického pole procházejícího plochou definovali tok elektrické intenzity $\Phi_E = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. Nyní definujeme magnetický tok. Uvažujme orientovanou smyčku \mathcal{C} ohraničující plochu \mathcal{S} , vloženou do magnetického pole \mathbf{B} . **Magnetický indukční tok** smyčkou pak je:

$$\Phi_B = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{magnetický tok plochou } \mathcal{S}). \quad (31.3)$$

Tak jako v kap. 24 značí $d\mathbf{S}$ vektor o velikosti dS , který je kolmý k plošce; jeho směr je svázán s orientací smyčky pravidlem pravé ruky. (Ohneme-li prsty pravé ruky ve směru

* Připomeňme, že podobně jako v čl. 30.3 lze použít plochu libovolného tvaru, má-li za svou hranici uvažovanou smyčku.

orientované křivky, která obepíná plošku $d\mathcal{S}$ a jejíž orientace je v souladu s orientací celé smyčky \mathcal{C} , pak vztyčený palec ukazuje směr $d\mathbf{S}$.)

Jako zvláštní případ uvažujme smyčku ležící v rovině kolmé k homogennímu magnetickému poli. Orientujeme-li $d\mathbf{S}$ souhlasně s \mathbf{B} , je skalární součin v rov. (31.3) roven $B dS \cos 0^\circ = B dS$. Protože magnetické pole je homogenní, lze B vytknout před integrál. Integrál $\int dS$ potom udává obsah S rovinné plochy ohraničené smyčkou. Rov. (31.3) se tak redukuje na vztah

$$\Phi_B = BS \quad (\mathbf{B} \perp \mathbf{S}, \text{ pole } \mathbf{B} \text{ je homogenní}). \quad (31.4)$$

Z rov. (31.3) i (31.4) vidíme, že jednotkou magnetického indukčního toku je $\text{T} \cdot \text{m}^2$. Nazýváme ji **weber** (Wb):

$$1 \text{ weber} = 1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2. \quad (31.5)$$

Použitím magnetického indukčního toku můžeme vyslovit Faradayův zákon takto:

Velikost emn indukovaného ve vodivé smyčce je rovna rychlosti změny magnetického indukčního toku procházejícího touto smyčkou.

Matematický zápis tohoto zákona je

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradayův indukční zákon}). \quad (31.6)$$

Zdůrazněme, že rov. (31.6) vyjadřuje indukované emn nejen pro uvedené dva pokusy, ale pro všechny procesy při nichž dochází ke vzniku emn. V příštím odstavci navíc uvidíme, že indukované emn brání změně magnetického indukčního toku, což vyjadřujeme znaménkem minus v rov. (31.6). (Zajímáme-li se jen o velikost indukovaného emn, není záporné znaménko podstatné.)

Jestliže měníme magnetický indukční tok procházející cívkou o N závitěch, pak indukované emn vzniká v každém závitě a celkové emn indukované v cívce je součtem těchto jednotlivých indukovaných napětí. Je-li cívka vinuta těsně (*hustě vinutá*), je tok každým z N závitů týž, takže celkový tok je $N\Phi_B$ a indukované emn na celém vinutí je

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{cívka o } N \text{ závitěch}). \quad (31.7)$$

Magnetický indukční tok cívkou můžeme měnit různě:

1. Měníme velikost B magnetického pole v cívce.
2. Měníme obsah průřezu cívky, resp. té části plochy, která leží v magnetickém poli (ať už např. rozpínáním cívky nebo vysouváním cívky z magnetického pole).
3. Měníme úhel mezi směrem magnetického pole \mathbf{B} a plochou cívky (například otáčením cívky) tak, aby se měnil počet indukčních čar procházejících plochou cívky.

PŘÍKLAD 31.1

Dlouhý solenoid S na obr. 31.3 má 220 závitů na 1 cm a teče jím proud $I = 1,5 \text{ A}$; jeho průměr je $D = 3,2 \text{ cm}$. V jeho středu umístíme hustě vinutou cívku C o 130 závitů a průměru $d = 2,1 \text{ cm}$. Proud solenoidem poklesne rovnoměrně na nulu za 25 ms. Jaké emn se tím indukuje v cívkce C ?

ŘEŠENÍ: Cívka C je umístěna v magnetickém poli B vytvořeném proudem v solenoidu S . Klesá-li proud, klesá i B . Tím klesá i magnetický indukční tok cívkou. Během tohoto poklesu se v cívkce indukuje emn podle Faradayova zákona. Abychom určili velikost emn, zjistíme nejdříve počáteční velikost magnetické indukce B_i pole v solenoidu dosazením zadaných hodnot do rov. (30.25)

$$\begin{aligned} B_i &= \mu_0 I n = \\ &= (4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}) \cdot \\ &\quad \cdot (1,5 \text{ A})(220 \text{ cm}^{-1})(100 \text{ cm/m}) = \\ &= 4,15 \cdot 10^{-2} \text{ T}. \end{aligned}$$

Obsah plochy závitů cívky C je $\frac{1}{4}\pi d^2 = 3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. Magnetické pole solenoidu je kolmé k této ploše a předpokládáme, že je na této ploše homogenní. Můžeme tedy najít počáteční magnetický indukční tok $\Phi_{B,i}$ každým závitem cívky C dosazením do rov. (31.4):

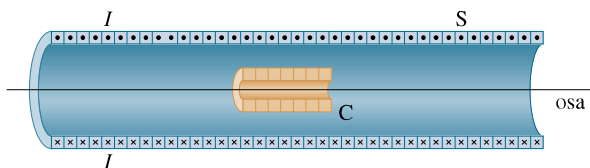
$$\begin{aligned} \Phi_{B,i} &= B_i S = (4,15 \cdot 10^{-2} \text{ T})(3,46 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) = \\ &= 1,44 \cdot 10^{-5} \text{ Wb} = 14,4 \mu\text{Wb}. \end{aligned}$$

Koncové magnetické pole B_f a magnetický indukční tok $\Phi_{B,f}$ jsou nulové. Změna magnetického indukčního toku v každém závitě cívky C byla $\Delta\Phi_B = 14,4 \mu\text{Wb}$. Protože se proud v solenoidu, a tím i magnetický indukční tok, zmenšovaly rovnoměrně, můžeme zapsat Faradayův zákon (31.7) ve tvaru

$$\mathcal{E} = N \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t},$$

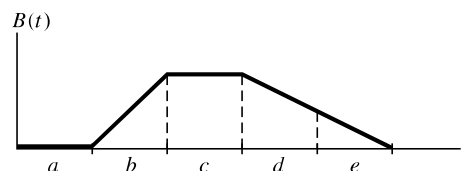
kde N je počet závitů cívky. (V rov. (31.7) neuvažujeme znaménko minus, protože hledáme pouze velikost \mathcal{E}). Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= (130) \frac{(14,4 \cdot 10^{-6} \text{ Wb})}{(25 \cdot 10^{-3} \text{ s})} = \\ &= 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ V} = 75 \text{ mV}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$



Obr. 31.3 Příklad 31.1. Cívka C je umístěna uvnitř solenoidu S , kterým teče proud I .

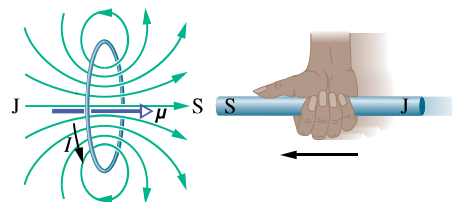
KONTROLA 1: Graf udává velikost $B(t)$ homogenního magnetického pole procházejícího kolmo k rovině smyčky. Uspořádejte pět úseků grafu vzestupně podle velikosti emn indukovaného ve smyčce.

**31.4 LENZŮV ZÁKON**

Krátce poté, co Faraday objevil a formuloval zákon elektromagnetické indukce, vyslovil Emil Lenz pravidlo — nyní většinou nazývané **Lenzův zákon** — k určování směru indukovaného proudu ve smyčce:

Indukovaný proud má takový směr, že magnetické pole tímto proudem vzbuzené působí *proti změně* magnetického pole, která proud indukovala.

Abychom získali dobrou představu o použití Lenzova zákona, užijeme ho dvěma různými a přitom rovnocennými způsoby v situaci na obr. 31.4, kdy se severní pól magnetu přibližuje k vodivé smyčce.



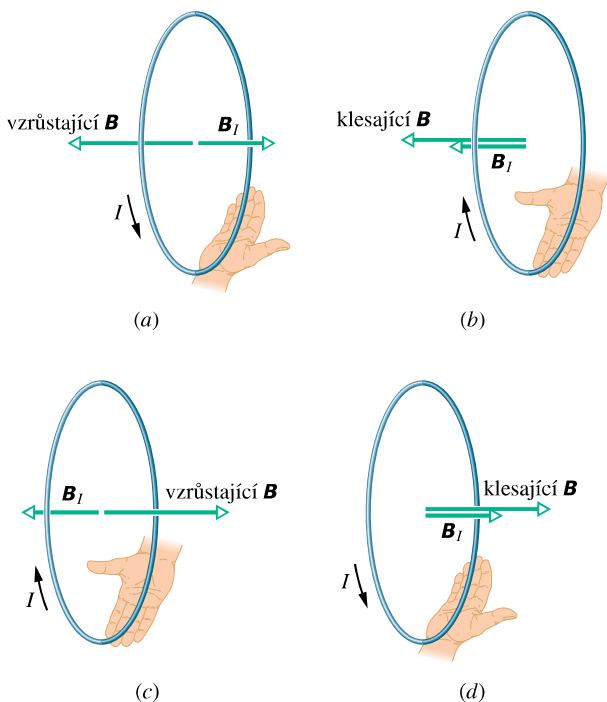
Obr. 31.4 Použití Lenzova zákona. Pohybujeme-li magnetem ke smyčce, indukuje se ve smyčce proud I proti směru otáčení hodinových ručiček; tento proud vytváří vlastní magnetické pole s magnetickým dipólovým momentem μ takovým, že brání přiblížení magnetu.

1. Působení proti pohybu pólu. Přibližujeme-li severní pól magnetu ke smyčce (obr. 31.4), roste magnetické pole v ploše smyčky a tím se ve smyčce indukuje proud. Z obr. 30.22 víme, že smyčce protékané proudem odpovídá magnetický dipól s jižním a severním pólem a že magnetický dipólový moment μ směřuje od jihu k severu. Aby byl magnet podle Lenzova zákona *odpuzován* (obr. 31.4), a tak se působilo *proti* narůstání magnetického pole způsobeného přibližujícím se magnetem, musí severní

pól smyčky (a tedy i μ) směřovat k přibližujícímu se severnímu pólu magnetu. Podle pravidla pravé ruky pro μ (obr. 30.22) proud I indukovaný ve smyčce teče ve směru vyznačeném na obr. 31.4.

Táhneme-li naopak magnet od smyčky, indukuje se znovu ve smyčce proud. Nyní však bude jižní pól smyčky přivrácen vzdalujícímu se severnímu pólu magnetu, takže brání vzdalování. Proud tedy bude indukován v opačném směru než na obr. 31.4.

2. Působení proti změně magnetického indukčního toku. Podle obr. 31.4 neprochází smyčkou prakticky žádný magnetický indukční tok, pokud je magnet daleko. Když se severní pól magnetu blíží ke smyčce, je jeho magnetické pole \mathbf{B} namířeno *doleva* a tok smyčkou roste. Aby se bránilo růstu magnetického toku, musí indukovaný proud I vytvořit vlastní pole \mathbf{B}_I uvnitř smyčky namířené *doprava*, jak ukazuje obr. 31.5a; potom tok pole \mathbf{B}_I zeslabuje rostoucí tok pole \mathbf{B} . Podle pravidla pravé ruky z obr. 30.22 musí proud I téci v situaci na obr. 31.5a proti směru oběhu hodinových ručiček.



Obr. 31.5 Proud I indukovaný ve smyčce má takový směr, že magnetické pole \mathbf{B}_I tohoto proudu brání *změně* magnetického pole \mathbf{B} indukujícího I . Pole \mathbf{B}_I je namířeno proti vzrůstajícímu poli \mathbf{B} v obr. (a), (c), ale má stejný směr jako klesající \mathbf{B} v obr. (b), (d).

Dobře si všimněme, že tok pole \mathbf{B}_I vždy brání *změně* toku pole \mathbf{B} , to ale nemusí znamenat, že \mathbf{B}_I je namířeno

proti \mathbf{B} . Táhneme-li například magnet od smyčky, míří \mathbf{B} stále doleva, ale jeho tok Φ_B se nyní zmenšuje. Tok pole \mathbf{B}_I tedy musí bránit *poklesu* Φ_B , a proto vektory \mathbf{B}_I a \mathbf{B} budou nyní mít stejný směr (obr. 31.5b).

Obr. 31.5c, d ukazují situace, v nichž se jižní pól magnetu přibližuje nebo vzdaluje smyčce.

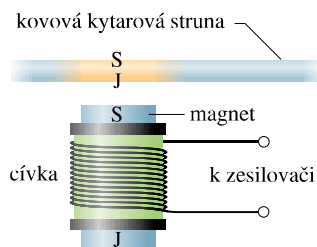
Elektrické kytary

Obr. 31.6 ukazuje Fenderův Stratocaster, typ elektrické kytary, užívané Jimi Hendrixem a mnohými dalšími hudebníky. Zatímco klasická kytara vytváří svůj zvuk v duté části nástroje akustickou rezonancí kmitů strun, nemá elektrická kytara dutou část, která by rezonovala. Místo toho jsou kmity kovových strun snímány elektrickými snímači, které převádějí mechanický podnět na elektrický signál, ten se dále zesiluje a konečně převádí na zvuk v soustavě reproduktorů.



Obr. 31.6 Fenderův Stratocaster má tři skupiny po šesti elektrických snímačích (v široké části nástroje). Přepínač snímačů umožňuje hudebníkovi volit, která skupina snímačů bude vysílat signály do zesilovačů a reproduktorové soustavy.

Základní konstrukce snímače je patrná z obr. 31.7. Je tvořen cívkou navinutou na malý permanentní magnet, jehož magnetické pole indukuje severní a jižní pól v části kovové struny, která je právě nad magnetem. Tato část má potom svoje vlastní magnetické pole. Brnkne-li na strunu, začne struna kmitat, její pohyb vůči cívce mění indukční magnetický tok cívkou a tím se v cívce indukuje proud. Struna příčně kmitá k cívce a od ní, indukovaný proud mění směr se stejnou frekvencí jako kmity struny a přenáší tyto kmity do zesilovače a reproduktoru.

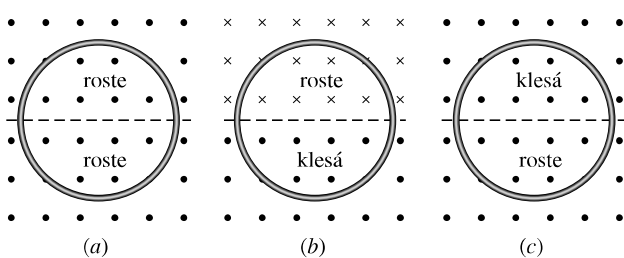


Obr. 31.7 Boční pohled na elektrický kytarový snímač. Rozkmitáme-li kovovou strunu (která působí jako magnet), indukují změny magnetického indukčního toku v cívce proud.

Na Stratocasteru jsou tři skupiny snímačů, umístěných blízko uchycení strun na široké části korpusu. Skupina nejbližší kobyлке lépe zachycuje kmity s vyššími frekvencemi, skupina nejdále od kobylinky zachycuje lépe frekvence nižší. Přepínačem na kytaru může hudebník volit, které skupiny snímačů budou vysílat signály do zesilovače a reproduktorů.

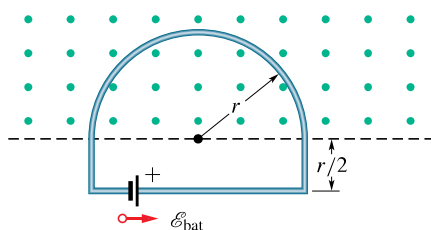
Dalších efektů docíloval někdy Hendrix převinutím snímačů své kytary na jiný počet závitů. Měnil tak velikost emn indukovaného v cívkách a tím i jejich citlivost. I bez tohoto dodatečného zásahu však nabízí elektrická kytara mnohem větší možnosti ovládnání vytvářeného hudebního zvuku než kytara klasická.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje tři situace, v nichž jsou stejné kruhové vodivé smyčky v homogenních magnetických polích, která rostou nebo klesají stejně rychle. Přerušovaná čára, vymezující hranici změn pole, prochází vždy středem kruhu. Seřadte situace sestupně podle velikosti proudu indukovaného ve smyčce.



PŘÍKLAD 31.2

Obr. 31.8 ukazuje vodivou smyčku, kterou tvoří půlkružnice o poloměru $r = 0,20$ m a tři přímé úseky. Půlkruh je v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} vystupujícím kolmo ze stránky k nám; $B = 4,0t^2 + 2,0t + 3,0$ v jednotkách SI. Do smyčky je zapojena ideální baterie o emn $\mathcal{E}_{\text{bat}} = 2,0$ V. Smyčka má odpor $2,0 \Omega$.



Obr. 31.8 Příklad 31.2. Do smyčky vložené do homogenního magnetického pole je zapojena baterie. Pole vystupuje kolmo ze stránky k nám a jeho velikost se s časem mění.

(a) Jaká je velikost a orientace emn \mathcal{E}_{ind} indukovaného ve smyčce v čase $t = 10$ s?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.6) je velikost \mathcal{E}_{ind} rovna rychlosti $d\Phi_B/dt$, s níž se mění magnetický indukční tok smyčkou. Protože je pole homogenní a kolmé k rovině smyčky, je jeho tok dán rov. (31.4), tj. $\Phi_B = BS$. Použijeme-li tuto rovnici a uvědomíme-li si, že se mění v čase jen velikost B pole (nikoliv obsah plochy S), můžeme přepsat rov. (31.6) do tvaru

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(BS)}{dt} = S \frac{dB}{dt}.$$

Protože magnetický indukční tok prochází smyčkou jen uvnitř půlkruhu, je $S = \frac{1}{2}\pi r^2$. Dosazením výrazů pro S a pro B dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}} &= S \frac{dB}{dt} = \frac{\pi r^2}{2} \frac{d}{dt}(4,0t^2 + 2,0t + 3,0) = \\ &= \frac{\pi r^2}{2} (8,0t + 2,0) \quad (\text{v SI}). \end{aligned}$$

V čase $t = 10$ s platí

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}} &= \frac{\pi(0,20)^2}{2} (8,0 \cdot 10 + 2,0) \text{ V} = \\ &= 5,152 \text{ V} \doteq 5,2 \text{ V}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Na obr. 31.8 vystupuje magnetická indukce ze stránky k nám a narůstá. Podle Lenzova zákona tedy indukované pole B_I (způsobené indukovaným proudem I) směřuje *od nás*.

Užitím pravidla pravé ruky (obr. 30.7c) zjistíme, že indukovaný proud teče smyčkou ve směru otáčení hodinových ručiček, takže orientace \mathcal{E}_{ind} je táž.

(b) Jaký proud teče smyčkou v čase $t = 10$ s?

ŘEŠENÍ: Zatímco indukované emn o velikosti \mathcal{E}_{ind} vyvolá proud smyčkou ve směru otáčení hodinových ručiček, má emn baterie \mathcal{E}_{bat} tendenci hnát proud směrem opačným. Protože $\mathcal{E}_{\text{ind}} > \mathcal{E}_{\text{bat}}$, je výsledné emn \mathcal{E}_{vys} orientováno ve směru otáčení hodinových ručiček a stejným směrem teče i proud. Jeho velikost v čase $t = 10$ s určíme pomocí rov. (28.2) ($I = \mathcal{E}/R$):

$$\begin{aligned} I &= \frac{\mathcal{E}_{\text{vys}}}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ind}} - \mathcal{E}_{\text{bat}}}{R} = \frac{(5,152 \text{ V}) - (2,0 \text{ V})}{(2,0 \Omega)} = \\ &= 1,58 \text{ A} \doteq 1,6 \text{ A}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

PŘÍKLAD 31.3

Obr. 31.9 ukazuje pravoúhlou vodivou smyčku v nehomogenním časově proměnném magnetickém poli $\mathbf{B}(x, t)$ vstupujícím kolmo do stránky od nás. Velikost pole je dána vztahem $B = 4t^2x^2$, kde B , t , x jsou v jednotkách SI. Smyčka má šířku $d = 3,0$ m a výšku $h = 2,0$ m. Jaká je velikost a směr emn indukovaného podél smyčky v čase $t = 0,10$ s?

ŘEŠENÍ: Velikost indukovaného emn plyne z Faradayova zákona: $\mathcal{E} = d\Phi_B/dt$. K výpočtu potřebujeme znát tok Φ_B smyčkou jako funkci času. Protože \mathbf{B} není homogenní na ploše ohraničené smyčkou, nemůžeme užít rov. (31.4) ($\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$), ale musíme užít rov. (31.3) ($\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$).

Na obr. 31.9 je vektor \mathbf{B} kolmý k rovině smyčky (a tedy rovnoběžný s vektorem plošného elementu $d\mathbf{S}$). Vektor $d\mathbf{S}$ orientujeme souhlasně s vektorem \mathbf{B} . Potom skalární součin v rov. (31.3) je roven $B dS$. Protože se magnetické pole mění podél souřadnice x a nikoliv podél souřadnice y , můžeme jako element plochy vzít plochu svislého proužku výšky h a šířky dx (jak ukazuje obr. 31.9). Potom $dS = h dx$ a tok smyčkou je

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int B dS = \int_0^d Bh dx = \\ &= \int_0^d 4t^2 x^2 h dx \quad (\text{v SI}).\end{aligned}$$

Při této integraci bereme t jako konstantu. Po dosazení integračních mezí dostáváme

$$\Phi_B = 4t^2 h \int_0^{3,0} x^2 dx = 4t^2 h \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{3,0} = (72t^2),$$

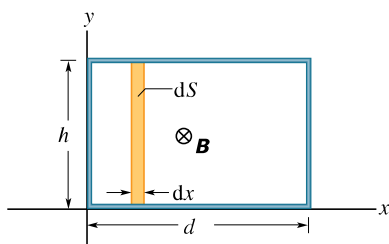
kde Φ_B je ve weberech. Nyní můžeme užít Faradayův zákon ke zjištění velikosti \mathcal{E} v závislosti na čase

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d(72t^2)}{dt} = (144t),$$

kde \mathcal{E} je ve voltech. Pro $t = 0,10$ s je tedy

$$\mathcal{E} = (144 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1})(0,10 \text{ s}) \doteq 14 \text{ V}. \quad (\text{Odpověď})$$

Magnetická indukce \mathbf{B} (obr. 31.9) vstupuje kolmo do stránky a její velikost roste s časem.



Obr. 31.9 Příklad 31.3. Uzavřená vodivá smyčka o šířce d a výšce h leží v nehomogenním, časově proměnném poli vstupujícím do stránky. Pro výpočet toku Φ_B plochu rozdělíme na svislé proužky o výšce h , šířce dx a ploše dS .

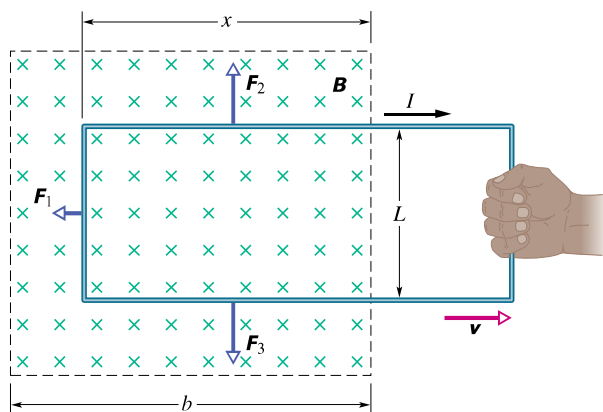
Podle Lenzova zákona vystupuje pole \mathbf{B}_I indukovaného proudu, které brání tomuto vzrůstu, ze stránky. Proto je proud ve smyčce indukován proti směru otáčení hodinových ručiček a stejně je tomu s indukovaným emn.

31.5 INDUKCE A PŘENOSY ENERGIE

Ať pohybujeme magnetem na obr. 31.1 ke smyčce nebo od ní, brání podle Lenzova zákona tomuto pohybu síla, při jejímž přemáhání konáme práci. Současně v materiálu smyčky, kterou protéká indukovaný proud, vzniká Joulovo teplo, protože materiál smyčky má určitý elektrický odpor. Energie, kterou do uzavřené soustavy smyčka + magnet zvnějšku dodáváme prací konanou naší silou, je ve smyčce disipována. (Prozatím zanedbáme energii, která se v průběhu procesu vyzáří jako elektromagnetické vlny.) Čím rychleji pohybujeme magnetem, tím větší je výkon naší (vnější) síly a tím rychleji se ve smyčce vyvíjí Joulovo teplo.

K uvedené přeměně energie dochází bez ohledu na to, jak je proud ve smyčce indukován. Když např. v obr. 31.2 sepneme spínač S a krátce se v levé smyčce indukuje proud, přeneše se energie z baterie do levé smyčky, kde je v materiálu smyčky (pokud není supravodivý) disipována.

Obr. 31.10 ukazuje jinou situaci, při níž vzniká indukovaný proud. Obdélníková drátěná smyčka šířky L má jednu stranu v homogenním magnetickém poli kolmém k rovině smyčky. (Toto pole můžeme vytvořit např. velkým elektromagnetem s vhodnými pólovými nástavci.) Smyčku vytahujeme stálou rychlostí \mathbf{v} z magnetického pole ven. Všimněme si rozdílu mezi situací na obr. 31.10 a 31.1. Na obr. 31.1 se magnetický indukční tok mění proto, že se mění pole \mathbf{B} , zatímco na obr. 31.10 se mění plocha smyčky zůstávající v magnetickém poli, které je neproměnné.



Obr. 31.10 Uzavřenou vodivou smyčku vytahujeme konstantní rychlostí \mathbf{v} z magnetického pole \mathbf{B} . Během pohybu se ve smyčce indukuje proud I ve směru otáčení hodinových ručiček a na části smyčky v magnetickém poli působí síly \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 a \mathbf{F}_3 . Hranice magnetického pole je vyznačena čárkovaně; rozptýl pole na hranici zanedbáme.

Vypočítejte nyní výkon potřebný pro vytahování smyčky (v níž protéká indukovaný proud).

Ukážeme, že pokud chceme táhnout smyčku stálou rychlostí \mathbf{v} , musíme na ni působit stálou silou \mathbf{F} . Ta má stejnou velikost jako síla, kterou přemáháme, ale má opačný směr. Podle rov. (7.49) je potom výkon roven

$$P = Fv, \quad (31.8)$$

kde F je velikost naší síly. Chceme najít výkon P jako funkci velikosti B magnetické indukce a charakteristik smyčky, tedy jejího elektrického odporu R a šířky L . Pohybujeme-li smyčkou na obr. 31.10 doprava, zmenšuje se obsah S plochy smyčky vnořené do magnetického pole. Tím se zmenšuje i magnetický tok smyčkou a podle Faradayova zákona vzniká ve smyčce proud. Právě přítomnost tohoto proudu způsobuje sílu (Ampérovu sílu), kterou musíme svým tahem přemáhat.

Proud určíme z Faradayova indukčního zákona (31.6). Je-li x délka části smyčky v magnetickém poli, je Lx plocha této části. Potom podle rov. (31.4) je magnetický indukční tok smyčkou

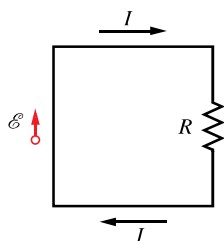
$$\Phi_B = BS = BLx. \quad (31.9)$$

Zmenšuje-li se x , zmenšuje se tok. Podle Faradayova zákona se při tomto zmenšování toku indukuje ve smyčce emn. Dosadíme-li z rov. (31.9) do (31.6), dostaneme

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BLx) = -BL\frac{dx}{dt} = BLv, \quad (31.10)$$

kde velikost v rychlosti, s níž vytahujeme smyčku z magnetického pole, je rovna $-dx/dt$, protože $x(t)$ se s časem zmenšuje.

Obr. 31.11 ukazuje obvod, jímž indukovaný proud teče: emn \mathcal{E} je znázorněno na levé straně, celkový odpor R smyčky je znázorněn na straně pravé. Směr indukovaného proudu plyne z Lenzova zákona; magnetické pole jím vytvořené brání poklesu magnetického toku.



Obr. 31.11 Schéma obvodu na obr. 31.10 pro případ pohyblivé smyčky.

Velikost indukovaného proudu nemůžeme najít pomocí Kirchhoffova zákona pro napětí podél smyčky, protože pro

indukované emn nemůžeme definovat potenciál, jak uvidíme v čl. 31.6. Můžeme však užít vztahu $I = \mathcal{E}/R$, jako jsme to udělali v př. 31.2. Pomocí rov. (31.10) dostáváme

$$I = \frac{BLv}{R}. \quad (31.11)$$

Tři části proudem protékané smyčky leží v magnetickém poli. Na každou z nich působí síla podle rov. (29.26):

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}. \quad (31.12)$$

Tyto síly jsou v obr. 31.10 značeny \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 a \mathbf{F}_3 . Všimněte si, že díky symetrii jsou síly \mathbf{F}_2 a \mathbf{F}_3 sobě rovny co do velikosti a vzájemně se ruší. Zůstává pouze síla \mathbf{F}_1 namířená proti síle \mathbf{F} , tj. proti síle, kterou táhneme smyčku. Posunujeme-li smyčku bez zrychlení, musí platit $\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1$.

Použijeme-li rov. (31.12) a uvážíme-li, že úhel mezi \mathbf{B} a vektorem \mathbf{L} délky L levé strany obdélníka je 90° , můžeme psát

$$F = F_1 = ILB \sin 90^\circ = ILB. \quad (31.13)$$

Dosazením rov. (31.11) do (31.13) dostaneme

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R}. \quad (31.14)$$

Hodnoty B , L i R jsou konstantní. Protože velikost v rychlosti pohybu smyčky je také konstantní, musíme smyčku táhnout silou stálé velikosti F , a to jsme chtěli dokázat.

Dosazením rov. (31.14) do rov. (31.8) dostaneme výkon potřebný pro vytahování smyčky z magnetického pole:

$$P = vF = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (\text{výkon}). \quad (31.15)$$

K dokončení naší úvahy určíme, s jakým výkonem se ve smyčce vyvíjí Joulovo teplo, když ji vytahujeme stálou rychlostí. To vypočteme z rov. (27.22),

$$P = I^2 R. \quad (31.16)$$

Dosazením za I z rov. (31.11) dostáváme

$$P = \left(\frac{BLv}{R}\right)^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R} \quad (\text{tepelný výkon}), \quad (31.17)$$

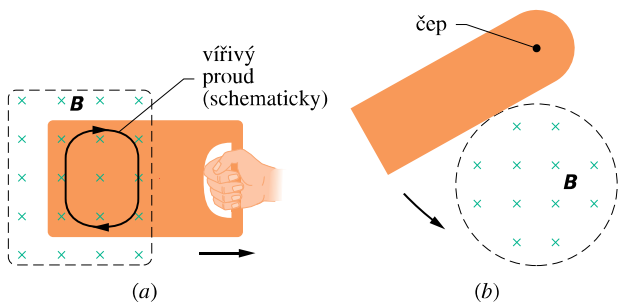
což je přesně rovno výkonu vnější síly při vytahování smyčky podle rov. (31.15). Práce vynaložená při vytahování smyčky se tedy projeví nárůstem vnitřní energie smyčky a tím i zvýšením její teploty.



Při vaření na *indukčních kamnech* je cívka, umístěná přímo pod varnou plochou, napájena vysokofrekvenčním střídavým proudem. Magnetické pole vytvořené tímto proudem se periodicky mění a indukuje proud ve vodivé pánvi. Protože má materiál pánve nenulový odpor, vyvíjí se v ní teplo a tím dochází k ohřevu jídla, které se na ní připravuje. Sama varná plocha se přitom nezahřívá.

Vířivé proudy

Představme si, že nahradíme vodivou smyčku na obr. 31.10 tuhou vodivou deskou. Vytahujeme-li deskou z magnetického pole tak, jako jsme vytahovali smyčku (obr. 31.12a),



Obr. 31.12 (a) Vytahujeme-li pevnou vodivou deskou z magnetického pole, indukují se v ní *vířivé proudy*. Na obrázku je uzavřená křivka charakterizující vířivý proud; ten obíhá ve směru otáčení hodinových ručiček, stejně jako proud ve smyčce na obr. 31.10. (b) Vodivá deska se kývá kolem čepu jako kyvadlo, přičemž vstupuje do magnetického pole. Vířivé proudy se indukují během každého vstupu do magnetického pole i výstupu z něj a tlumí pohyb kyvadla.

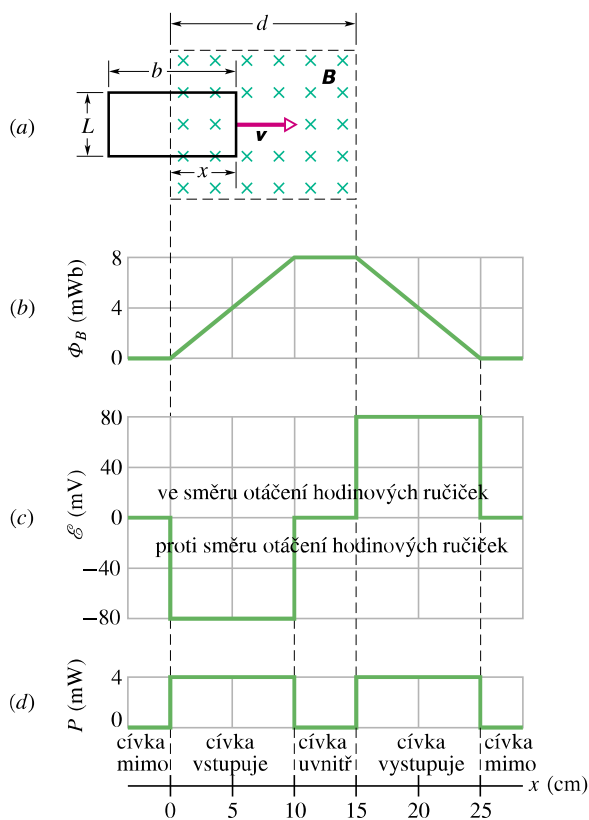
opět se v desce indukuje proud. Opět tedy přemáháme sílu a konáme práci. Vodivostní elektrony tvořící indukovaný proud v desce se však nyní nepohybují po jediné dráze jako v případě smyčky, ale krouží jako voda ve vířivé pračce. Takový elektrický proud se nazývá *vířivý*. Zobrazujeme

ho obvykle schematicky tak, *jako kdyby* sledoval jedinou dráhu, např. na obr. 31.12a.

Tak jako v případě vodivé smyčky na obr. 31.10 vede indukování proudu v desce k přeměně mechanické energie v energii chaotického pohybu atomů desky. Tato disipace energie je patrnější v uspořádání na obr. 31.12b: vodivá deska, otáčivá kolem vodorovné osy jako kyvadlo, prochází magnetickým polem. Vždy během vstupu do pole a výstupu z něj se část mechanické energie kyvadla disipuje. Po několika kmitech mechanická energie klesne na nulu, deska se přestane kývat a zastaví se v dolní rovnovážné poloze.

PŘÍKLAD 31.4

Obr. 31.13a ukazuje pravoúhlnou vodivou smyčku o odporu R , šířce L a délce b , kterou táhne konstantní rychlostí v přes oblast o šířce d , v níž je elektromagnetem vytvořeno homogenní magnetické pole o indukci B . Nechť $L = 40$ mm, $b = 10$ cm, $R = 1,6 \Omega$, $B = 2,0$ T a $v = 1,0$ m·s⁻¹.



Obr. 31.13 Příklad 31.4. (a) Uzavřená vodivá smyčka je protahována stálou rychlostí magnetickým polem. (b) Indukční tok smyčkou jako funkce polohy x pravé strany smyčky. (c) Indukované emn jako funkce x . (d) Výkon, s nímž vzniká Joulovo teplo ve smyčce jako funkce x .

(a) Nakreslete závislost toku Φ_B smyčkou na poloze x pravé strany smyčky.

ŘEŠENÍ: Není-li smyčka v poli, je magnetický tok smyčkou nulový. Je-li smyčka zcela v magnetickém poli, je tok smyčkou roven $BLb = 8 \text{ mWb}$. Vstupuje-li smyčka do pole, je tok roven BLx a vystupuje-li pak z něj, je roven $BL(b - (x - d))$. Výsledky jsou vyneseny na obr. 31.13b; ověřte je.

(b) Nakreslete závislost indukovaného emn na poloze smyčky. Vyznačte směr indukovaného emn.

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.6) je indukované emn rovno

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{d\Phi_B}{dx} v,$$

kde $d\Phi_B/dx$ je směrnice tečny ke křivce na obr. 31.13b. Na obr. 31.13c je emn vyneseno jako funkce x .

Vstupuje-li smyčka do pole (obr. 31.13a), teče indukovaný proud podle Lenzova zákona proti směru otáčení hodinových ručiček; při výstupu z pole má proud směr opačný. Na obr. 31.13c jsme emn přiřadili kladnou hodnotu polohám, v nichž indukovaný proud teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Žádné emn se neindukuje, je-li smyčka buď zcela mimo pole, nebo zcela uvnitř pole, protože v obou těchto případech se magnetický indukční tok smyčkou nemění.

(c) Vyneste do grafu výkon, s nímž se ve smyčce vyvíjí Joulovo teplo, jako funkci polohy smyčky.

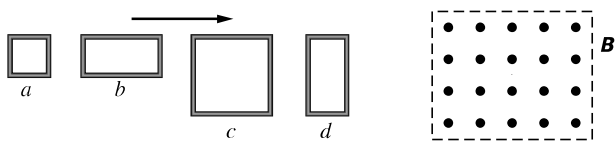
ŘEŠENÍ: Dosazením $I = \mathcal{E}/R$ do rov. (31.16) dostáváme výkon

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R}.$$

Tak z obr. 31.13c odvodíme obr. 31.13d. Všimněme si, že se teplo vyvíjí jen tehdy, když smyčka vstupuje do magnetického pole nebo z něj vystupuje.

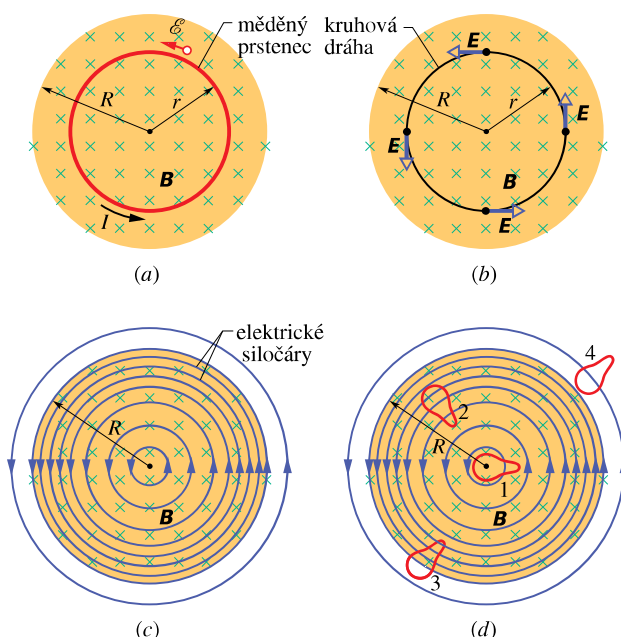
V praxi nemá magnetické pole \mathbf{B} ostrou hranici, kde by náhle kleslo na nulu, ale blíží se k nule spojitě a hladce. Na křivkách vyneseny na obr. 31.13 by tedy byly rohy zaobleny.

KONTROLA 3: Obrázek ukazuje čtyři vodivé smyčky s délkami stran L nebo $2L$. Všechny smyčky budou vnikat stejnou stálou rychlostí do oblasti homogenního magnetického pole \mathbf{B} (vystupujícího kolmo ze stránky). Seřadte tyto čtyři smyčky podle velikosti emn, indukovaného během vstupu do pole, největší uveďte jako první.



31.6 INDUKOVANÉ ELEKTRICKÉ POLE

Umístíme měděný prstencový dráha o poloměru r do homogenního magnetického pole, které vyplňuje válcový objem o poloměru R (obr. 31.14a). Předpokládejme, že rovnoměrně zvětšujeme magnetickou indukci pole, např. zvětšováním proudu ve vinutí elektromagnetu, jímž pole vytváříme. Magnetický indukční tok prstencem potom rovnoměrně poroste a podle Faradayova zákona vzniká v prstenci indukované emn a tím i indukovaný proud. Z Lenzova zákona plyne, že indukovaný proud I na obr. 31.14a směřuje proti směru otáčení hodinových ručiček.



Obr. 31.14 (a) Narůstá-li magnetické pole s časem rovnoměrně, indukuje se v měděném prstenci o poloměru r stálý proud. (b) Elektrické pole se v prostoru indukuje, i když je prstencem odstraněn. (c) Úplný obraz indukovaného elektrického pole zobrazeného siločárami. (d) Čtyři stejné uzavřené křivky ohraničují plochy o stejném obsahu. V křivkách 1 a 2 ležících zcela v oblasti měnícího se magnetického pole se indukuje stejné emn. Menší emn se indukuje podél křivky 3, která leží v této oblasti jen zčásti. Žádné emn se neindukuje podél křivky 4, která leží zcela mimo magnetické pole.

Teče-li měděným prstencem proud, musí být podél prstence elektrické pole, které zajistí pohyb vodivostních elektronů. Toto **indukované elektrické pole \mathbf{E}** je zřejmě vyvoláno měnícím se magnetickým indukčním tokem a je právě tak reálné jako elektrické pole vytvořené statickými náboji. Obě pole působí silou $Q_0\mathbf{E}$ na částici o náboji Q_0 . Tato úvaha nás přivádí k užitečnému a poučnému přeformulování Faradayova zákona elektromagnetické indukce:

Měnící se magnetické pole vytváří pole elektrické.

Pozoruhodné je, že podle této formulace se elektrické pole indukuje i tehdy, když v něm žádný měděný prstenec není.

K upevnění těchto poznatků uvažujme obr. 31.14b, který je shodný s obr. 31.14a jen s tím rozdílem, že měděný prstenec je nahrazen myšlenou kružnicí o poloměru r . Předpokládáme opět, že velikost magnetického pole \mathbf{B} vzrůstá stálou rychlostí $d\mathbf{B}/dt$. Intenzita \mathbf{E} elektrického pole indukovaného v různých bodech podél kružnice musí — z důvodů symetrie — ležet v tečně* ke kružnici, jak ukazuje obr. 31.14b. Tato kružnice je tedy také siločárou. Zvolený poloměr r není ničím zvláštní, takže elektrické siločáry pole vyvolaného proměnným magnetickým polem vytvářejí zřejmě svazek soustředných kružnic jako na obr. 31.14c.

Pokud magnetické pole s časem vzrůstá, trvá elektrické pole zobrazené kruhovými siločarami. Je-li však magnetické pole v čase neproměnné, nevzniká žádné indukované elektrické pole (na obrázku by žádné elektrické siločáry nebyly). Naopak, jestliže se magnetické pole s časem *změňuje*, vzniká elektrické pole, jehož siločáry jsou opět soustřednými kružnicemi jako na obr. 31.14c, ale nyní mají opačný směr. To vše máme na mysli, když říkáme, že měnícím se magnetickým polem se vytváří elektrické pole.

Přeformulování Faradayova zákona

Uvažujme částici o (kladném) náboji Q_0 pohybující se po kružnici podle obr. 31.14b. Práce na náboji Q_0 vykonaná indukovaným elektrickým polem při jednom oběhu je $W = Q_0 \mathcal{E}$, kde \mathcal{E} je indukované emn představující práci připadající na jednotkový náboj, který se pohybuje po této dráze. Obecně lze tuto práci vyjádřit vztahem

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (Q_0 E)(2\pi r). \quad (31.18)$$

(Kroužek značí, že integrál bereme po uzavřené křivce; připomeňme, že jde o cirkulaci vektoru \mathbf{F} .) Zde $Q_0 E$ je velikost síly působící na náboj Q_0 a $2\pi r$ je dráha, na níž tato síla působí. Porovnáním obou výrazů pro W dostáváme

$$\mathcal{E} = 2\pi r E. \quad (31.19)$$

* Symetrie úlohy nevyklučuje, že by siločáry pole \mathbf{E} mohly mít podél kružnice radiální směr a nikoliv tečný. Takové radiální siločáry by však znamenaly, že kolem osy symetrie jsou symetricky rozloženy volné náboje, na nichž siločáry začínají nebo končí; zde však žádné takové náboje nejsou.

Rov. (31.18) můžeme zobecnit pro libovolnou uzavřenou dráhu:

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Q_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (31.20)$$

Dosažením $\mathcal{E} Q_0$ za W získáme vztah

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (31.21)$$

Pomocí rov. (31.21) můžeme rozšířit fyzikální význam emn. Dosud jsme spojovali emn s prací, kterou bylo nutno dodat k zajištění pohybu náboje, ať už samostatného anebo tvořícího elektrický proud. Rov. (31.21) však umožňuje zavést indukované emn, aniž bychom k tomu potřebovali elektrický proud nebo částici. Indukované emn je součet — vyjádřený integrací — veličin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ podél orientované uzavřené křivky, kde \mathbf{E} je intenzita elektrického pole indukovaného měnícím se magnetickým indukčním tokem a $d\mathbf{s}$ je vektor infinitezimálního délkového elementu uzavřené dráhy.

Dosažíme-li (31.21) do rov. (31.6) ($\mathcal{E} = -d\Phi_B/dt$), dostáváme Faradayův zákon ve tvaru

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradayův zákon}). \quad (31.22)$$

Tato rovnice vyjadřuje, že měnícím se magnetickým polem je indukováno elektrické pole. Měnící se magnetický tok vystupuje na pravé straně této rovnice, cirkulace elektrického pole na levé.

Faradayův zákon ve tvaru rov. (31.22) můžeme použít na jakoukoli uzavřenou křivku, kterou vedeme měnícím se magnetickým polem. Obr. 31.14d například ukazuje čtyři stejné křivky, které jsou různě umístěny v měnícím se poli. Podél křivek 1 a 2 se indukuje stejné emn ($\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$), protože obě zcela leží v magnetickém poli a odpovídá jim tedy stejná hodnota $d\Phi_B/dt$. Tak je tomu, i když je průběh elektrického pole podél těchto křivek rozdílný, jak je patrné z průběhu elektrických siločár. V křivce 3 se indukuje emn menší, protože jí prochází menší tok Φ_B , a proto je menší i $d\Phi_B/dt$. Pro křivku 4 je indukované emn nulové, i když je elektrické pole ve všech bodech křivky nenulové.

Jiný pohled na elektrický potenciál

Indukovaná elektrická pole nejsou vytvářena statickými elektrickými náboji, ale měnícím se magnetickým polem. Ačkoli elektrická pole vytvořená jedním i druhým způsobem působí na nabitě částice úplně stejně, existuje mezi nimi významný rozdíl. Patrný projev tohoto rozdílu je, že siločáry indukovaných elektrických polí vytvářejí uzavřené

křivky jako na obr. 31.14c, zatímco siločáry vytvořené statickými náboji vždy začínají na kladných nábojích a končí na záporných.

Rozdíl mezi elektrickým polem vytvořeným elektromagnetickou indukcí a polem statických nábojů můžeme vyjádřit těmito slovy:

Elektrický potenciál má smysl jen pro pole statických nábojů. Nelze ho zavést pro elektrická pole vzniklá elektromagnetickou indukcí.

Kvalitativně můžeme porozumět tomuto výroku, když uvážíme, co se stane s částicí s jednotkovým nábojem po jednom oběhu kruhové dráhy (obr. 31.14b). Částice vyšla z určitého bodu a vrátila se do něj; během cesty na ni působila síla, která vykonala práci odpovídající emn, řekněme, $\mathcal{E} = 5 \text{ V}$. Její potenciál by byl musel vzrůst o tuto hodnotu. To však není možné, protože by též bod v prostoru musel mít dvě rozdílné hodnoty potenciálu. Docházíme k závěru, že pro elektrická pole vyvolaná měnícím se magnetickým polem nelze zavést potenciál jednoznačně.

Matematický náhled získáme, vzpomeneme-li si na rov. (25.18) definující potenciální rozdíl mezi počátečním (i) a koncovým (f) bodem:

$$\varphi_i - \varphi_f = - \int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (31.23)$$

V kap. 25 jsme se ještě nezabývali Faradayovým zákonem elektromagnetické indukce, takže elektrická pole uvažovaná při odvození rov. (25.18) byla výhradně pole statických nábojů. Splyne-li v rov. (31.23) počáteční bod s koncovým, je integrační cesta uzavřená, φ_i a φ_f jsou totožné a rov. (31.23) se redukuje na tvar

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (31.24)$$

Když se však mění magnetický indukční tok, *není* tento integrál roven nule, ale je roven $-d\Phi_B/dt$, jak plyne z rov. (31.22). Přicházíme tak k závěru, že elektrický potenciál *nelze zavést* pro elektrická pole vyvolaná elektromagnetickou indukcí.

PŘÍKLAD 31.5

Na obr. 31.14b je $R = 8,5 \text{ cm}$ a $dB/dt = 0,13 \text{ T}\cdot\text{s}^{-1}$.

(a) Najděte vztah pro velikost E intenzity indukovaného elektrického pole v bodech ve vzdálenosti r od osy magnetického pole. Vypočítejte E pro $r = 5,2 \text{ cm}$.

ŘEŠENÍ: Závislost $E(r)$ můžeme najít, uijeme-li Faradayův zákon ve tvaru rov. (31.22) pro uzavřenou integrační

křivku tvaru kružnice o poloměru r (obr. 31.14b). Ze symetrie jsme usoudili, že E na obr. 31.14b má směr tečny k uvažované kružnici v kterémkoli jejím bodě. Element $d\mathbf{s}$ je tečný ke kružnici a orientován souhlasně s \mathbf{E} , takže skalární součin $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ v rov. (31.22) je roven $E ds$ ve všech bodech křivky. Ze symetrie můžeme též usoudit, že E má podél křivky stejnou hodnotu. Platí tedy

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \oint E ds = E \oint ds = \\ &= E(2\pi r) = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \end{aligned} \quad (31.25)$$

Podle rov. (31.3) je magnetický indukční tok plochou ohraničenou uvažovanou kružnicí

$$\Phi_B = BS \cos 180^\circ = -B(\pi r^2). \quad (31.26)$$

Dosažením tohoto výsledku do rov. (31.25) zjistíme, že

$$E(2\pi r) = (\pi r^2) \frac{dB}{dt},$$

odkud

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (31.27)$$

Rov. (31.27) udává velikost elektrické intenzity v libovolném bodě pro $r < R$ (tj. uvnitř magnetického pole). Dosažením zadaných hodnot dostáváme, že velikost E pro $r = 5,2 \text{ cm}$ je

$$\begin{aligned} E &= \frac{(5,2 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2} (0,13 \text{ T}\cdot\text{s}^{-1}) = \\ &= 0,0034 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1} = 3,4 \text{ mV}\cdot\text{m}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Najděte vztah pro velikost E intenzity indukovaného elektrického pole v bodech vně magnetického pole. Vypočítejte E pro $r = 12,5 \text{ cm}$.

ŘEŠENÍ: Postupem jako v (a) dostáváme znovu rovnici (31.25). Magnetický indukční tok však nyní prochází jen plochou πR^2 , takže

$$\Phi_B = -BS = -B(\pi R^2). \quad (31.28)$$

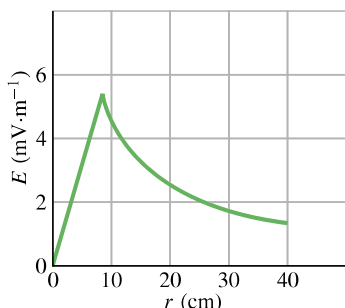
Dosažením do rov. (31.25) dostaneme

$$E = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (31.29)$$

Indukované elektrické pole tedy *není* rovno nule, třebaže dokonce ani kousek křivky (kružnice s poloměrem r větším než R) neleží v magnetickém poli, jehož změnou je elektrické pole indukováno! To se uplatňuje např. v činnosti transformátorů, jak uvidíme v čl. 31.11. Dosažením zadaných hodnot do rov. (31.29) dostáváme

$$\begin{aligned} E &= \frac{(8,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{2(12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m})} (0,13 \text{ T}\cdot\text{s}^{-1}) = \\ &= 3,8 \cdot 10^{-3} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1} = 3,8 \text{ mV}\cdot\text{m}^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

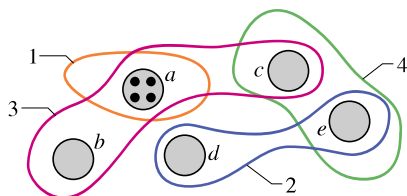
Rov. (31.27) a (31.29) dávají stejný výsledek pro $r = R$. Obr. 31.15 ukazuje závislost $E(r)$ podle těchto dvou rovnic.





Obr. 31.15 Příklad 31.5. Indukované elektrické pole $E(r)$.

KONTROLA 4: Obrázek ukazuje pět oblastí označených písmeny. Homogenní magnetické pole v nich buď vstupuje ze stránky k nám (např. v oblasti a), nebo do ní vstupuje. Obsahy oblastí jsou stejné a pole v nich vzrůstá stejným způsobem. Jsou také vyznačeny čtyři očíslované křivky, podél nichž $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ má udané hodnoty. Určete, zda magnetické pole v jednotlivých oblastech b až e směřuje od nás, nebo k nám.

Křivka:	1	2	3	4
$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$	1 V	2 V	3 V	0



31.7 CÍVKA A INDUKČNOST

V kap. 26 jsme viděli, že k vytvoření elektrického pole můžeme použít kondenzátor. Za základní typ kondenzátoru jsme považovali deskový kondenzátor. Podobně magnetické pole můžeme vytvořit **cívkou**. V obvodech ji znázorňujeme podle normy ISO , podle americké normy . Jako základní typ cívky budeme uvažovat dlouhý solenoid — nebo konkrétněji, krátký úsek ve střední části dlouhého solenoidu, kde se prakticky neprojevuje rozptyl magnetického pole na jeho koncích.

Podobně jako tomu bylo v kap. 26.1 s kapacitorem a kondenzátorem, česká terminologie rozlišuje *cívkou* jako reálnou součástku a *induktor* jako modelový prvek. I v tomto případě zde

budeme ze stejných důvodů jako dříve užívat nadále jen běžné označení cívka.

Proud I , tekoucí jedním závitem cívky, vytváří uvnitř závitu indukční magnetický tok Φ_B , který je přímo úměrný proudu: $\Phi_B \sim I$. Všech N závitů cívky tedy vytvoří celkový tok $N\Phi_B$ rovněž přímo úměrný proudu; konstantu úměrnosti L ve vztahu $N\Phi_B = LI$ nazýváme (**vlastní**) **indukčnost** cívky. Je tedy

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (\text{definice indukčnosti}). \quad (31.30)$$

Její velikost závisí na tvaru a rozměrech cívky; není-li cívka ve vakuu, pak i na magnetických vlastnostech prostředí. Protože jednotkou magnetického indukčního toku je $\text{T}\cdot\text{m}^2$, je jednotkou indukčnosti $\text{T}\cdot\text{m}^2\cdot\text{A}^{-1}$. Nazýváme ji **henry** (H) po americkém fyziku Josephu Henryovi, spoluobjeviteli zákona elektromagnetické indukce, Faradayově současníku. Je tedy

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T}\cdot\text{m}^2\cdot\text{A}^{-1}. \quad (31.31)$$

Ve zbytku této kapitoly předpokládáme, že žádné cívky, bez ohledu na jejich geometrické uspořádání, nemají ve své blízkosti magnetické materiály jako např. železo. Tyto materiály by indukčnost cívky výrazně ovlivnily.

Indukčnost solenoidu

Uvažujme dlouhý solenoid o průřezu S . Jaká indukčnost připadá na jednotku jeho délky (nikoli v blízkosti okrajů)?

Abychom mohli užít definiční rovnici indukčnosti (31.30), musíme vypočítat magnetický tok vytvořený proudem tekoucím vinutím solenoidu. Ten je pro úsek délky l vnitř solenoidu roven

$$N\Phi_B = (nl)(BS),$$

kde n je počet závitů na jednotku délky solenoidu a B je velikost magnetické indukce uvnitř solenoidu.

Velikost B je dána rov. (30.25),

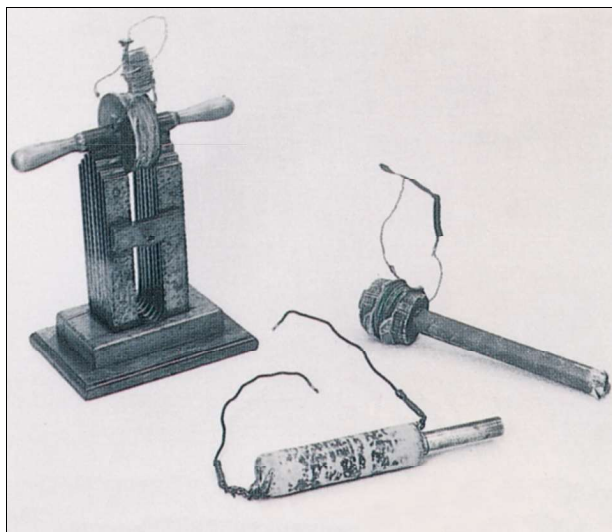
$$B = \mu_0 In,$$

takže z rov. (31.30) dostaneme

$$\begin{aligned} L &= \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{(nl)(BS)}{I} = \frac{(nl)(\mu_0 In)(S)}{I} = \\ &= \mu_0 n^2 l S. \end{aligned} \quad (31.32)$$

Odtud pro indukčnost připadající na jednotku délky dlouhého solenoidu (dostatečně daleko od okrajů) plyne

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad (\text{solenoid}). \quad (31.33)$$



Prosté cívky, s nimiž Michael Faraday objevil zákon elektromagnetické indukce. V oněch dobách nebyly v obchodě k dostání takové vymoženosti, jako je izolovaný drát. Traduje se, že Faraday izoloval své dráty tím, že je obaloval proužky ze spodničky své manželky.

Indukčnost, podobně jako kapacita, závisí pouze na geometrii cívky. Závislost na čtverci počtu závitů na jednotku délky je pochopitelná. Jestliže, řekněme, ztrojnásobíme n , ztrojnásobíme nejen počet závitů N , ale také tok $\Phi_B = BS = \mu_0 InS$ každým závitem a zvětšíme tak celkový tok $N\Phi_B$ devětkrát. Proto se zdevítinásobí indukčnost L .

Je-li solenoid mnohem delší než jeho poloměr, pak rov. (31.32) dobře aproximuje jeho indukčnost. Tato aproximace zanedbává rozptyl magnetického pole poblíž konců solenoidu právě tak, jako vztah pro kapacitu rovinného kondenzátoru ($C = \epsilon_0 S/d$) zanedbává rozptyl elektrického pole poblíž okrajů desek kondenzátoru.

Z rov. (31.32) plyne, že μ_0 můžeme vyjádřit v jednotkách henry na metr

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} = \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}.\end{aligned}\quad (31.34)$$

PŘÍKLAD 31.6

Obr. 31.16 ukazuje příčný řez toroidem o N závitů obdélníkového průřezu. Jeho rozměry jsou vyznačeny.

(a) Jaká je jeho indukčnost L ?

ŘEŠENÍ: Abychom mohli použít definici indukčnosti z rovnice (31.30), potřebujeme znát magnetický tok Φ_B způsobený proudem v toroidu. Z rov. (30.26) dostaneme velikost B magnetického pole v toroidu

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}, \quad (31.35)$$

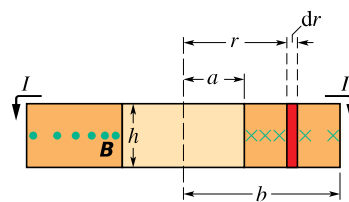
kde r je vzdálenost od osy toroidu. Tato rovnice platí bez ohledu na tvar nebo rozměry průřezu toroidu.

Protože pole B není v průřezu toroidu homogenní, nemůžeme k výpočtu toku užít rov. (31.4) ($\Phi_B = BS$), ale musíme užít rov. (31.3), tj.

$$\Phi_B = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (31.36)$$

Magnetická indukce \mathbf{B} je všude kolmá na průřez, jak ukazuje obr. 31.16, a je tedy rovnoběžná s vektorem elementární plochy $d\mathbf{S}$ průřezu. Skalární součin v rov. (31.36) dává tedy $B dS$. Jako element plochy dS můžeme vzít plochu $h dr$ proužku vyznačeného na obr. 31.16. Dosazením těchto veličin do rov. (31.36) a integrováním od $r = a$ do $r = b$ dostaneme

$$\begin{aligned}\Phi_B &= \int_a^b B h dr = \int_a^b \frac{\mu_0 IN}{2\pi r} h dr = \\ &= \frac{\mu_0 IN h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 IN h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.\end{aligned}$$



Obr. 31.16 Příklad 31.6. Řez toroidem, ukazující proud ve vinutí a příslušné magnetické pole (viz též obr. 30.21). Nehomogenost magnetického pole toroidu je znázorněna nerovnoměrným rozložením teček a křížků.

Rov. (31.30) potom dává

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{N}{I} \frac{\mu_0 IN h}{2\pi} \ln \frac{b}{a},$$

takže

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (\text{Odpověď}) \quad (31.37)$$

(b) Toroid na obr. 31.16 má $N = 1250$ závitů, $a = 52$ mm, $b = 95$ mm a $h = 13$ mm. Jakou má indukčnost?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.37)

$$\begin{aligned}L &= \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a} = \\ &= \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1})(1250)^2 (13 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{2\pi} \ln \frac{(95 \text{ mm})}{(52 \text{ mm})} = \\ &= 2,45 \cdot 10^{-3} \text{ H} \doteq 2,5 \text{ mH}.\end{aligned}\quad (\text{Odpověď})$$

31.8 VLASTNÍ INDUKCE

Jsou-li dvě cívky blízko sebe, pak proud I tekoucí první cívkou vytváří magnetický tok Φ_B , který prochází — alespoň zčásti i druhou cívkou. Měníme-li tento tok tím, že měníme proud I , vzniká v druhé cívce (podle Faradayova zákona) indukované emn, jak jsme viděli již dříve. Avšak v první cívce vzniká indukované napětí také.

Indukované emn vzniká v každé cívce, v níž se elektrický proud mění.

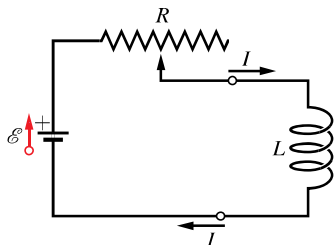
Tento jev (obr. 31.17) se nazývá **vlastní indukce** (dříve též **samoindukce**). Příslušné indukované emn lze opět vyjádřit Faradayovým zákonem elektromagnetické indukce.

Podle rov. (31.30) je

$$N\Phi_B = LI. \quad (31.38)$$

Z Faradayova zákona pak plyne, že emn je rovno

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d(N\Phi_B)}{dt}. \quad (31.39)$$



Obr. 31.17 Posouváním kontaktu po rezistoru měníme proud v cívce. Když se proud cívkou mění, vzniká v ní indukované emn.

Z rov. (31.38) a (31.39) dostáváme

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} \quad (\text{indukované emn}). \quad (31.40)$$

V každé cívce (např. v solenoidu nebo toroidu) tedy vzniká indukované emn, kdykoli se v ní mění proud. Sama velikost proudu na indukované emn nemá vliv; záleží jen na rychlosti změny proudu.

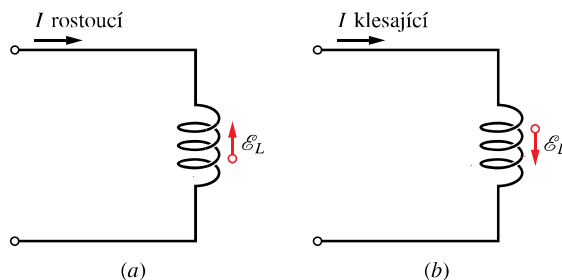
Směr indukovaného emn můžeme určit pomocí Lenzova zákona. Znaménko minus v rov. (31.40) značí — v souladu s Lenzovým zákonem — že indukované emn brání změně, která jej vyvolala.

Předpokládejme (obr. 31.18a), že zavedeme do cívky proud I a zvětšujeme jej rychlostí dI/dt . Podle Lenzova

zákona je toto zvětšování napětí onou změnou, proti níž bude indukovaný proud působit. Indukované emn proto má takový směr, že brání zvětšování proudu. Zmenšujeme-li naopak proud (obr. 31.18b), bude indukované napětí namířeno tak, že tomuto zmenšování brání, jak ukazuje obrázek.

V čl. 31.6 jsme viděli, že nemůžeme definovat elektrický potenciál pro elektrické pole, které je indukováno měnícím se magnetickým indukčním tokem. To znamená, že uvnitř cívky na obr. 31.17, v níž se indukuje emn měnícím se indukčním tokem, nemůžeme definovat elektrický potenciál. Potenciál však lze zavést v bodech v obvodu mimo tuto oblast (tedy tam, kde jsou elektrická pole vyvolána jen rozložením elektrických nábojů).

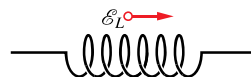
Kromě toho můžeme definovat rozdíl potenciálů (tj. napětí) U_L na cívce (tj. mezi jejími svorkami, o nichž předpokládáme, že jsou mimo oblast měnícího se magnetického toku). Je-li cívka *ideální* (její drát má zanedbatelný odpor), je velikost U_L rovna velikosti indukovaného emn: \mathcal{E}_L .



Obr. 31.18 (a) Proud I roste a indukuje tím v cívce emn v takovém směru, aby bránilo tomuto vzrůstu. Šipku představující \mathcal{E}_L můžeme umístit podél cívky. (b) Proud I klesá a indukované emn má takový směr, že brání tomuto poklesu.

Má-li drát skutečné cívky odpor r , můžeme si ho představit oddělený od cívky (mimo oblast měnícího se indukčního toku). Skutečnou cívku pak vyjádříme jako seriové zapojení rezistoru o odporu r a ideální cívky indukující emn o velikosti \mathcal{E}_L . Podobně jako v případě reálné baterie s emn o velikosti \mathcal{E} a s vnitřním odporem r , i zde se liší napětí na svorkách reálné cívky od jejího emn. Pokud nebude výslovně uvedeno jinak, budeme v dalším předpokládat, že cívky jsou ideální.

KONTROLA 5: Obrázek ukazuje elektromotorické napětí \mathcal{E}_L , indukované v cívce. Které z následujících variant mohou nastat? Proud cívkou je (a) stálý a teče



doprava; (b) stálý a teče doleva; (c) rostoucí a teče doprava; (d) klesající a teče doprava; (e) rostoucí a teče doleva; (f) klesající a teče doleva.

31.9 OBVODY RL

V čl. 28.8 jsme viděli, že připojíme-li náhle emn o hodnotě \mathcal{E} k sériovému obvodu s odporem R a kapacitou C , nevzroste náboj Q kondenzátoru okamžitě na koncovou, ustálenou hodnotu $Q_0 = C\mathcal{E}$, ale blíží se k ní exponenciálně podle vztahu

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau_C}). \quad (31.41)$$

Rychlost, s níž náboj vzrůstá, je určena časovou konstantou τ_C obvodu RC , pro níž platí

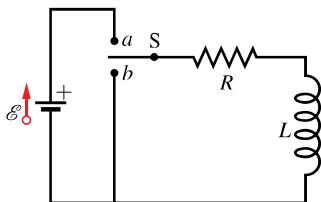
$$\tau_C = RC. \quad (31.42)$$

Z rov. (28.36) také víme, že vypneme-li v tomto obvodu náhle emn, neklesne náboj kondenzátoru okamžitě na nulu, ale blíží se k ní exponenciálně:

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau_C}. \quad (31.43)$$

Vidíme, že časová konstanta τ_C charakterizuje rychlost klesání i narůstání náboje.

Obdobně se zpomalí růst nebo pokles proudu, jestliže zapneme nebo vypneme emn v jednoduchém obvodu s rezistorem R a cívkou L . Dáme-li přepínač S na obr. 31.19 např. do polohy a , začne vzrůstat proud procházející rezistorem. Kdyby v obvodu cívka nebyla, vzrostl by proud okamžitě na ustálenou hodnotu \mathcal{E}/R . Cívka však vytváří v obvodu indukované emn \mathcal{E}_L . To podle Lenzova zákona brání růstu proudu, což znamená, že má opačnou polaritu než má emn baterie. Proud rezistorem je tedy určen dvěma emn: konstantním \mathcal{E} baterie a proměnným $\mathcal{E}_L = -L dI/dt$, vzniklým elektromagnetickou indukcí v cívce. Dokud vzniká \mathcal{E}_L , je proud rezistorem (a tedy celým obvodem) menší než \mathcal{E}/R .



Obr. 31.19 Obvod RL . Když dáme přepínač S do polohy a , proud roste, až dosáhne mezní hodnoty \mathcal{E}/R .

Proud roste stále povlnněji, takže i velikost indukovaného emn, která je úměrná dI/dt , se zmenšuje. Proud v obvodu se proto blíží hodnotě \mathcal{E}/R asymptoticky.

Tento výsledek můžeme vyjádřit takto:

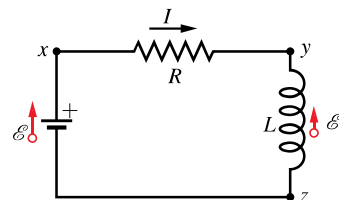
Cívka zpočátku brání změnám protékajícího proudu. Později, v ustáleném stavu, se chová jako obyčejný vodič.

Nyní rozeberme situaci kvantitativně. Při zapnutí přepínače S na obr. 31.19 do polohy a je obvod ekvivalentní obvodu na obr. 31.20. Použijme smyčkové pravidlo pro součet napětí v obvodu (2. Kirchhoffův zákon). Začneme v bodě x na obr. 31.20 a postupujeme podél obvodu ve směru otáčení hodinových ručiček. Pro vyznačený směr proudu I bude mít bod x vyšší potenciál než bod y , což znamená, že se při přechodu změnil potenciál o $-IR$. Bod y má vyšší potenciál než bod z , protože při rostoucím proudu brání indukované napětí tomuto růstu, a má proto směr vyznačený na obrázku. Když tedy přecházíme podél cívky z bodu y do bodu z , změní se potenciál o $\mathcal{E}_L = -L dI/dt$. Při průchodu baterií zaznamenáváme nárůst potenciálu o $+\mathcal{E}$. Smyčkové pravidlo tedy dává

$$-IR - L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E} = 0,$$

takže

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} \quad (\text{obvod } RL). \quad (31.44)$$



Obr. 31.20 Obvod na obr. 31.19 s přepínačem v poloze a . Použijeme smyčkové pravidlo pro součet napětí v obvodu. Začneme v bodě x a postupujeme ve směru otáčení hodinových ručiček.

Rov. (31.44) je diferenciální rovnice, obsahující hledanou funkci $I(t)$ a její první derivaci dI/dt . Řešit tuto rovnici znamená najít funkci $I(t)$, která splňuje tuto rovnici a vyhovuje také počáteční podmínce $I(0) = 0$.

Rov. (31.44) a její počáteční podmínka mají stejný tvar jako rov. (28.29) pro obvod RC , jestliže I nahradíme Q , L nahradíme R a R nahradíme $1/C$. Řešení rov. (31.44) musí tedy mít tvar rov. (28.30) s uvedenou záměnou veličin. Toto řešení je

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}), \quad (31.45)$$

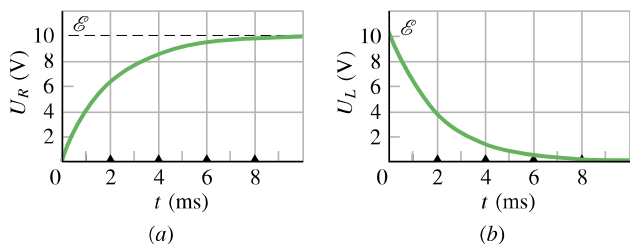
což můžeme zapsat ve tvaru

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad (\text{růst proudu}), \quad (31.46)$$

v němž τ_L je časová konstanta obvodu RL určená vztahem

$$\tau_L = \frac{L}{R} \quad (\text{časová konstanta}). \quad (31.47)$$

Obr. 31.21 ukazuje, jak se mění s časem napětí $U_R = IR$ na rezistoru a napětí $U_L = L \, dI/dt$ na cívce pro určité hodnoty \mathcal{E} , L a R . Srovnajte pečlivě tento obrázek s odpovídajícím obrázkem pro obvod RC (obr. 28.14).



Obr. 31.21 Časový průběh (a) U_R , tj. napětí na rezistoru v obvodu na obr. 31.20, a (b) U_L , tj. napětí na cívce v témže obvodu. Malé trojúhelníky vyznačují násobky časové konstanty $\tau_L = L/R$. Obrázek je vyneseno pro $R = 2000 \, \Omega$, $L = 4,0 \, \text{H}$ a $\mathcal{E} = 10 \, \text{V}$.

Ukážeme, že veličina $\tau_L = L/R$ má rozměr času:

$$1 \frac{\text{H}}{\Omega} = 1 \frac{\text{H}}{\Omega} \left(\frac{1 \, \text{V} \cdot \text{s}}{1 \, \text{H} \cdot \text{A}} \right) \left(\frac{1 \, \Omega \cdot \text{A}}{1 \, \text{V}} \right) = 1 \, \text{s}.$$

První veličina v závorkách je převodní koeficient odvozený z rov. (31.40) a druhá je převodní koeficient odvozený ze vztahu $U = IR$.

Fyzikální význam časové konstanty vyplývá z rovnice (31.46). Položíme-li v této rovnici $t = \tau_L = L/R$, redukuje se na tvar

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-1}) \doteq 0,63 \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Časová konstanta τ_L je tedy doba, za niž proud v obvodu dosáhne o $1/e$ (tj. asi o 37 %) nižší hodnotu, než je koncová ustálená hodnota \mathcal{E}/R . (Je to tedy doba, za niž dosáhne asi 63 % této ustálené hodnoty.) Protože je napětí U_R na rezistoru úměrné proudu I , má časová závislost rostoucího proudu stejný tvar jako závislost U_R vynesená na obr. 31.21a.

Ponechme přepínač S na obr. 31.19 dosti dlouho v poloze a , aby proud nabyl ustálené hodnoty \mathcal{E}/R , a pak ho náhle přepneme do polohy b . Tím vyřadíme baterii z obvodu. (Předpokládejme, že máme přepínač typu *make-before-break-switch*, který během přepojování z a do b se nejprve propojí s b — v tu chvíli jsou tedy také

propojeny body a a b navzájem — a teprve potom se odpojí od a .)

Proud v rezistoru nepoklesne na nulu skokem, ale plynule. Diferenciální rovnici, která tento pokles popisuje, dostaneme z rov. (31.44) dosazením $\mathcal{E} = 0$

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \quad (31.48)$$

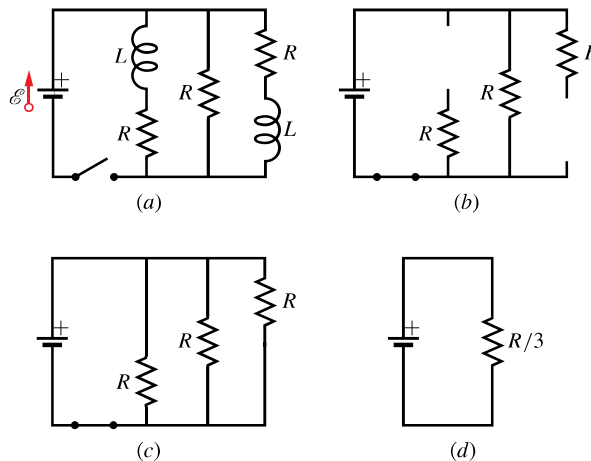
Podle analogie s rov. (28.35) a (28.36) má řešení této diferenciální rovnice při splnění počáteční podmínky $I(0) = I_0 = \mathcal{E}/R$ tvar

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/\tau_L} = I_0 e^{-t/\tau_L} \quad (\text{pokles proudu}). \quad (31.49)$$

Vidíme, že v obvodu RL jak růst proudu (rov. (31.46)), tak jeho pokles (rov. (31.49)) je charakterizován stejnou časovou konstantou τ_L .

PŘÍKLAD 31.7

Obr. 31.22a ukazuje obvod se třemi stejnými rezistory o odporu $R = 9,0 \, \Omega$, dvěma stejnými cívkami o indukčnosti $L = 2,0 \, \text{mH}$ a ideální baterií o $\mathcal{E} = 18 \, \text{V}$.



Obr. 31.22 Příklad 31.7. (a) Několikasmyčkový obvod RL , spínač je vypnut. (b) Ekvivalentní obvod okamžitě po zapnutí spínače. (c) Ekvivalentní obvod delší dobu poté. (d) Jednosmyčkový obvod ekvivalentní obvodu (c).

(a) Jaký proud I teče baterií okamžitě po sepnutí spínače?

ŘEŠENÍ: Protože proud každou z cívek je před zapnutím nulový, je také nulový okamžitě po zapnutí. Okamžitě po zapnutí se tedy cívky chovají jako přerušené dráty, jak je ukázáno na obr. 31.22b. Tím dostáváme jednosmyčkový obvod, pro nějž pravidlo pro součet napětí dává

$$\mathcal{E} - IR = 0.$$

Dosazením zadaných hodnot dostáváme

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{(18 \text{ V})}{(9,0 \Omega)} = 2,0 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaký proud I teče baterií dlouho po sepnutí spínače?

ŘEŠENÍ: Dlouho po sepnutí ($t \gg \tau_L$) dosáhnou proudy v obvodu svých ustálených hodnot. Tehdy se cívky chovají jako obyčejné vodiče, jak ukazuje obr. 31.22c. Máme pak obvod se třemi paralelně zapojenými rezistory; podle rov. (28.20) je toto zapojení ekvivalentní rezistoru $R_p = R/3 = (9,0 \Omega)/3 = 3,0 \Omega$. Ekvivalentní obvod na obr. 31.22d potom splňuje rovnici $\mathcal{E} - IR_p = 0$ neboli

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_p} = \frac{(18 \text{ V})}{(3,0 \Omega)} = 6,0 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

PŘÍKLAD 31.8

Solenoid má indukčnost 53 mH a odpor $0,37 \Omega$. Za jak dlouho po připojení k baterii vzroste proud na polovinu své koncové ustálené hodnoty?

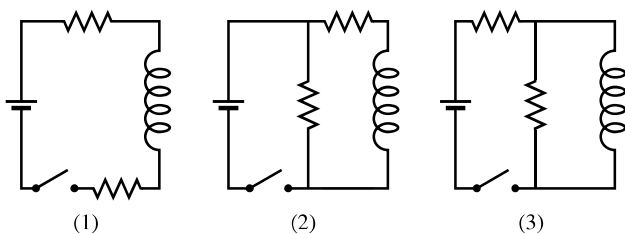
ŘEŠENÍ: Ustálené hodnoty dosáhne proud pro $t \rightarrow \infty$; podle rov. (31.46) je tato hodnota \mathcal{E}/R . Pro poloviční hodnotu proudu a hledaný čas t_0 tato rovnice dává

$$\frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t_0/\tau_L}).$$

Vykrátíme \mathcal{E}/R , osamostatníme exponenciální výraz, obě strany zlogaritmuje. Tak dostaneme

$$\begin{aligned} t_0 &= \tau_L \ln 2 = \\ &= \frac{L}{R} \ln 2 = \frac{(53 \cdot 10^{-3} \text{ H})}{(0,37 \Omega)} \ln 2 = \\ &= 0,10 \text{ s.} \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

KONTROLA 6: Obrázek ukazuje tři obvody se stejnými bateriemi, cívkami a rezistory. Seřadte v sestupném pořadí obvody podle velikosti proudu baterií (a) okamžitě po zapnutí vypínače, (b) za dlouho poté.



31.10 ENERGIE MAGNETICKÉHO POLE

Odtahujeme-li od sebe opačné náboje, roste jejich elektrická potenciální energie a o ní už víme, že se hromadí v elektrickém poli těchto nábojů. Můžeme ji dostat z pole zpět, necháme-li náboje přiblížit se zpátky k sobě.

O energii nahromaděné v magnetickém poli můžeme uvažovat stejným způsobem. Například dva dlouhé rovnoběžné dráty protékané proudy stejného směru se přitahují a musíme vykonat práci, abychom je odtáhli od sebe. Tím nahromadíme energii v magnetickém poli těchto proudů. Tuto energii můžeme kdykoliv dostat zpět, přesunou-li se dráty zpět do původních poloh.

Kvantitativní výraz pro energii nahromaděnou v magnetickém poli odvodíme, uvažíme-li znovu obr. 31.20, který ukazuje zdroj emn připojený k rezistoru R a cívce L . Rov. (31.44), tj.

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + IR, \quad (31.50)$$

je diferenciální rovnice, popisující růst proudu v tomto obvodu. Zdůrazněme, že tato rovnice plyne bezprostředně z pravidla pro součet napětí v obvodu; toto pravidlo zase vyjadřuje zákon zachování energie pro jednoduchý obvod. Násobíme-li obě strany rov. (31.50) veličinou I , dostaneme rovnici

$$\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt} + I^2 R, \quad (31.51)$$

kteřá má tento fyzikální výklad v pojmech práce a energie:

1. Projde-li náboj dQ baterií s emn \mathcal{E} za dobu dt , vykoná baterie na náboji práci $\mathcal{E} dQ$. Výkon, s nímž koná baterie práci, je $\mathcal{E} dQ/dt$ neboli $\mathcal{E} I$. Levá strana rov. (31.51) tedy představuje výkon, s jakým dodáváme energii zdrojem emn do zbytku obvodu.

2. Druhý člen na pravé straně rov. (31.51) představuje rychlost disipace energie v rezistoru, tj. tepelný výkon rezistoru.

3. Energie, která není disipována, se v soulase se zákonem zachování energie hromadí v magnetickém poli cívky. Protože rov. (31.51) vyjadřuje zachování energie, vyjadřuje prostřední člen rov. (31.51) rychlost dE_{mg}/dt hromadění energie v magnetickém poli, takže

$$\frac{dE_{\text{mg}}}{dt} = LI \frac{dI}{dt}. \quad (31.52)$$

Tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$dE_{\text{mg}} = LI dI.$$

Integrací dostáváme

$$\int_0^{E_{\text{mg}}} dE'_{\text{mg}} = \int_0^I LI' dI'$$

neboli (pro libovolně zvolené I)

$$E_{\text{mg}} = \frac{1}{2}LI^2 \quad (\text{magnetická energie cívky}). \quad (31.53)$$

Vztah (31.53) představuje celkovou magnetickou energii cívky, tj. energii magnetického pole vytvořeného cívku, kterou teče proud I . Všimněme si podobnosti mezi tímto výrazem a výrazem (26.21) pro elektrickou energii kondenzátoru, tj. elektrického pole vytvořeného kondenzátorem o kapacitě C s nábojem Q :

$$E_{\text{el}} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (31.54)$$

PŘÍKLAD 31.9

Cívka má indukčnost 53 mH a odpor 0,35 Ω .

(a) Cívku připojíme ke zdroji emn $\mathcal{E} = 12$ V. Kolik energie se nahromadí v magnetickém poli, když proud dosáhne ustálené hodnoty (tj. pro $t \rightarrow \infty$, prakticky pro $t \gg \tau_L$)?

ŘEŠENÍ: Nahromaděná energie je vyjádřena rov. (31.53)

$$E_{\text{mg}} = \frac{1}{2}LI^2.$$

Ke stanovení energie v ustáleném stavu musíme do tohoto výrazu dosadit ustálený proud. Ten je podle rov. (31.46) roven

$$I_{\infty} = I(t \rightarrow \infty) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{(12 \text{ V})}{(0,35 \Omega)} = 34,3 \text{ A}.$$

Dosazením dostáváme

$$E_{\text{mg}\infty} = \frac{1}{2}LI_{\infty}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(53 \cdot 10^{-3} \text{ H})(34,3 \text{ A})^2 = 31 \text{ J}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Po jaké době (vyjádřené jako násobek časové konstanty) se v magnetickém poli nahromadí polovina ustálené hodnoty energie magnetického pole?

ŘEŠENÍ: Otázka zní, za jakou dobu t bude platit vztah

$$E_{\text{mg}} = \frac{1}{2}E_{\text{mg}\infty}.$$

Rov. (31.53) umožňuje přepsat tuto podmínku do tvaru

$$\frac{1}{2}LI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}LI_{\infty}^2$$

a odtud

$$I = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)I_{\infty}.$$

Přítom I plyne z rov. (31.46) a $I_{\infty} = \mathcal{E}/R$. Proto

$$\frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) = \frac{\mathcal{E}}{R\sqrt{2}}.$$

Zkrácením \mathcal{E}/R a úpravou dostáváme

$$e^{-t/\tau_L} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,293,$$

což dává

$$\frac{t}{\tau_L} = -\ln 0,293 = 1,23$$

a odtud

$$t \doteq 1,2\tau_L. \quad (\text{Odpověď})$$

Hromaděná energie tedy dosáhne poloviny své ustálené hodnoty za dobu $1,2\tau_L$.

PŘÍKLAD 31.10

Cívka o indukčnosti 3,56 H je zapojena v sérii s rezistorem 12,8 Ω a k tomuto obvodu RL je náhle připojeno emn 3,24 V.

(a) Jaký příkon P je dodáván baterií do obvodu v čase τ_L po připojení?

ŘEŠENÍ: Proud v obvodu je dán rov. (31.46)

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}),$$

odkud

$$I = \frac{(3,24 \text{ V})}{(12,8 \Omega)}(1 - e^{-1}) = 0,1600 \text{ A}.$$

Příkon dodávaný baterií je pak dán rov. (27.21), kde roli U hraje \mathcal{E} . V okamžiku $t = \tau_L$ je tedy

$$P = \mathcal{E}I = (3,24 \text{ V})(0,1600 \text{ A}) = 0,5184 \text{ W} \doteq 518 \text{ mW}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaký je tepelný výkon rezistoru v tomtéž okamžiku?

ŘEŠENÍ: Tepelný výkon je vyjádřen rov. (27.22). Pro $t = \tau_L$ dostáváme

$$P_R = I^2(\tau_L) \cdot R = (0,1600 \text{ A})^2(12,8 \Omega) = 0,3277 \text{ W} \doteq 328 \text{ mW}. \quad (\text{Odpověď})$$

(c) S jakým výkonem se hromadí energie v magnetickém poli v tomtéž okamžiku?

ŘEŠENÍ: Vydeme z rov. (31.52), vyžadující znalost dI/dt . Derivace rov. (31.45) dává

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} \frac{R}{L} (e^{-Rt/L}) = \frac{\mathcal{E}}{L} (e^{-t/\tau_L}).$$

Pro $t = \tau_L$ dostáváme

$$\frac{dI}{dt} = \frac{(3,24 \text{ V})}{(3,56 \text{ H})} (e^{-1}) = 0,3348 \text{ A}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Podle rov. (31.52) je hledaný výkon roven

$$\begin{aligned} P_{\text{mg}} &= \frac{dE_{\text{mg}}}{dt} = LI \frac{dI}{dt} = \\ &= (3,56 \text{ H})(0,1600 \text{ A})(0,3348 \text{ A}\cdot\text{s}^{-1}) = \\ &= 0,1907 \text{ W} \doteq 191 \text{ mW}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

Všimněme si, že

$$P = P_R + P_{\text{mg}},$$

jak vyžaduje zákon zachování energie.

31.11 HUSTOTA ENERGIE MAGNETICKÉHO POLE

Uvažujme dlouhý solenoid s průřezem o obsahu S . V něm budeme sledovat úsek délky l (ne blízko u krajů); ten vymezuje uvnitř solenoidu objem V o velikosti Sl . Protéká-li solenoidem proud I , vytvoří se uvnitř objemu V homogenní magnetické pole B ; pole vně solenoidu je prakticky nulové.

Energie pole vytvořeného uvažovaným úsekem musí být zřejmě uložena v objemu V , a to rovnoměrně (díky homogenitě magnetického pole) s hustotou

$$w_{\text{mg}} = \frac{E_{\text{mg}}}{Sl}.$$

Protože však $E_{\text{mg}} = \frac{1}{2}LI^2$, můžeme vyjádřit hustotu energie ve tvaru

$$w_{\text{mg}} = \frac{LI^2}{2Sl} = \frac{L}{l} \frac{I^2}{2S}$$

a po dosazení za L/l z rov. (31.33)

$$w_{\text{mg}} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2. \quad (31.55)$$

Pomocí rov. (30.25) ($B = \mu_0 In$) můžeme konečně hustotu energie vyjádřit pomocí magnetické indukce:

$$w_{\text{mg}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (\text{hustota energie magnetického pole}). \quad (31.56)$$

Tato rovnice udává hustotu energie všude, kde je magnetické pole B . Ačkoliv jsme rov. (31.56) odvodili pro speciální případ pole v části solenoidu, platí pro všechna magnetická pole, jakkoli vytvořená. Rov. (31.56) je obdobou rov. (26.23)

$$w_{\text{el}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad (31.57)$$

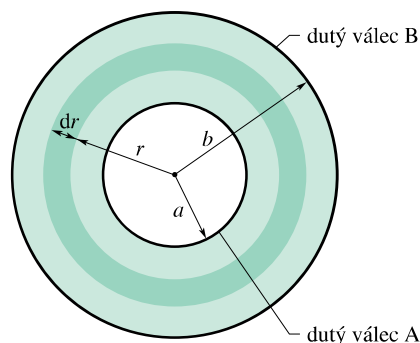
kteřá udává (ve vakuu) hustotu energie elektrického pole. Všimněme si, že jak hustota w_{mg} , tak hustota w_{el} je úměrná druhé mocnině odpovídající veličiny, B nebo E , popisující pole.

KONTROLA 7: Tabulka udává počet závitů na jednotku délky, proud a průřez pro tři solenoidy. Seřaďte solenoidy sestupně podle hustoty energie magnetického pole uvnitř nich.

ZÁVITY NA			
SOLENOID	JEDNOTKU DÉLKY	PROUD	PLOCHA
a	$2n_1$	I_1	$2S_1$
b	n_1	$2I_1$	S_1
c	n_1	I_1	$6S_1$

PŘÍKLAD 31.11

Dlouhý koaxiální kabel (obr. 31.23) je vytvořen ze dvou tenkostěnných sousedních vodivých dutých válců s poloměry a a b . Vnitřním válcem A teče stálý proud I , vnějším válcem B se tento proud vrací.



Obr. 31.23 Příklad 31.11. Průřez dlouhého koaxiálního kabelu sestávajícího ze dvou tenkostěnných vodivých dutých válců. Poloměr vnitřního válce je a , poloměr vnějšího válce je b .

(a) Vypočítejte energii nahromaděnou v magnetickém poli mezi válci na délce l kabelu.

ŘEŠENÍ: Uvažujme objem dV válcové vrstvy mezi dvěma válci o poloměrech r a $r + dr$ a délce l . Energie dE_{mg} obsažená v tomto objemu je

$$dE_{\text{mg}} = w_{\text{mg}} dV,$$

kde w_{mg} (hustota energie, tj. energie připadající na jednotkový objem) podle rov. (31.56) je $B^2/(2\mu_0)$. Velikost B magnetické indukce jako funkci r dostaneme z Ampérova zákona

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I,$$

kde integrujeme po kružnici o poloměru r na obr. 31.23. Tak dostaneme

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 I,$$

odkud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Hustota energie mezi válci pak je

$$w_{\text{mg}} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Objem dV uvažované vrstvy je $(2\pi r l)(dr)$, takže energie dE_{mg} v ní obsažená je

$$dE_{\text{mg}} = w_{\text{mg}} dV = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} (2\pi r l)(dr) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}.$$

Energii nahromaděnou v prostoru mezi válci koaxiálního kabelu dostaneme integrací předchozího výrazu:

$$\begin{aligned} E_{\text{mg}} &= \int dE_{\text{mg}} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \\ &= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned} \quad (31.58)$$

Vně vnějšího válce a uvnitř vnitřního válce se nehromadí žádná energie, protože v obou těchto prostorech je magnetické pole nulové, jak můžeme snadno ukázat pomocí Ampérova zákona.

(b) Jaká energie se nahromadí v kabelu jednotkové délky, když $a = 1,2$ mm, $b = 3,5$ mm a $I = 2,7$ A?

ŘEŠENÍ: Podle rov. (31.58) máme

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{mg}}}{l} &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a} = \\ &= \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1})(2,7 \text{ A})^2}{4\pi} \ln \frac{(3,5 \text{ mm})}{(1,2 \text{ mm})} = \\ &= 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ J}\cdot\text{m}^{-1} = 780 \text{ nJ}\cdot\text{m}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

31.12 VZÁJEMNÁ INDUKČNOST

V tomto článku se vrátíme k případu dvou vzájemně na sebe působících cívek, se kterým jsme se setkali v čl. 31.2. Pojďme o něm poněkud podrobněji. Jsou-li dvě cívky

blízko sebe a jednou z nich protéká stálý proud I , prochází druhou z nich magnetický tok Φ_B , jak jsme viděli na obr. 31.2. Měníme-li proud I , vzniká v druhé cívce emf dané Faradayovým zákonem; tento děj jsme nazvali *elektromagnetická indukce*. V tomto případě mluvíme o **vzájemné indukci**, protože jde o vzájemné působení cívek, na rozdíl od **vlastní indukce**, týkající se jediné cívky.

Podívejme se na vzájemnou indukci kvantitativně. Obr. 31.24a ukazuje dvě blízko sebe umístěné kruhové, hustě navinuté cívky se společnou osou. V cívce 1 teče proud I_1 z baterie ve vnějším obvodu. Tento proud vytváří magnetické pole, znázorněné na obrázku indukčními čarami pole \mathbf{B}_1 . Cívka 2 je připojena k citlivému měřidlu, ale není připojena k baterii. Magnetický indukční tok Φ_{21} (tok cívkou 2 vyvolaný proudem cívky 1) prochází N_2 závitů cívky 2.

Magnetický indukční tok procházející cívkou 2 (tedy $N_2\Phi_{21}$) je přímo úměrný proudu v cívce 1 (tedy I_1). Proto $N_2\Phi_{21} = M_{21}I_1$, kde konstanta úměrnosti M_{21} vyjadřuje **vzájemnou indukčnost** cívky 2 vzhledem k cívce 1. Platí tedy

$$M_{21} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}. \quad (31.59)$$

Porovnejte tuto definici s rov. (31.30), tj. $L = N\Phi/I$, definující vlastní indukčnost cívky. Rov. (31.59) můžeme přepsat do tvaru

$$M_{21}I_1 = N_2\Phi_{21}.$$

Změníme-li vnějším zásahem proud I_1 , pak

$$M_{21} \frac{dI_1}{dt} = N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}.$$

Pravá strana této rovnice je podle Faradayova zákona rovna záporně vzatému emf \mathcal{E}_2 , indukovanému v cívce 2 proměnným proudem v cívce 1. Je tedy

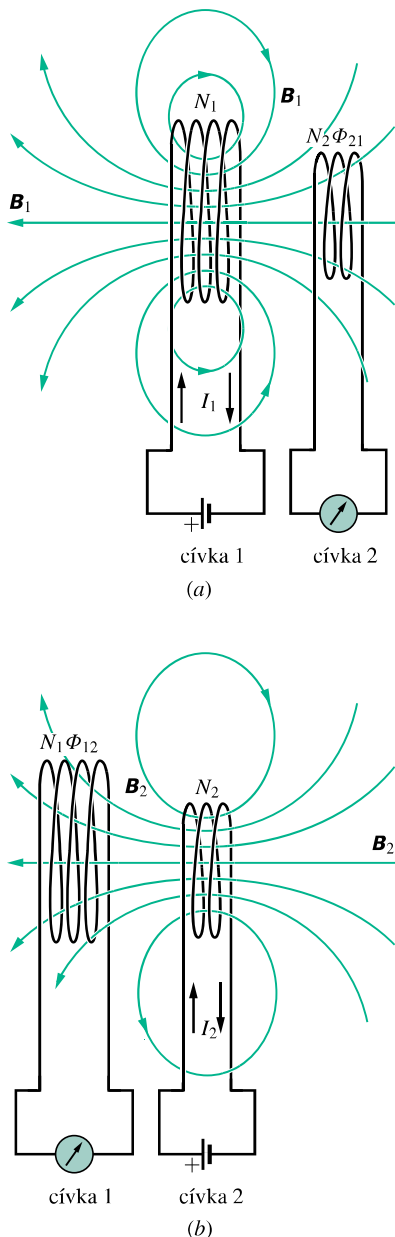
$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}, \quad (31.60)$$

což je analogické rov. (31.40) pro vlastní indukci $\mathcal{E} = -L dI/dt$.

Zaměňme nyní role cívek 1 a 2 podle obr. 31.24b. Připojme proto do obvodu cívky 2 baterii dodávající proud I_2 . Ten vytváří v cívce 1 magnetický indukční tok Φ_{12} . Měníme-li proud I_2 , dostaneme ze shora uvedeného důvodu

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (31.61)$$

Vidíme tedy, že emf indukované v jedné z cívek je úměrné rychlosti změny proudu v druhé z nich. Uvedeme bez důkazu, že konstanty úměrnosti M_{21} a M_{12} jsou stejné, takže



Obr. 31.24 Vzájemná indukce. (a) Mění-li se proud I_1 v cívce 1, indukuje se emf v cívce 2. (b) Mění-li se proud I_2 v cívce 2, indukuje se emf v cívce 1.

pořadí indexů lze zaměnit. (Toto tvrzení vůbec není samozřejmé.) Platí

$$M_{21} = M_{12} = M, \quad (31.62)$$

a proto rov. (31.60) a (31.61) můžeme zapsat ve tvarech

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (31.63)$$

a

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}. \quad (31.64)$$

Indukčnost je tedy vskutku vzájemná. Jednotka SI pro M (stejně jako pro L) je henry. Vzájemná indukčnost M závisí na tvaru, vzájemné poloze a orientaci obou cívek a na magnetických vlastnostech prostředí; může být kladná, záporná i nulová.

PŘÍKLAD 31.12

Na obr. 31.25 jsou dvě kruhové hustě vinuté sousední cívky ležící ve stejné rovině. Menší má poloměr R_2 a počet závitů N_2 , větší má poloměr R_1 a počet závitů N_1 .

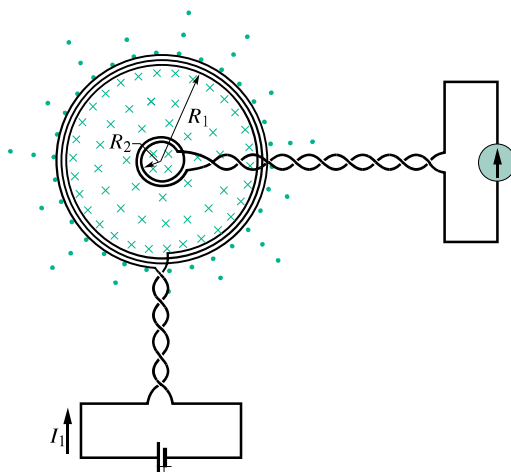
(a) Odvoďte výraz pro vzájemnou indukčnost M pro toto uspořádání cívek za předpokladu, že $R_1 \gg R_2$.

ŘEŠENÍ: Podle obr. 31.25 si představujeme, že větší cívkou poteče proud I_1 , který vyvolá magnetické pole. Hodnota magnetické indukce B_1 ve středu této cívky je (podle rov. (30.28), pro $z = 0$ a po vynásobení N_1)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 N_1}{2R_1}.$$

Pro $R_1 \gg R_2$ můžeme předpokládat, že ve všech bodech uvnitř malé cívky má magnetická indukce tutěž velikost B_1 . Celkový tok menší cívkou je

$$N_2 \Phi_{21} = N_2 (B_1) (\pi R_2^2) = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2 I_1}{2R_1}.$$



Obr. 31.25 Příklad 31.12. Malá cívka je umístěna ve středu velké cívky. Vzájemnou indukčnost cívek můžeme určit, když do velké cívky pustíme proud I_1 .

Z rov. (31.59) potom dostaneme

$$M = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\pi \mu_0 N_1 N_2 R_2^2}{2R_1}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaká je hodnota M pro $N_1 = N_2 = 1\,200$ závitů, $R_2 = 1,1$ cm a $R_1 = 15$ cm?

ŘEŠENÍ: Výše uvedená rovnice dává

$$M = \frac{(\pi)(4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1})(1\,200)(1\,200)(0,011 \text{ m})^2}{2(0,15 \text{ m})} = 2,29 \cdot 10^{-3} \text{ H} \doteq 2,3 \text{ mH.} \quad (\text{Odpověď})$$

Zkusme obrátit role obou cívek uvažovaných na obr. 31.25, tj. pustit proud I_2 do menší cívky a pokusit se vypočítat M

z rov. (31.59):

$$M = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2}.$$

Výpočet Φ_{12} (tok procházející větší cívku, způsobený proudem v menší cívce) není jednoduchý. Kdybychom jej vypočítali (např. numericky na počítači), dostali bychom pro M přesně 2,3 mH, jako ve výše uvedeném výpočtu. To potvrzuje, že rov. (31.62), tj. $M_{12} = M_{21} = M$, opravdu platí.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Magnetický indukční tok

Magnetický indukční tok Φ_B plochou \mathcal{S} v magnetickém poli \mathbf{B} je definován vztahem

$$\Phi_B = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (31.3)$$

v němž se integruje přes uvažovanou plochu. Jednotkou magnetického indukčního toku v SI je weber, $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$. Je-li pole \mathbf{B} kolmé k uvažované ploše a je-li na ní homogenní, zjednoduší se rov. (31.3) na

$$\Phi_B = BS \quad (\mathbf{B} \perp \mathbf{S}, \text{ pole } \mathbf{B} \text{ je homogenní}). \quad (31.4)$$

Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Mění-li se v čase magnetický indukční tok Φ_B plochou ohraničenou uzavřenou vodivou smyčkou, vytvoří se ve smyčce emn a proud; tento děj se nazývá elektromagnetická indukce. Indukované emn má hodnotu

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradayův indukční zákon}). \quad (31.6)$$

Nahradíme-li smyčku hustě navinutou cívku o N závitů, pak indukované emn je

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (31.7)$$

Lenzův zákon (též Lenzovo pravidlo)

Indukovaný proud má takový směr, že jeho magnetické pole brání té změně magnetického pole, která proud vyvolává.

Indukované elektrické pole

Indukované emn je vytvořeno měnicím se magnetickým indukčním tokem, a to i když smyčka, uvnitř níž se tok mění, není skutečný vodič, ale jen myšlená uzavřená křivka. Mění se indukční tok indukuje elektrické pole \mathbf{E} v každém bodě takové křivky, a to bez ohledu na to, zda se tento bod sám nachází v magnetickém poli či nikoli (podstatné je, že se mění tok magnetického pole

plochou, na jejímž obvodu bod leží). Indukované emn se váže k \mathbf{E} vztahem

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad (31.21)$$

kde se integruje podél myšlené uzavřené křivky. S užitím rov. (31.21) můžeme Faradayův zákon psát v nejobecnějším tvaru

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradayův zákon}). \quad (31.22)$$

Podstata tohoto zákona je, že *měnícím se magnetickým indukčním tokem $d\Phi_B/dt$ se indukuje elektrické pole \mathbf{E} .*

Cívka a indukčnost

Cívka (induktor) je zařízení, kterým můžeme vytvořit magnetické pole v jisté oblasti. Teče-li elektrický proud každým z N závitů cívky, sčítá se jejich magnetický tok Φ_B . Indukčnost L cívky pak je

$$L = \frac{N\Phi_B}{I} \quad (\text{definice indukčnosti}), \quad (31.30)$$

Jednotkou indukčnosti v SI je **henry** (H):

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{A}^{-1}. \quad (31.31)$$

Indukčnost připadající na jednotku délky dlouhého solenoidu, který má průřez S a n závitů na jednotku délky (tj. v oblasti, kde už se neuplatní rozptyl na koncích), je

$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 S \quad (\text{solenoid}). \quad (31.33)$$

Vlastní indukce (samoindukce)

Mění-li se proud I v cívce s indukčností L , indukuje se v ní emn. Toto indukované emn je

$$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}. \quad (31.40)$$

Směr \mathcal{E}_L najdeme pomocí Lenzova zákona: indukované emn brání změně, která jej vyvolává.

Sériový obvod RL

Připojíme-li konstantní emn do obvodu s rezistorem o odporu R a cívkou o indukčnosti L , pak proud roste do ustálené hodnoty \mathcal{E}/R podle vztahu

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-t/\tau_L}) \quad (\text{růst proudu}), \quad (31.46)$$

kde $\tau_L = L/R$ určuje rychlost růstu proudu a nazývá se časová konstanta obvodu RL . Odpojíme-li zdroj konstantního emn, klesá proud z hodnoty I_0 k nule podle vztahu

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau_L} = I_0e^{-t/\tau_L} \quad (\text{pokles proudu}). \quad (31.49)$$

Energie magnetického pole

Teče-li cívkou o indukčnosti L proud I , má vzniklé magnetické pole energii

$$E_{\text{mg}} = \frac{1}{2}LI^2 \quad (\text{magnetická energie cívky}). \quad (31.53)$$

Je-li B velikost magnetické indukce v libovolném bodě, je hustota energie magnetického pole v tomto bodě rovna

$$w_{\text{mg}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad (\text{hustota energie magnetického pole ve vakuu}). \quad (31.56)$$

Vzájemná indukčnost

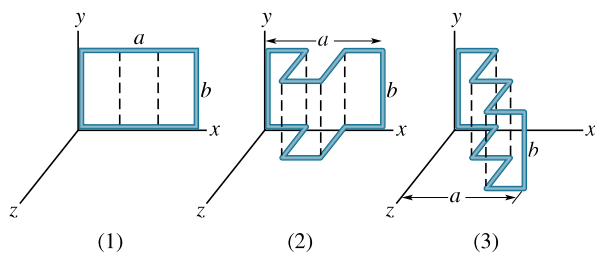
Jsou-li dvě cívky (označené 1 a 2) blízko sebe, pak proměnný proud v jedné z nich indukuje emn ve druhé cívce. Tato vzájemná indukce je vyjádřena vztahy

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad \text{a} \quad \mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt}, \quad (31.63, 31.64)$$

kde M (měřená v henry) je vzájemná indukčnost daného uspořádání cívek.

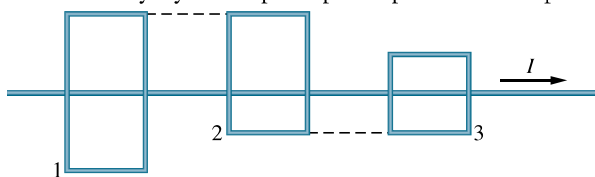
OTÁZKY

1. Na obr. 31.26 je vodivá pravoúhlá smyčka (1) délky a , výšky b ležící v rovině xy . Smyčky (2) a (3) jsou rovněž vodivé a stejných rozměrů v rovině xy jako smyčka (1), mají však úseky rovnoběžné s osou z . Každou z nich prochází stejně rychle vzrůstající homogenní magnetické pole. Seřadte tyto tři smyčky v sestupném pořadí podle velikosti emn v nich indukovaného. Magnetické pole má směr osy (a) y , (b) z a (c) x .



Obr. 31.26 Otázka 1

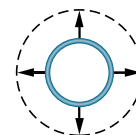
2. Na obr. 31.27 proud I teče dlouhým přímým vodičem podél tří pravoúhlých vodivých smyček (aniž se jich dotýká) s délkami stran L , $\frac{3}{2}L$ a $2L$. Smyčky jsou daleko od sebe, takže se vzájemně neovlivňují. Smyčky 1 a 3 leží symetricky podél dlouhého vodiče. Seřadte smyčky v sestupném pořadí podle velikosti proudu



Obr. 31.27 Otázka 2

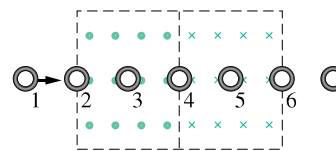
v nich indukovaného, když proud I je (a) konstantní, (b) vzrůstající.

3. Vodič kruhového průřezu na obr. 31.28 se tepelně roztáhne v homogenním magnetickém poli a proud ve vodiči indukovaný teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Směřuje magnetické pole od nás, nebo k nám?



Obr. 31.28 Otázka 3

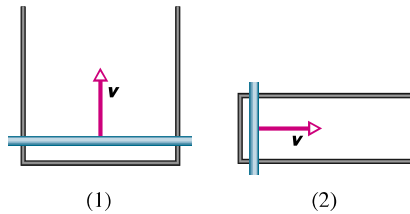
4. Na obr. 31.29 se pohybuje kruhová smyčka stálou rychlostí oblastmi, v nichž jsou homogenní magnetická pole stejné velikosti namířena do stránky nebo z ní ven. (Pole je nulové vně čárkované hranice). Ve kterých ze sedmi vyznačených poloh smyčky je indukované emn orientováno (a) ve směru otáčení hodinových ručiček, (b) proti jejich směru a (c) je nulové?



Obr. 31.29 Otázka 4

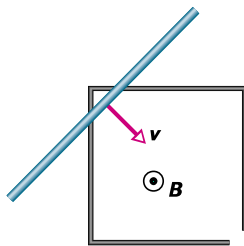
5. Obr. 31.30 ukazuje dva obvody, v nichž vodivé tyče kloužou stejně rychle ve stejném homogenním magnetickém poli podél vodičů tvaru U. Rovnoběžné úseky těchto vodičů mají vzdálenost $2L$ v obvodu (1) a L v obvodu (2). Indukovaný proud v obvodu (1) má směr proti otáčení hodinových ručiček.

(a) Směřuje magnetické pole od nás, nebo k nám? (b) Směřuje indukovaný proud v obvodu (2) po směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček? (c) Je proud v obvodu (1) větší, menší, nebo stejný ve srovnání s proudem v obvodu (2)?



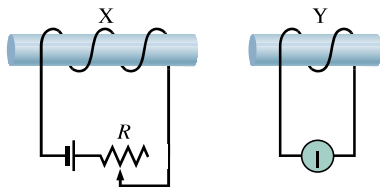
Obr. 31.30 Otázka 5

6. Na obr. 31.31 klouže vodivá tyč po vodiči tvaru neúplného čtverce a je s ním v elektrickém kontaktu. Čtverec je v homogenním magnetickém poli směřujícím kolmo k nám. (a) Teče během pohybu tyče indukovaný proud ve směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček, nebo se jeho směr v půli cesty mění? (b) Je tento proud stálý, rostoucí, nebo napřed rostoucí a pak klesající?



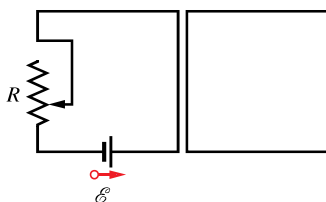
Obr. 31.31 Otázka 6

7. Obr. 31.32 ukazuje dvě cívky navinuté na nevodivých tyčích. Cívka X je připojena k baterii a rezistoru s proměnným odporem. Jaký je směr indukovaného proudu v měřidle připojeném k cívice Y, (a) když se cívka Y pohybuje k cívice X a (b) když se proud v cívice X zmenšuje, aniž se přitom mění polohy cívek?



Obr. 31.32 Otázka 7

8. Zvětšujeme rovnoměrně odpor R v levém obvodu na obrázku 31.33. Teče proud indukovaný ve smyčce v pravém obvodu po směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček?

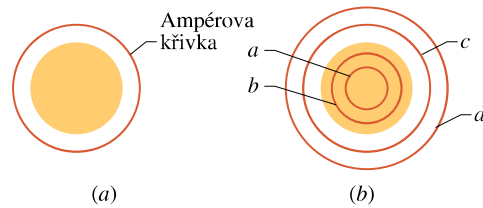


Obr. 31.33 Otázka 8

9. Obr. 31.34a ukazuje kruh, v němž vzrůstá magnetické pole

směřující k nám, a s ním soustřednou kružnici, podél níž počítáme $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. Tabulka udává počáteční velikost magnetické indukce, přírůstek této velikosti a časový interval potřebný pro tento přírůstek ve třech situacích. Seřadte tyto situace sestupně podle velikosti elektrického pole indukovaného podél kružnice.

SITUACE	POČÁTEČNÍ POLE	PŘÍRŮSTEK	DOBA
a	B_1	ΔB_1	Δt_1
b	$2B_1$	$\Delta B_1/2$	Δt_1
c	$B_1/4$	ΔB_1	$\Delta t_1/2$



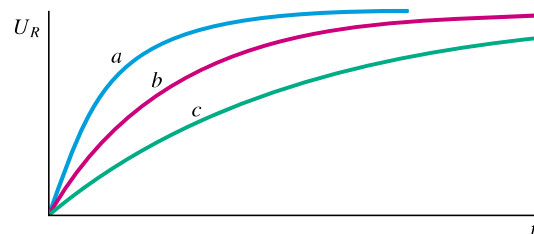
Obr. 31.34 Otázky 9 a 10

10. Obr. 31.34b ukazuje kruh, v němž klesá indukce homogenního magnetického pole směřujícího k nám. Jsou též zakresleny čtyři soustředné kružnice a, b, c . Seřadte je sestupně podle velikosti $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ při integraci podél nich.

11. V následující tabulce jsou dány počty závitů na jednotku délky, proudy a obsahy průřezů pro tři stejně dlouhé solenoidy. Seřadte tyto solenoidy v sestupném pořadí podle (a) jejich indukčnosti, (b) magnetického toku jedním závitem.

SOLENOID	ZÁVITY NA		OBSAH PRŮŘEZU
	JEDNOTKU DÉLKY	PROUD	
1	$2n_1$	I_1	$2S_1$
2	n_1	$2I_1$	S_1
3	n_1	I_1	$4S_1$

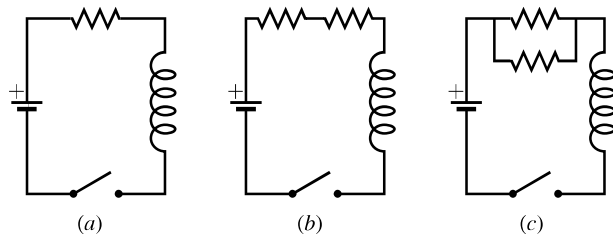
12. Obr. 31.35 ukazuje časový průběh napětí na rezistoru ve třech obvodech stejného typu jako na obr. 31.20. Obvody mají stejné odpory R a emn \mathcal{E} , ale liší se indukčností L . Seřadte je sestupně podle velikostí L .



Obr. 31.35 Otázka 12

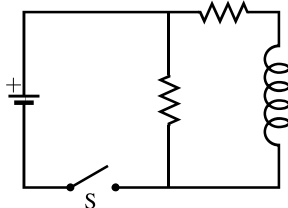
13. V obvodu na obr. 31.20 v určitém okamžiku poté, co proud začal narůstat, mají emn baterie \mathcal{E} a napětí na rezistoru U_R tyto hodnoty: (a) 12 V a 3 V; (b) 24 V a 16 V; (c) 18 V a 10 V. Seřadte tyto případy sestupně podle napětí na cívice v uvažovaném okamžiku.

14. Obr. 31.36 ukazuje tři obvody se stejnými bateriemi, cívkami a rezistory. Seřadte obvody v sestupném pořadí podle doby potřebné k dosažení 50 % ustálené hodnoty proudu po zapojení spínače.

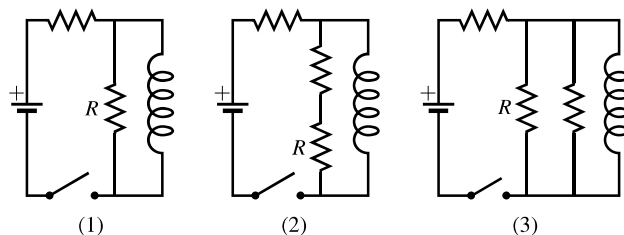


Obr. 31.36 Otázka 14

15. Obr. 31.37 ukazuje obvod se dvěma stejnými rezistory a cívkou. Teče prostředním rezistorem větší, menší, či stejný proud ve srovnání s proudem protékajícím druhým rezistorem (a) hned po zapnutí spínače S, (b) dlouho po zapnutí spínače, (c) hned po vypnutí spínače, (d) dlouho po vypnutí spínače.

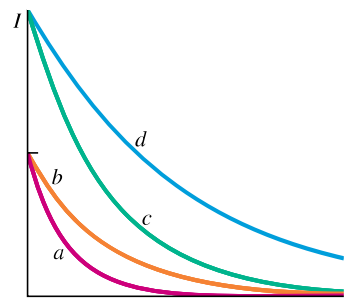
Obr. 31.37
Otázka 15

16. Obr. 31.38 ukazuje tři obvody se stejnými bateriemi, cívkami a rezistory. Seřadte obvody v sestupném pořadí podle proudu procházejícího rezistorem R (a) dlouho po zapnutí spínače, (b) hned po vypnutí spínače, byl-li předtím dlouho zapnut, (c) dlouho po vypnutí.



Obr. 31.38 Otázka 16

17. Přepínač S na obr. 31.19 byl přepnut do polohy a na dlouhou dobu a pak přepnut do polohy b . Na obr. 31.39 je zachycen časový průběh proudu cívkou pro čtyři hodnoty odporu R a indukčnosti L : (1) R_0 a L_0 ; (2) $2R_0$ a L_0 ; (3) R_0 a $2L_0$ (4) $2R_0$ a $2L_0$. Které dvojice hodnot R a L odpovídají jednotlivým křivkám?

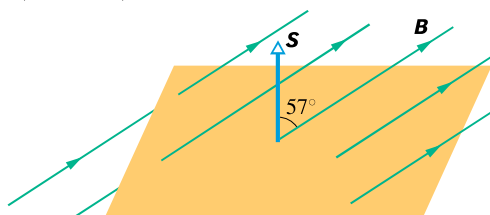
Obr. 31.39
Otázka 17

18. Na obr. 31.24 je proud cívkou 1 zadán takto: (1) $I_1 = 3 \cos(4t)$, (2) $I_1 = 10 \cos(t)$, (3) $I_1 = 5 \cos(2t)$, kde I_1 je v ampérech a t v sekundách. Tyto tři případy seřadte v sestupném pořadí podle velikostí (a) vzájemné indukčnosti cívek a (b) maximálního emn v cívce 2 vyvolaného proudem I_1 .

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 31.3, 4 Faradayův zákon elektromagnetické indukce, Lenzův zákon

1C. V jistém místě na jižní polokouli má magnetické pole Země magnetickou indukci o velikosti $B = 42 \mu\text{T}$ směřující vzhůru pod úhlem 57° od svislice. Vypočítejte tok vektoru \mathbf{B} vodorovnou plochou obsahu $2,5 \text{ m}^2$, když vektor plochy \mathbf{S} směřuje svisle vzhůru (obr. 31.40).



Obr. 31.40 Cvičení 1

2C. Uvnitř dlouhého solenoidu (n závitů na jednotku délky)

je malá smyčka o ploše S protékána proudem I . Osa smyčky je shodná s osou solenoidu. Proud solenoidem je dán vztahem $I = I_m \sin \omega t$. Určete emn indukované ve smyčce.

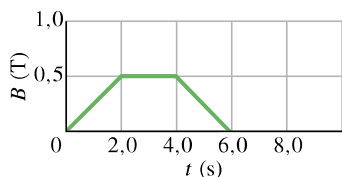
3C. Televizní anténa (UHF) tvaru kružnice má průměr 11 cm. Magnetická složka TV signálu je kolmá k ploše smyčky. V jistém okamžiku se její velikost mění rychlostí $0,16 \text{ T} \cdot \text{s}^{-1}$. Pole je homogenní. Jaké emn se indukuje v anténě?

4C. Homogenní magnetické pole \mathbf{B} je kolmé k rovině kruhové vodivé smyčky poloměru r . Velikost magnetické indukce pole závisí na čase podle vztahu $B = B_0 e^{-t/\tau}$, kde B_0 a τ jsou konstanty. Určete emn indukované ve smyčce jako funkci času.

5C. V homogenním magnetickém poli umístíme rovinnou čtvercovou smyčku o straně 20 cm a odporu $20 \text{ m}\Omega$ tak, že magnetická indukce o velikosti $B = 2,0 \text{ T}$ je kolmá k rovině smyčky. Jestliže protáhneme smyčku tak, že se dvě protilehlé strany vzdálí a zbývající dvě přiblíží, zmenší se plocha smyčky. Za dobu $\Delta t = 0,20 \text{ s}$ zmenšíme plochu až na nulu. Jaké je

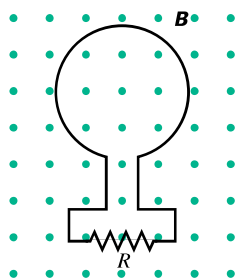
(a) průměrné indukované emn, (b) průměrný proud indukovaný ve smyčce během Δt ?

6C. Magnetické pole ve vodivé smyčce o poloměru 12 cm a odporu $8,5 \Omega$ se mění v čase podle obr. 31.41. Vypočtete emn ve smyčce jako funkci času. Uvažujte časové intervaly (a) od $t = 0$ do $t = 2,0$ s; (b) od $t = 2,0$ s do $t = 4,0$ s; (c) od $t = 4,0$ s do $t = 6,0$ s. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině smyčky.



Obr. 31.41 Cvičení 6

7C. Magnetický indukční tok smyčkou na obr. 31.42 vzrůstá podle vztahu $\Phi_B = 6,0t^2 + 7,0t$, kde Φ_B je v mWb a čas t v sekundách. (a) Jaká je velikost emn indukovaného ve smyčce v čase $t = 2,0$ s? (b) Jaký je směr proudu v rezistoru R ?

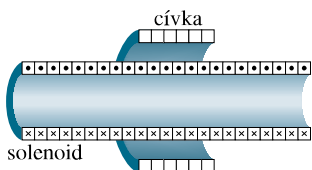


Obr. 31.42 Cvičení 7 a úloha 19

8C. Homogenní magnetické pole je kolmé k rovině kruhové smyčky o průměru 10 cm zhotovené z měděného drátu o průměru 2,5 mm. (a) Vypočtete odpor drátu. (Viz tab. 27.1.) (b) Jakou rychlostí se musí měnit magnetické pole, aby se ve smyčce indukoval proud 10 A?

9Ú. Proud solenoidem z př. 31.1 se mění, ale nikoli tak, jak bylo uvedeno, nýbrž podle vztahu $I = 3,0t + 1,0t^2$, kde proud I je v A a čas t v sekundách. (a) Nakreslete závislost indukovaného emn na cívce v intervalu od $t = 0$ do $t = 4,0$ s. (b) Odpor cívkky je $0,15 \Omega$. Jaký proud bude protékat cívkou v čase $t = 2,0$ s?

10Ú. Na obr. 31.43 je cívka o odporu $5,3 \Omega$ se 120 závitů a o poloměru 1,8 cm. Je umístěna vně solenoidu uvažovaného v př. 31.1. Jaký proud poteče cívkou, jestliže se proud solenoidem mění tak, jak bylo v př. 31.1 uvedeno?



Obr. 31.43 Úloha 10

11Ú. Dlouhý solenoid o poloměru 25 mm má 100 závitů/cm.

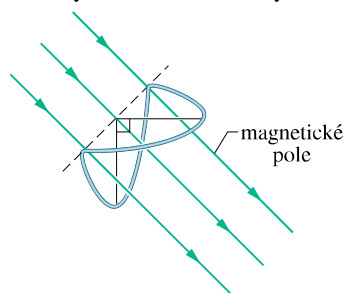
Jednoduchá vodivá smyčka o poloměru 5,0 cm obepíná solenoid a je s ním souosá. Za 10 ms proud solenoidem rovnoměrně poklesl z 1,0 A na 0,50 A. Jaké emn se indukuje ve smyčce?

12Ú. Odvoďte výraz pro indukční tok toroidem o N závitů protékáným proudem I . Vinutí toroidu má obdélníkový průřez, toroid má vnitřní poloměr a , vnější poloměr b a výšku h .

13Ú. Toroid o průřezu $5,00 \text{ cm}^2$ a vnitřním poloměru 15,0 cm má 500 závitů a je protékán proudem 0,800 A. Jaký je magnetický indukční tok jeho průřezem?

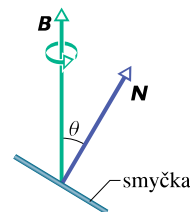
14Ú. Elastický vodivý materiál je napnut do kruhové smyčky o poloměru 12,0 cm. Je umístěn do homogenního magnetického pole o indukci 0,800 T tak, že pole je kolmé k rovině smyčky. Po uvolnění se smyčka smršťuje tak, že se její poloměr zkracuje rychlostí $75 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaké emn je indukováno ve smyčce v tomto okamžiku?

15Ú. Uzavřená vodivá smyčka je složena ze dvou půlkružnic o poloměru 3,7 cm ležících v navzájem kolmých rovinách. Smyčka byla vytvořena přehnutím kruhové smyčky podle jejího průměru o 90° . Homogenní magnetické pole B o velikosti 76 mT je kolmé k průměru, podle něhož byla smyčka přehnuta, a s oběma rovinami půlkružnic svírá stejný úhel 45° (obr. 31.44). Magnetické pole bylo během doby 4,5 ms rovnoměrně zeslabeno až na nulu. Určete velikost indukovaného emn a směr indukovaného proudu ve smyčce během této doby.



Obr. 31.44 Úloha 15

16Ú. Na obr. 31.45 je kruhová vodivá smyčka o průměru 10 cm s normálou N svírající úhel $\theta = 30^\circ$ se směrem homogenního magnetického pole B o velikosti 0,50 T. Smyčka se v magnetickém poli otáčí konstantní rychlostí 100 otáček za minutu tak, že její normála N opisuje kužel. Úhel sklonu θ se přitom nemění. Jaké je emn indukované ve smyčce?

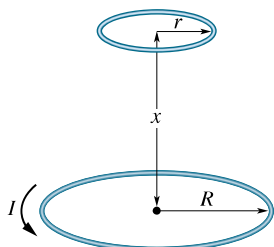


Obr. 31.45 Úloha 16

17Ú. Malá kruhová smyčka o ploše $2,00 \text{ cm}^2$ je umístěna soustředně a ve stejné rovině jako velká kruhová smyčka o poloměru

1,00 m. Proud velkou smyčkou se mění rovnoměrně od 200 A do -200 A za dobu 1,00 s počínaje časem $t = 0$. (a) Jaké je magnetické pole ve středu malé smyčky vyvolané proudem tekoucím velkou smyčkou v časech $t = 0$, $t = 0,500$ s a $t = 1,00$ s? (b) Jaké je indukované emn v malé smyčce v čase $t = 0,500$ s? (Vzhledem k tomu, že vnitřní smyčka je malá, považujte pole \mathbf{B} , ve kterém se nachází, za homogenní.)

18Ú. Dvě rovnoběžné vodivé smyčky na obr. 31.46 mají společnou osu. Menší smyčka (poloměr r) je nad větší smyčkou (poloměr R) ve vzdálenosti $x \gg R$. Proto můžeme považovat magnetické pole způsobené proudem I větší smyčkou za přibližně konstantní v oblasti menší smyčky. Předpokládejme, že vzdálenost x roste konstantní rychlostí $dx/dt = v$. (a) Určete magnetický indukční tok plochou ohraničenou malou smyčkou jako funkci x . (Tip: Viz rov. (30.29).) V menší smyčce určete (b) indukované emn a (c) směr indukovaného proudu.



Obr. 31.46 Úloha 18

19Ú. Magnetický indukční tok smyčkou z obr. 31.41 v čase $t = 0$ je $\Phi_B(0)$. Magnetické pole \mathbf{B} se libovolně spojitě mění co do velikosti i směru; v čase t je tok smyčkou $\Phi_B(t)$. (a) Dokažte, že celkový náboj $Q(t)$ prošlý rezistorem o odporu R za dobu t je

$$Q(t) = \frac{1}{R} (\Phi_B(0) - \Phi_B(t))$$

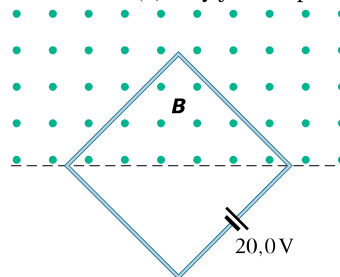
a je nezávislý na průběhu změny \mathbf{B} . (b) Je-li $\Phi_B(t) = \Phi_B(0)$ v určitém čase t , dostaneme $Q(t) = 0$. Musí být v tomto případě také indukovaný proud trvale roven nule v celém intervalu od 0 do t ?

20Ú. Na dřevěném válcovém jádře o průřezu $1,20 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ je navinuto 100 závitů izolovaného měděného drátu. Vývody cívky jsou připojeny k rezistoru. Celkový odpor obvodu je $13,0 \Omega$. Jaký náboj projde obvodem, jestliže se velikost indukce vnějšího homogenního magnetického pole podél osy cívky změní z $1,60 \text{ T}$ v jednom směru na $1,60 \text{ T}$ v opačném směru? (Tip: Viz úloha 19.)

21Ú. V jistém bodě má magnetická indukce pole Země velikost $0,590 \text{ G}$ a směřuje dolů pod úhlem 70° od vodorovné roviny. Plochá vodorovná kruhová vodivá cívka o poloměru $10,0 \text{ cm}$ má 1 000 závitů a celkový odpor $85,0 \Omega$. Vnitřní odpor připojeného měřicího přístroje je 140Ω . Cívka se otočí kolem svého průměru o půl otáčky, takže je opět vodorovná. Jak velký náboj přitom projde měřicím přístrojem? (Tip: Viz úlohu 19.)

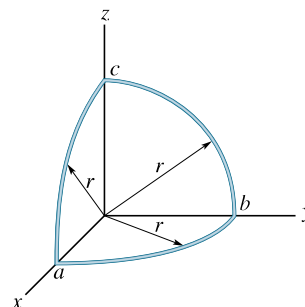
22Ú. Čtvercová vodivá smyčka o straně $2,00 \text{ m}$ je kolmá k homogennímu magnetickému poli, které zasahuje polovinu plochy této cívky, jak je znázorněno na obr. 31.47. Ve smyčce

je zapojen zdroj $20,0 \text{ V}$ o zanedbatelném vnitřním odporu. Velikost magnetické indukce se mění s časem podle vztahu $B = 0,0420 - 0,870t$, kde B je v T a čas t v sekundách. (a) Jaké je celkové emn v obvodu? (b) Jaký je směr proudu zdrojem?



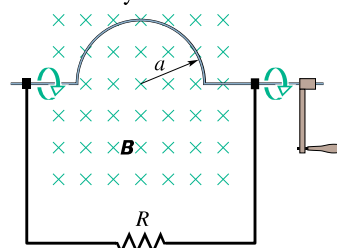
Obr. 31.47 Úloha 22

23Ú. Drát je ohnut do tří čtvrtkružnic o poloměru $r = 10 \text{ cm}$, jak ukazuje obr. 31.48. Čtvrtkružnice ab leží v rovině xy , čtvrtkružnice bc v rovině yz a čtvrtkružnice ca v rovině zx . (a) Jak velké emn se vytvoří v drátu, když homogenní magnetické pole mířící v kladném směru osy x vzroste rychlostí $3,0 \text{ mT} \cdot \text{s}^{-1}$? (b) Jaký je směr proudu v segmentu bc ?



Obr. 31.48 Úloha 23

24Ú. Tuhý drát ohnutý do půlkružnice o poloměru a se otáčí s frekvencí f v homogenním magnetickém poli, jak ukazuje obr. 31.49. Jaká je (a) frekvence a (b) amplituda proměnného emn indukovaného ve smyčce?

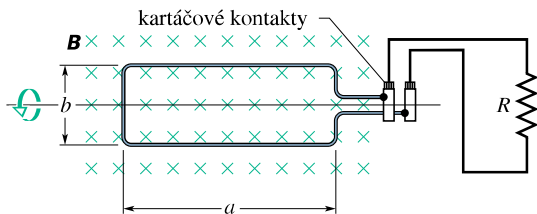


Obr. 31.49 Úloha 24

25Ú. Obdélníková cívka má N závitů a délky stran a a b . Otáčí se s frekvencí f v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} , jak ukazuje obr. 31.50. Cívka se otáčí spolu s válci, kontakt zajišťují připojené kovové kartáčky. (a) Ukažte, že indukované emn v cívce je dáno v závislosti na čase vztahem

$$\mathcal{E}(t) = 2\pi f N a b B \sin(2\pi f t) = \mathcal{E}_m \sin(2\pi f t).$$

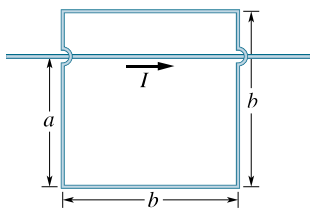
(Na tomto principu je založen běžný generátor střídavého proudu.) (b) Navrhněte smyčku, která bude při 60 otáčkách za sekundu v magnetickém poli o indukci 0,500 T generovat emn $\mathcal{E}_m = 150$ V.



Obr. 31.50 Úloha 25

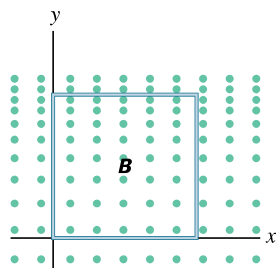
26Ú. Elektrický generátor používá cívku o 100 závitů drátu ve tvaru obdélníkové smyčky 50,0 cm × 30,0 cm. Cívka je umístěna v homogenním magnetickém poli 3,50 T. Jaká maximální hodnota emn se indukuje, otáčí-li se smyčka 1 000krát za minutu kolem osy kolmé k \mathbf{B} ?

27Ú. V situaci na obr. 31.51 je $a = 12,0$ cm a $b = 16,0$ cm. Proud dlouhým drátem je dán vztahem $I = 4,50t^2 - 10,0t$, kde I a t jsou v SI. (a) Určete emn indukované ve čtvercové smyčce v čase $t = 3,00$ s. (b) Jaký je směr proudu indukovaného ve smyčce?



Obr. 31.51 Úloha 27

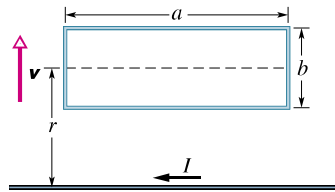
28Ú. Na obr. 31.52 je čtvercová vodivá smyčka o délce stran 2,00 cm. Magnetické pole je kolmé k nákrešně a mívá k nám; jeho velikost je dána vztahem $B = 4,0t^2y$, kde B , t a y jsou v SI. Určete emn ve čtvercové smyčce v čase $t = 2,5$ s a vyznačte jeho směr.



Obr. 31.52 Úloha 28

29Ú. Obdélníková vodivá smyčka o délce a , šířce b a odporu R leží blízko nekonečně dlouhého vodiče protékajícího proudem I , jak je vidět na obr. 31.53. Vzdálenost osy smyčky od dlouhého vodiče je r . Určete (a) velikost magnetického indukčního toku

plochou smyčky a (b) proud smyčkou, jestliže se smyčka vzdaluje od dlouhého vodiče rychlostí \mathbf{v} .



Obr. 31.53 Úloha 29

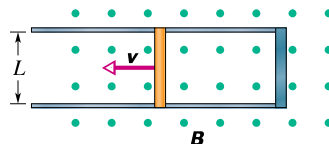
30Ú*. Dvěma dlouhými měděnými vodiči (s průměry 2,5 mm) protékají opačnými směry proudy 10 A. (a) Předpokládejte, že středy vodičů jsou vzdáleny 20 mm, a vypočítejte magnetický indukční tok plochou mezi osami vodičů připadající na jeden metr délky vodičů. (b) Jaká část tohoto toku je uvnitř vodičů? (c) Vyřešte úlohu (a) také pro případ proudů stejného směru.

ODST. 31.5 Indukce a přenosy energie

31C. Anténa tvaru smyčky s plochou o obsahu S a odporem R je kolmá k homogennímu magnetickému poli \mathbf{B} . Pole lineárně slabne až k nule v časovém intervalu Δt . Vyjádřete celkovou energii dissipovanou ve smyčce.

32C. Měděný drát o délce 50,0 cm a průměru 1,00 mm má tvar kruhové smyčky, která je kolmá k homogennímu magnetickému poli rostoucímu konstantní rychlostí $10,0 \text{ mT}\cdot\text{s}^{-1}$. S jakým výkonem se uvolňuje Joulovo teplo ve smyčce?

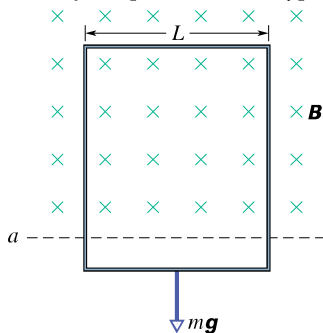
33C. Kovovou tyč posunujeme podle obr. 31.54 konstantní rychlostí \mathbf{v} po dvou rovnoběžných kovových kolejničích spojených kovovým páskem na jednom konci. Magnetické pole o indukci velikosti $B = 0,350$ T směřuje k nám. (a) Jaké indukované emn vzniká, jsou-li kolejničky vzdáleny 25,0 cm a rychlost tyče má velikost $55,0 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$? (b) Jaký proud teče tyčí, má-li odpor $18,0 \Omega$ a kolejničky a spojovací pásek mají odpor zanedbatelný? (c) S jakým výkonem se uvolňuje Joulovo teplo ve smyčce?



Obr. 31.54 Cvičení 33 a 34

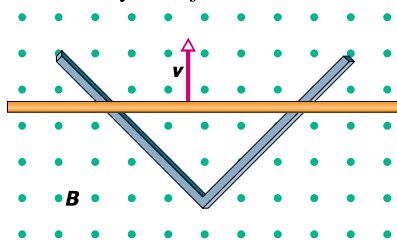
34C. Vodivá tyč na obr. 31.54 má délku L a klouže bez tření po vodorovných vodivých kolejničích konstantní rychlostí \mathbf{v} . Kolejničky jsou na jednom konci spojeny kovovým páskem. Homogenní magnetické pole \mathbf{B} , které směřuje k nám, vyplňuje celou oblast, v níž se tyč pohybuje. Je zadáno $L = 10$ cm, $v = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $B = 1,2$ T. (a) Jaké emn se indukuje v tyči? (b) Jak velký proud teče vodivou smyčkou? Předpokládejte odpor tyče $0,40 \Omega$ a odpor kolejniček a kovového proužku zanedbatelný. (c) S jakým výkonem se vyvíjí Joulovo teplo v tyči? (d) Jaká vnější síla je nutná k udržení tyče v pohybu? (e) Jaký je výkon této vnější síly? Srovnajte odpověď s odpovědí na úkol (c).

35Ú. Na obr. 31.55 je vodivá obdélníková smyčka o šířce L , odporu R a hmotnosti m . Je zavěšena v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} , které je kolmé k rovině rámečku a existuje jen nad přímkou a . Smyčku pustíme, takže padá zrychleně, dokud nedosáhne mezní rychlosti \mathbf{v}_m . Zanedbejte odpor vzduchu a vypočítejte v_m .



Obr. 31.55
Úloha 35

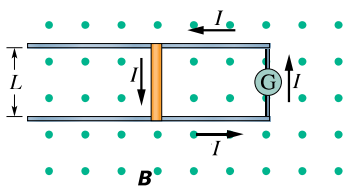
36Ú. Dvě přímé vodivé kolejnice jsou svařeny do pravého úhlu. Vodivá tyč (v kontaktu s nimi) začíná pohyb v čase $t = 0$ od místa spoje a pohybuje se konstantní rychlostí $5,20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ podél kolejnic, jak ukazuje obr. 31.56. Magnetické pole $0,350 \text{ T}$ směřuje kolmo k nám. Vypočítejte (a) indukční tok trojúhelníkem tvořeným kolejnicemi a tyčí v čase $t = 3,00 \text{ s}$, (b) emn indukované v trojúhelníku v témž čase. (c) Aproximujte emn vztahem $\mathcal{E} = at^n$, kde a a n jsou konstanty. Jaká je hodnota n ?



Obr. 31.56
Úloha 36

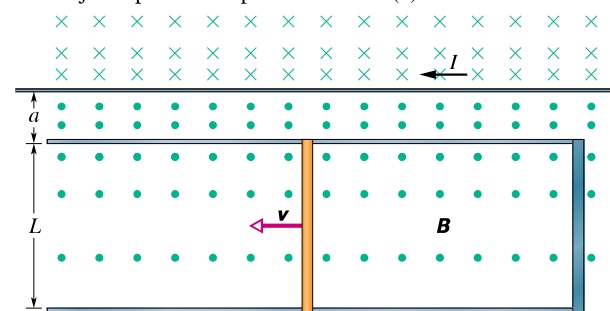
37Ú. Vypočítejte průměrný výkon dodávaný generátorem v úloze 25b, je-li připojen k obvodu o odporu $42,0 \Omega$. (Tip: Průměrná hodnota $\sin^2(2\pi ft)$ v jednom cyklu je $\frac{1}{2}$.)

38Ú. Na obr. 31.57 vodivá tyč o hmotnosti m a délce L klouže bez tření po dvou vodorovných kolejnicích. Tyč se pohybuje v homogenním magnetickém poli \mathbf{B} . Generátor G dodává konstantní proud I naznačeného směru. (a) Určete rychlost tyče v závislosti na čase za předpokladu, že v čase $t = 0$ byla v klidu. Generátor je dále nahrazen zdrojem s konstantním emn \mathcal{E} . (b) Ukažte, že se rychlost tyče blíží konečné konstantní hodnotě \mathbf{v}_m , a určete její velikost a směr. (c) Jak velký bude proud v tyči po dosažení konečné rychlosti? (d) Analyzujte oba případy z hlediska přenosu energie.



Obr. 31.57
Úloha 38

39Ú. Obr. 31.58 znázorňuje tyč o délce L , která se pohybuje konstantní rychlostí \mathbf{v} po vodivých vodorovných kolejnicích. Magnetické pole není v tomto případě homogenní, ale je vytvořeno proudem I v dlouhém vodiči, rovnoběžném s kolejnicemi. Je dáno: $v = 5,00 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $a = 10,0 \text{ mm}$, $L = 10,0 \text{ cm}$ a $I = 100 \text{ A}$. (a) Vypočítejte emn indukované v tyči. (b) Jak velký bude proud ve vodivé smyčce? Odpor tyčky je $0,400 \Omega$, odpor kolejnic a spojovacího pásku je zanedbatelný. (c) S jakým výkonem se vyvíjí teplo v tyči? (d) Jaká vnější síla je nutná k udržení tyče v pohybu? (e) Jaký je při tom výkon této síly? Srovnajte odpověď s odpovědí na úkol (c).

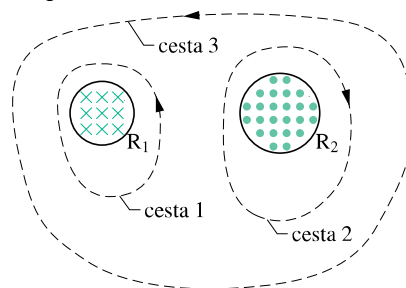


Obr. 31.58 Úloha 39

ODST. 31.6 Indukované elektrické pole

40C. Dlouhý solenoid má průměr $12,0 \text{ cm}$. Protéká-li jeho závitový proud I , vytvoří uvnitř solenoidu homogenní magnetické pole $B = 30,0 \text{ mT}$. Snížením proudu slábne i magnetické pole, a to rychlostí $6,50 \text{ mT}\cdot\text{s}^{-1}$. Vypočítejte velikost intenzity indukovaného elektrického pole ve vzdálenosti (a) $2,20 \text{ cm}$ a (b) $8,20 \text{ cm}$ od osy solenoidu.

41C. Obr. 31.59 znázorňuje dva kruhy R_1 a R_2 o poloměrech $r_1 = 20,0 \text{ cm}$ a $r_2 = 30,0 \text{ cm}$. V oblasti R_1 je homogenní magnetické pole $B_1 = 50,0 \text{ mT}$ směřující od nás a v oblasti R_2 je homogenní magnetické pole $B_2 = 75,0 \text{ mT}$ směřující k nám (zanedbejte rozptyl těchto polí). Obě pole se zeslabují rychlostí $8,50 \text{ mT}\cdot\text{s}^{-1}$. Vypočítejte integrál $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ pro každou ze tří čárkovaných integračních cest.

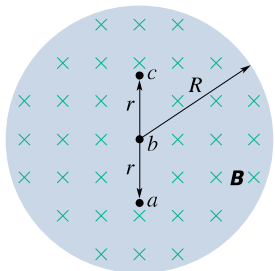


Obr. 31.59 Cvičení 41

42Ú. Začátkem roku 1981 byl ve Francis Bitter National Magnet Laboratory, Massachusetts Institute of Technology uveden do provozu válcový elektromagnet o průměru $3,3 \text{ cm}$, který vytvářel pole o indukci 30 T , nejsilnější stálé (tj. nikoli pulzní)

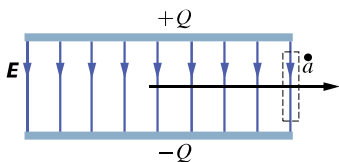
magnetické pole na světě. Pole mělo sinusový průběh v mezích 29,6 T až 30,0 T s frekvencí 15 Hz. Vypočítejte z těchto údajů maximální hodnotu indukovaného elektrického pole ve vzdálenosti 1,6 cm od osy elektromagnetu. (Tip: Viz př. 31.5.)

43Ú. Obr. 31.60 představuje homogenní magnetické pole \mathbf{B} ve válci o poloměru R . Velikost \mathbf{B} klesá konstantní rychlostí $10 \text{ mT} \cdot \text{s}^{-1}$. Jaká jsou okamžitá zrychlení (směr a velikost) elektronů v bodech a , b , c ? Předpokládejte $r = 5,0 \text{ cm}$.



Obr. 31.60
Úloha 43

44Ú. Dokažte, že intenzita elektrického pole \mathbf{E} nabitého deskového kondenzátoru nemůže v bodě a na obr. 31.61 u kraje desek náhle klesnout na nulu, postupujeme-li kolmo k poli ve směru vodorovné šipky. U skutečného kondenzátoru vždy dochází k rozptylu pole, což znamená, že \mathbf{E} se blíží k nule spojitě a hladce (viz cvič. 45 v kap. 30). (Tip: Použijte Faradayův zákon na čárkovaně vyznačenou obdélníkovou cestu.)



Obr. 31.61
Úloha 44

ODST. 31.7 Cívka a indukčnost

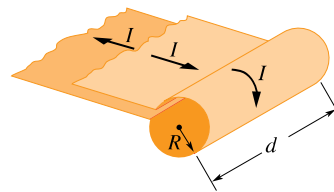
45C. Indukčnost hustě navinuté cívky o 400 závitů je 8,0 mH. Vypočítejte magnetický indukční tok cívkou, jestliže jí protéká proud 5,0 mA.

46C. Kruhová cívka má poloměr 10,0 cm a tvoří ji 30 hustě navinutých závitů. Vnější magnetické pole 2,60 mT je kolmé k rovině cívky. (a) Jaký je celkový magnetický indukční tok, jestliže cívkou neprotéká proud? (b) Jestliže cívkou teče proud 3,80 A určitého směru, indukční tok cívkou vymizí. Jaká je indukčnost cívky?

47C. Solenoid těsně navinutý jednou vrstvou izolovaného měděného drátu (průměr drátu 2,5 mm) má průměr 4,0 cm a je dlouhý 2,0 m. (a) Kolik má závitů? (b) Jakou indukčnost má centimetr délky solenoidu (daleko od okrajů)? Předpokládejte, že sousední dráty se dotýkají a tloušťka izolace je zanedbatelná.

48Ú. Dlouhý tenký solenoid je ohnut do prstence a tvoří toroid. Je-li solenoid dostatečně tenký a náležitě dlouhý, přejde vztah pro indukčnost toroidu (rov. (31.37)) na vztah pro indukčnost solenoidu (rov. (31.32)), z něhož toroid vznikl. Dokažte to.

49Ú. Široký měděný pás šířky d je stočen do trubičky o poloměru R se dvěma přívody (podle obr. 31.62). Pásem teče proud I , rovnoměrně rozprostřený po celé jeho šířce. Tím vzniká „jednozátvitový solenoid“. (a) Odvoďte výraz pro velikost magnetického pole \mathbf{B} v jeho válcové části (daleko od hran). (Tip: Předpokládejte, že magnetické pole vně tohoto solenoidu je zanedbatelné.) (b) Vypočítejte indukčnost tohoto solenoidu. Vliv přívodů zanedbejte.



Obr. 31.62
Úloha 49

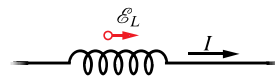
50Ú. Dvěma dlouhými rovnoběžnými válcovými vodiči o poloměrech a protékají stejně velké proudy opačných směrů. Vzdálenost os vodičů je d . Dokažte, že při zanedbání magnetického toku uvnitř vodičů je indukčnost L dvojice těchto vodičů délky l vyjádřena vztahem

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Viz př. 30.2. (Tip: Vypočítejte magnetický tok obdélníkem, v němž vodiče tvoří protilehlé strany.)

ODST. 31.8 Vlastní indukce

51C. Na obr. 31.63 je vyznačen směr proudu a indukovaného napětí cívky v určitém okamžiku. (a) Klesá proud, nebo roste? (b) Indukované emn je 17 V a rychlost změny proudu $25 \text{ kA} \cdot \text{s}^{-1}$. Určete indukčnost cívky.



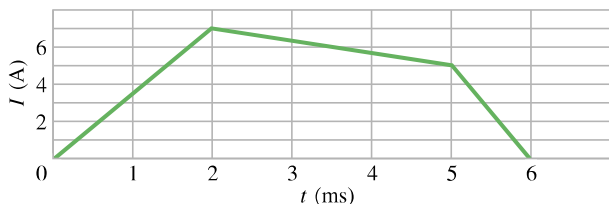
Obr. 31.63
Cvičení 51

52C. Cívka má indukčnost 12 H a v čase $t = 0$ jí protéká proud 2,0 A. Jak můžeme zařídit, aby se na ní indukovalo napětí 60 V?

53C. Dlouhý válcový solenoid se 100 závitů/cm má poloměr 1,6 cm. Předpokládejte, že jeho magnetické pole je uvnitř solenoidu rovnoběžné s jeho osou a je homogenní. (a) Jaká je indukčnost solenoidu připadající na metr délky? (b) Jaké emn se indukuje na 1 m délky solenoidu, je-li změna proudu $13 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$?

54C. Indukčnost hustě navinuté cívky je taková, že při změně proudu $5,0 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$ se indukuje emn 3,0 mV. Stálý proud 8,0 A vytváří magnetický tok $40 \mu\text{Wb}$ každým závitkem. (a) Vypočítejte indukčnost cívky. (b) Kolik závitů má cívka?

55Ú. Proud I tekoucí cívkou o indukčnosti 4,6 H se mění v čase podle grafu na obr. 31.64. Cívka má odpor 12 Ω . Nalezněte velikost indukovaného emn v časových intervalech (a) od $t = 0$ do $t = 2 \text{ ms}$, (b) od $t = 2 \text{ ms}$ do $t = 5 \text{ ms}$, (c) od $t = 5 \text{ ms}$ do $t = 6 \text{ ms}$. (Nezabývejte se hodnotou emn přesně na hranicích intervalů.)



Obr. 31.64 Úloha 55

56Ú. *Cívky v sérii.* Dvě cívky s indukčnostmi L_1 a L_2 jsou spojeny do série a umístěny daleko od sebe. (a) Dokažte, že jejich spojení má indukčnost

$$L_s = L_1 + L_2.$$

(Tip: Zopakujte si odvození pro rezistory a kondenzátory v sérii. Co je zde podobného?) (b) Proč musí být cívky dostatečně vzdálené, aby vztah platil? (c) Zobecněte řešení úkolu (a) pro N cívek v sérii.

57Ú. *Paralelně zapojené cívky.* Dvě cívky s indukčnostmi L_1 a L_2 jsou spojeny paralelně a umístěny daleko od sebe. (a) Dokažte, že jejich spojení má indukčnost

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}.$$

(Tip: Zopakujte si odvození pro paralelně spojené rezistory a kondenzátory. Co je zde podobného?) (b) Proč musí být cívky dostatečně vzdálené, aby vztah platil? (c) Zobecněte řešení úkolu (a) pro N paralelně spojených cívek.

ODST. 31.9 Obvody RL

58C. Proud v RL obvodu naroste do jedné třetiny své ustálené hodnoty za 5,00 s. Určete časovou konstantu tohoto obvodu.

59C. Jak dlouho (vyjádřeno pomocí τ_L) je nutno čekat, než proud vzroste na 0,100 % své ustálené hodnoty?

60C. Proud v RL obvodu klesne během první sekundy po odpojení zdroje z 1,0 A na 10 mA. Jaký je odpor R obvodu, je-li $L = 10$ H?

61C. Za jak dlouho od vypnutí zdroje poklesne napětí na odporu v obvodu RL na 10 % své počáteční hodnoty, je-li $L = 2,00$ H a $R = 3,00$ Ω ?

62C. (a) Uvažujte RL obvod na obr. 31.19. Vyjádřete pomocí napětí zdroje \mathcal{E} , jaké bude indukované emn \mathcal{E}_L okamžitě po přepnutí spínače do polohy a . (b) Jaké bude \mathcal{E}_L v čase $t = 2,0\tau_L$? (c) Vyjádřete pomocí τ_L , kdy bude \mathcal{E}_L polovinou napětí zdroje \mathcal{E} .

63C. Solenoid o indukčnosti 6,30 μ H je zapojen do série s rezistorem 1,20 k Ω . (a) Za jak dlouho po připojení zdroje 14,0 V do obvodu nabude proud rezistorem 80,0 % své ustálené hodnoty? (b) Jaký proud poteče rezistorem v čase $t = 1,0\tau_L$?

64C. Celkový magnetický tok cívkou o odporu 0,75 Ω , je 26 mWb při proudu 5,5 A. (a) Vypočítejte indukčnost cívky. (b) K cívce je náhle připojen zdroj 6,0 V. Jak dlouho roste proud z 0 na 2,5 A?

65Ú. Předpokládejte, že emn zdroje v obvodu na obr. 31.20 se mění s časem t tak, že proud je dán vztahem $I(t) = 3,0 + 5,0t$ v jednotkách SI. Je-li $R = 4,0$ Ω , $L = 6,0$ H, najděte výraz pro emn zdroje v závislosti na čase. (Tip: Použijte pravidlo pro součet napětí v uzavřeném obvodu.)

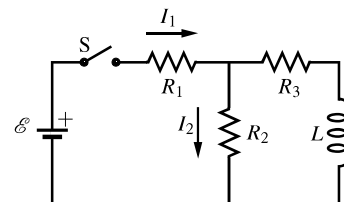
66Ú. V čase $t = 0$ byl k rezistoru a cívce připojen do série zdroj. Níže uvedená tabulka uvádí napětí naměřené na cívce v závislosti na čase od okamžiku připojení zdroje. Určete (a) emn zdroje a (b) časovou konstantu obvodu.

t ms	U_L V	t ms	U_L V
1,0	18,2	5,0	5,98
2,0	13,8	6,0	4,53
3,0	10,4	7,0	3,43
4,0	7,90	8,0	2,60

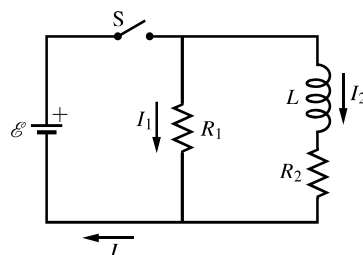
67Ú. Na cívku o $L = 50,0$ mH a $R = 180$ Ω zapojíme napětí 45,0 V. Jak rychle narůstá proud v okamžiku 1,20 ms po zapojení?

68Ú. Dřevěné jádro toroidu se čtvercovým průřezem má vnitřní poloměr 10 cm a vnější poloměr 12 cm. Je těsně ovinuto jednou vrstvou drátu, který má průměr 1,0 mm a odpor na jednotku délky 0,02 $\Omega \cdot \text{m}^{-1}$. Jaká je (a) indukčnost a (b) časová konstanta toroidu? Tloušťku izolace drátu zanedbejte.

69Ú. Na obr. 31.65 je $\mathcal{E} = 100$ V, $R_1 = 10,0$ Ω , $R_2 = 20,0$ Ω , $R_3 = 30,0$ Ω a $L = 2,00$ H. Vypočítejte hodnoty I_1 a I_2 (a) bezprostředně po zapnutí spínače S, (b) za dlouhou dobu potom, (c) bezprostředně po opětovném rozpojení spínače S, (d) za dlouhou dobu potom.

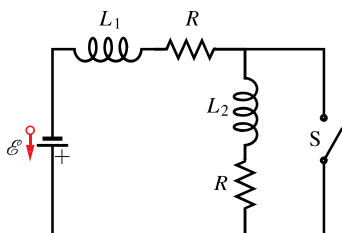
Obr. 31.65
Úloha 69

70Ú. V obvodu na obr. 31.66 je $\mathcal{E} = 10$ V, $R_1 = 5,0$ Ω , $R_2 = 10,0$ Ω a $L = 5,00$ H. Spínač S byl (1) právě sepnut a (2) je sepnut již dlouhou dobu. V obou případech vypočítejte (a) proud I_1 rezistorem R_1 , (b) proud I_2 rezistorem R_2 , (c) proud I spínačem, (d) napětí na R_2 , (e) napětí na L , (f) rychlost změny dI_2/dt .



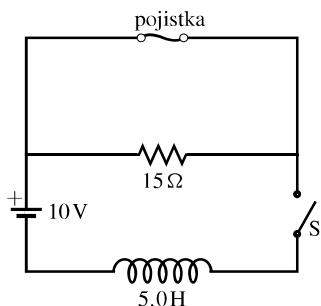
Obr. 31.66 Úloha 70

71Ú. Spínač na obr. 31.67 je sepnut pro časy $t < 0$ a rozpojen v čase $t = 0$. Náhlý úbytek proudu I_1 cívku L_1 vyvolá tak velké indukované napětí, že se na kontaktech spínače na nepatrnou chvíli vytvoří oblouk. Proud I_2 proto neklesne na nulu ihned, ale až za jistou (kratičkou) dobu. Teprve od tohoto okamžiku je proud I_1 cívku L_1 roven proudu I_2 cívku L_2 . Jaká je v tomto prvním okamžiku jejich společná hodnota? (Rezistory mají stejný odpor R .)



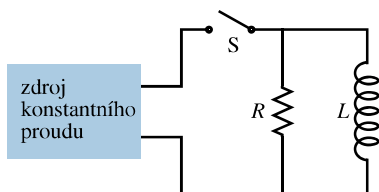
Obr. 31.67 Úloha 71

72Ú. Na obr. 31.68 je v horní větvi ideální pojistka 3,0 A. Ta má tu vlastnost, že má nulový odpor po dobu, kdy je protékající proud menší než 3,0 A a dosáhne-li proud 3,0 A, spálí se a poté má odpor nekonečný. Spínač S je v čase $t = 0$ sepnut. (a) Kdy se pojistka spálí? (*Tip:* Rov. (31.46) nelze použít. Promyslete rov. (31.44).) (b) Načrtněte graf závislosti proudu I cívku na čase. Vyznačte čas, kdy se pojistka spálí.



Obr. 31.68 Úloha 72

73Ú*. V obvodu na obr. 31.69 je spínač S sepnut v čase $t = 0$. Poté udržujeme proud I konstantní vhodnými změnami emn. (a) Odvoďte výraz pro proud cívku v závislosti na čase. (b) Ukažte, že proud rezistorem je stejný jako proud cívku v čase $t = (L/R) \ln 2$.



Obr. 31.69 Úloha 73

ODST. 31.10 Energie magnetického pole

74C. Magnetická energie jisté cívky je 25 mJ při proudu 60,0 mA. (a) Vypočítejte její indukčnost. (b) Jaký proud je nutný pro vytvoření čtyřikrát větší magnetické energie?

75C. Uvažujte obvod na obr. 31.20. Vyjádřete pomocí časové konstanty τ_L , ve kterém okamžiku po připojení zdroje je energie magnetického pole cívky rovna polovině její ustálené hodnoty.

76C. Cívka o indukčnosti 2,0 H a odporu 10 Ω je připojena k ideálnímu zdroji s $\mathcal{E} = 100$ V. (a) Jaký bude ustálený proud? (b) Jakou energii bude přítom mít magnetické pole cívky?

77C. Cívka o indukčnosti 2,0 H a odporu 10 Ω je náhle připojena ke zdroji bez vnitřního odporu a s $\mathcal{E} = 100$ V. Určete okamžitý výkon, s nímž se za 0,10 s po připojení (a) hromadí energie v magnetickém poli, (b) uvolňuje Joulovo teplo na cívce a (c) odebírá energie ze zdroje.

78Ú. Obvod RL na obr. 31.20 má časovou konstantu 37 ms a v čase $t = 0$ je proud v obvodu nulový. Ve kterém okamžiku je rychlost disipace energie v rezistoru rovna výkonu, s nímž se energie hromadí v cívce?

79Ú. Cívka je v sérii s rezistorem o odporu 10,0 k Ω . Po připojení zdroje 50,0 V dosáhne proud za 5,00 ms hodnoty 2,00 mA. (a) Vypočítejte indukčnost cívky. (b) Jakou energii má cívka v uvedeném okamžiku?

80Ú. V obvodu na obr. 31.20 je dáno $\mathcal{E} = 10,0$ V, $R = 6,70$ Ω a $L = 5,50$ H. V čase $t = 0$ byl připojen zdroj. (a) Jakou energii dodal zdroj během prvních dvou sekund? (b) Jakou energii má magnetické pole cívky? (c) Jaká energie byla disipována v rezistoru?

81Ú. Solenoid délky 80,0 cm a poloměru 5,00 cm má 3 000 rovnoměrně navinutých závitů. Jeho celkový odpor je 10,0 Ω . V čase 5,00 ms po připojení ke zdroji 12,0 V určete (a) jakou energii má jeho magnetické pole, (b) jaká energie byla dodána zdrojem během této doby. (Rozptyl pole zanedbejte.)

82Ú. Dokažte, že po přepnutí spínače S na obr. 31.19 z polohy a do b se nakonec všechna energie nahromaděná v cívce disipuje v rezistoru.

ODST. 31.11 Hustota energie magnetického pole

83C. Solenoidem délky 85,0 cm, průřezu 17,0 cm² s 950 závitů protéká proud 6,60 A. (a) Vypočítejte objemovou hustotu energie magnetického pole uvnitř solenoidu. (b) Určete celkovou energii magnetického pole. (Okrajové efekty zanedbejte.)

84C. Toroid o indukčnosti 90,0 mH má objem 0,020 0 m³. Jaký proud jím protéká, je-li hustota energie v toroidu 70,0 J·m⁻³?

85C. Jak velkou intenzitu musí mít elektrické pole, aby mělo stejnou hustotu energie jako magnetické pole o indukci 0,50 T?

86C. V mezihvězdném prostoru v naší Galaxii má magnetická indukce velikost asi 10^{-10} T. Kolik magnetické energie obsahuje krychle o délce hrany 10 světelných let? (Pro srovnání poznamenejme, že vzdálenost nejbližší hvězdy je asi 4,3 světelných let a poloměr naší Galaxie je asi $8 \cdot 10^4$ světelných let.)

87C. Užijte výsledek řešení př. 31.11 k získání výrazu pro indukčnost koaxiálního kabelu délky l .

88C. Kolik energie je potřeba, abychom v krychli o hraně 10 cm vytvořili (a) homogenní elektrické pole o intenzitě $100 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$, (b) homogenní magnetické pole o indukci 1 T. (Obojí je reálně dosažitelné v laboratoři.) (c) Které z těchto polí obsahuje více energie?

89C. Kruhovou vodivou smyčkou o poloměru 50 mm protéká proud 100 A. (a) Určete magnetickou indukci ve středu smyčky. (b) Vypočítejte hustotu energie ve středu smyčky.

90Ú. (a) Pro toroid z př. 31.6b stanovte výraz pro závislost hustoty energie na vzdálenosti r od středu. (b) Integrací hustoty energie přes objem toroidu vypočítejte celkovou energii obsaženou v jeho poli, teče-li toroidem proud $I = 0,500 \text{ A}$. (c) Užitím rov. (31.53) vypočítejte energii v toroidu přímo z jeho indukčnosti a srovnajte s výsledkem otázky (b).

91Ú. Dlouhým měděným vodičem protéká proud 10 A v průřezu rovnoměrně rozložený. Vypočítejte (a) hustotu energie magnetického pole a (b) hustotu energie elektrického pole těsně nad vodičem. Průměr vodiče je 2,5 mm a jeho odpor na jednotku délky je $3,3 \Omega/\text{km}$.

92Ú. (a) Jaká je hustota energie zemského magnetického pole, má-li jeho indukce velikost $50 \mu\text{T}$? (b) Považujte tuto hustotu přibližně za konstantní ve vzdálenostech malých vůči poloměru Země a zanedbejte její nehomogenitu v blízkosti magnetických pólů. Kolik energie je uloženo mezi povrchem Země a soustředěnou kulovou plochou 16 km nad povrchem Země?

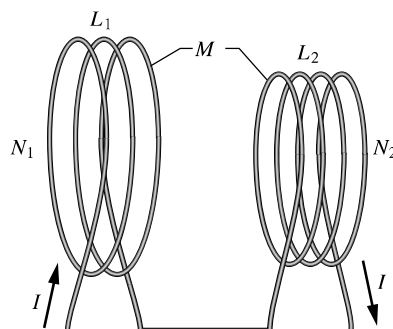
ODST. 31.12 Vzájemná indukčnost

93C. Dvě cívky mají vůči sobě pevnou polohu. Jestliže cívku 1 proud neteče a proud cívku 2 roste rychlostí $15,0 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$, na cívce 1 vzniká emn $25,0 \text{ mV}$. (a) Jaká je vzájemná indukčnost cívek? (b) Kdy poteče cívku 2 nulový proud a cívku 1 proud $3,60 \text{ A}$? Jaký je celkový magnetický tok cívku 2?

94C. Cívka 1 má indukčnost $L_1 = 25 \text{ mH}$ a počet závitů $N_1 = 100$. Cívka 2 má indukčnost $L_2 = 40 \text{ mH}$ a počet závitů $N_2 = 200$. Jejich vzájemná poloha se nemění, jejich vzájemná indukčnost $M = 3,0 \text{ mH}$. Proud $6,0 \text{ mA}$ v cívce 1 se mění rychlostí $4,0 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$ (a) Jaký magnetický indukční tok Φ_{12} teče cívku 1 a jaké emn se na ní indukuje? (b) Jaký tok Φ_{21} teče cívku 2 a jaké emn se na ní indukuje?

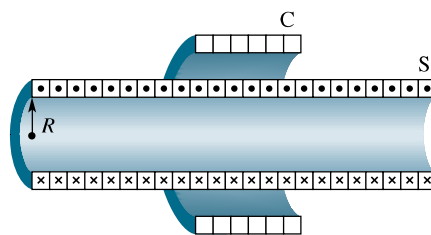
95C. Dva solenoidy jsou částí indukční cívky v automobilu. Jestliže proud jedním solenoidem klesne z $6,0 \text{ A}$ na nulu za $2,5 \text{ ms}$, indukuje se na druhém solenoidu emn 30 kV . Jaká je jejich vzájemná indukčnost?

96Ú. Dvě cívky spojené podle obr. 31.70 mají indukčnosti L_1 a L_2 . Vzájemná indukčnost je M . (a) Dokažte, že kombinaci těchto cívek můžeme nahradit jednou cívku o ekvivalentní indukčnosti $L_{\text{ekv}} = L_1 + L_2 + 2M$. (b) Jak bychom měli zapojit cívky z obr. 31.70, abychom získali ekvivalentní indukčnost $L_{\text{ekv}} = L_1 + L_2 - 2M$? (Tento problém rozšiřuje úlohu 56 tím, že cívky již nejsou velmi vzdáleny.)



Obr. 31.70 Úloha 96

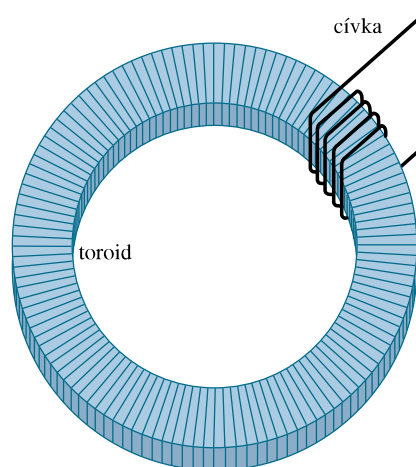
97Ú. Cívka C o N závitěch je nasunuta na dlouhý kruhový solenoid S o poloměru R a o n závitěch na jednotku délky (obr. 31.71). Ukažte, že vzájemná indukčnost cívky a solenoidu je $M = \mu_0 \pi R^2 n N$. Vysvětlete, proč M v tomto případě nezávisí na tvaru a velikosti cívky a není ani ovlivněna hustotou vinutí závitů cívky.



Obr. 31.71 Úloha 97

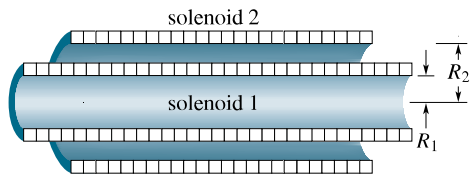
98Ú. Obr. 31.72 ukazuje cívku o N_2 závitěch navinutou kolem části toroidu o N_1 závitěch. Vnitřní poloměr toroidu je a , vnější poloměr je b a výška je h . Ukažte, že vzájemná indukčnost této kombinace toroidu a cívky je

$$M = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$



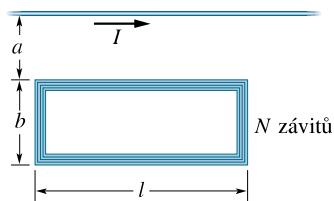
Obr. 31.72 Úloha 98

99Ú. Obr. 31.73 ukazuje v průřezu dva sousední solenoidy. Ukažte, že vzájemná indukčnost M délky l této sestavy je dána vztahem $M = \pi R_1^2 l \mu_0 n_1 n_2$, kde n_1 a n_2 jsou počty závitů na jednotku délky a R_1 je poloměr vnitřního solenoidu. Proč M závisí na R_1 a nikoli na R_2 ?



Obr. 31.73 Úloha 99

100Ú. Čtvercová smyčka o N těsně navinutých závitů je umístěna blízko rovného drátu podle obr. 31.74. (a) Jaká je vzájemná indukčnost M soustavy smyčka + drát? (b) Vypočítejte M pro $N = 100$, $a = 1,0$ cm, $b = 8,0$ cm a $l = 30$ cm.



Obr. 31.74 Úloha 100

32

Magnetické pole v látce, Maxwellovy rovnice



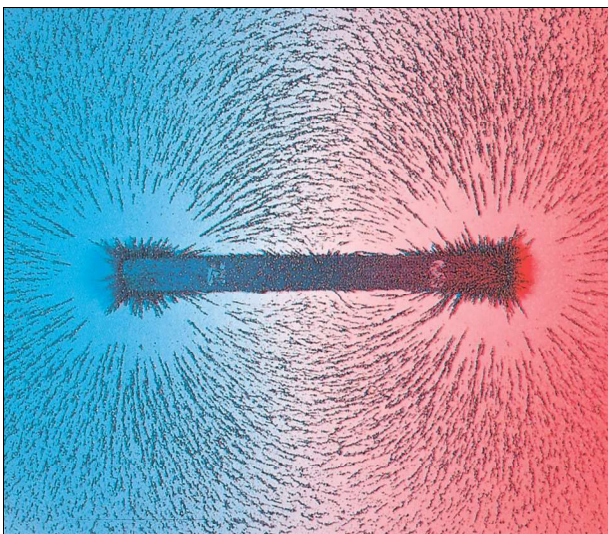
Směr zemského magnetického pole není stálý, ale s časem se mění. Jedním ze způsobů, jak lze určit směr pole v určité době v minulosti, je zkoumání hliněných stěn pecí používaných k vypalování keramiky. Jak a proč však jílovitá vyzdívka zaznamenala zemské magnetické pole?

32.1 MAGNETY

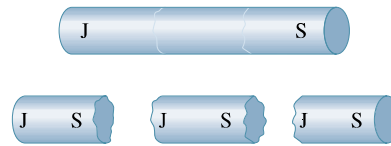
Prvním známým magnetem byl *magnetovec*. Když starověcí Řekové a Číňané objevili tyto celkem zřídka se vyskytující minerály, sloužila jejich udivující schopnost přitahovat některé kovy zpočátku jen k zábavě. Až mnohem později se lidé naučili používat magnetovec a uměle zmagetované kousky železa jako kompasu k určování směru.

Dnes se magnety a magnetické materiály vyskytují všude okolo nás. Nalezneme je ve videorekordérech, audiokazetách, kreditních kartách, sluchátkách i v tiskařské barvě papírových bankovek. Dokonce některé potraviny, jako např. železem obohacené obilné vločky, obsahují nepatrné kousky magnetických materiálů (můžete je shromáždit z plovoucích vloček pomocí magnetu). A co je důležitější, moderní elektronický průmysl v současné podobě (včetně oblastí hudby i informatiky) by nebyl možný bez magnetických materiálů.

Původ magnetických vlastností materiálů je třeba hledat až v atomech a v elektronech. Studium ale začneme s tyčovým magnetem podle obr. 32.1. Jak je z něho patrné, železné piliny, rozsypané okolo takového magnetu, se orientují ve směru magnetického pole magnetu a jejich rozložení ukazuje průběh magnetických indukčních čar. Z nahuštění indukčních čar na koncích magnetu bychom mohli soudit, že z jednoho konce — nazvěme ho **severní pól** — indukční čáry vystupují (je to tedy *zdroj* neboli *zřídlo* pole) a do druhého — **jižního pólu** — se vracejí (*propad* neboli *nor*). Říkáme, že magnet se svými dvěma póly je příklad **magnetického dipólu**.



Obr. 32.1 Tyčový magnet je magnetický dipól. Železné piliny naznačují indukční čáry magnetického pole. (Pozadí je osvětlené barevným světlem.)



Obr. 32.2 Rozlomíme-li magnet, každý úlomek se stane samostatným magnetem s vlastním severním a jižním pólem.

Proveďme pokus, při kterém rozlomíme na kusy tyčový magnet podobně, jako lámeme křídou (obr. 32.2). Zdá se, že bychom tak mohli izolovat jeden z pólů a vytvořit tak *monopól*, „magnetický náboj“. K našemu překvapení se to však nestane, dokonce ani kdybychom mohli rozlomit magnet na jednotlivé atomy a potom na jeho jádra a elektrony. Každý zlomek magnetu má svůj severní a jižní pól. Náš pokus uzavřeme následujícím konstatováním:

Nejjednodušší magnetická struktura je magnetický dipól. Magnetické monopóly neexistují (alespoň podle dosavadního stavu našich vědomostí).

32.2 GAUSSŮV ZÁKON PRO MAGNETICKÉ POLE

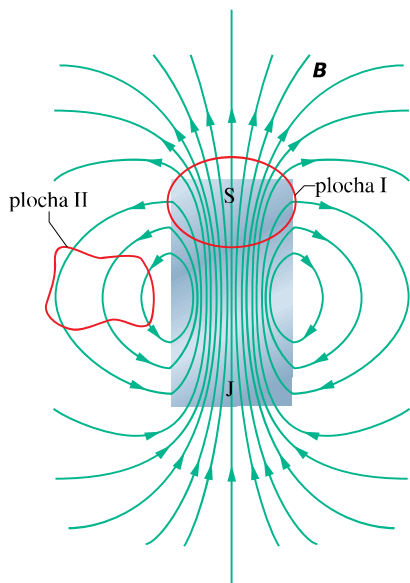
Gaussův zákon pro magnetické pole říká, že neexistují magnetické monopóly. Zákon tvrdí, že celkový magnetický indukční tok Φ_B přes jakoukoli uzavřenou plochu (Gaussova plocha) je nulový:

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{Gaussův zákon pro magnetické pole}). \quad (32.1)$$

Porovnejme tento vztah s Gaussovým zákonem elektrostatiky (24.7)

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (\text{Gaussův zákon pro elektrické pole}).$$

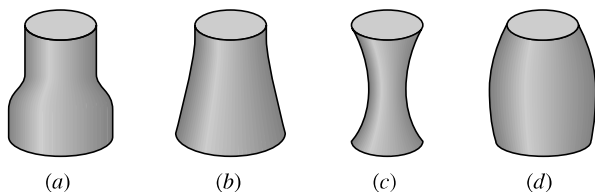
V obou rovnicích se integruje přes *uzavřenou* Gaussovu plochu. Gaussův zákon pro elektrické pole říká, že tento integrál (celkový tok vektoru elektrické intenzity) je úměrný celkovému náboji Q uvnitř plochy. Gaussův zákon pro magnetické pole říká, že celkový tok magnetické indukce (neboli magnetický indukční tok) uzavřenou plochou je nulový, protože uvnitř této plochy (i jakkoli malé) je nulový i „magnetický náboj“. Proto musí všechny indukční čáry vstupující dovnitř Gaussovou plochou také vystoupit ven (a naopak). Nejjednodušším magnetickým prvkem je tedy dipól, který sestává současně ze zdroje i noru magnetických indukčních čar.



Obr. 32.3 Indukční čáry magnetického pole \mathbf{B} krátkého tyčového magnetu. Červené křivky představují řezy uzavřenými trojrozměrnými Gaussovými plochami.

Gaussův zákon pro magnetické pole platí i pro složitější soustavy, než je magnetický dipól, a platí dokonce i v případě, kdy (uzavřená) Gaussova plocha neuzavírá celý magnet, tj. „prochází skrz magnet“. Např. Gaussova plocha II v blízkosti tyčového magnetu z obr. 32.3 neuzavírá žádný z pólů a můžeme tedy usoudit, že magnetický tok jí procházející je nulový. U plochy I je však situace složitější; zdánlivě uzavírá jen severní pól magnetu S a ne jižní pól J. Jižní pól však musíme přiřadit dolní části uzavřené plochy, protože indukční čáry zde do ní vstupují. Gaussova plocha I proto uzavírá magnetický dipól a celkový tok touto plochou je nulový.

KONTROLA 1: Obrázek ukazuje čtyři uzavřené plochy s rovinnými podstavami a zakřivenými bočními stěnami. V tabulce jsou uvedeny obsahy horní S_h a dolní podstavy S_d a indukce homogenního magnetického pole kolmého k těmto podstavám. Jednotky, v nichž je vyjádřen obsah ploch S a indukce B , jsou libovolné, avšak stejné pro všechny řádky tabulky. Seřadte plochy sestupně podle velikosti magnetického toku jejich zakřivenými bočními stěnami.

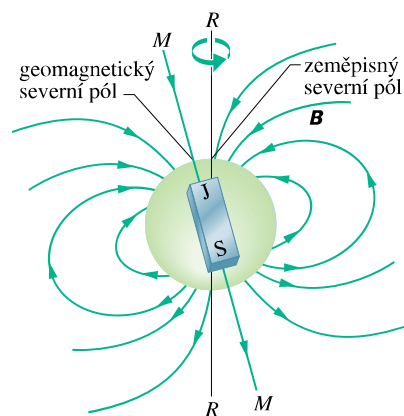


PLOCHA	S_h	B_h	S_d	B_d
a	2	6, ven	4	3, dovnitř
b	2	1, dovnitř	4	2, dovnitř
c	2	6, dovnitř	2	8, ven
d	2	3, ven	3	2, dovnitř

32.3 ZEMSKÝ MAGNETISMUS

Země je obrovský magnet. Kolem Země lze zemské magnetické pole znázornit jako pole obrovského tyčového magnetu — magnetického dipólu, který prochází středem planety. Obr. 32.4 představuje idealizované symetrické zobrazení pole dipólu bez zkreslení, způsobeného např. tokem částic ze Slunce.

Protože zemské magnetické pole je zhruba ekvivalentní poli dipólu, lze ho přibližně popsat magnetickým dipólovým momentem μ . Pro idealizované pole podle obr. 32.4 je velikost μ rovna $8,0 \cdot 10^{22} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ a směr μ svírá úhel 11° s osou (RR) rotace Země. Osa dipólu (MM v obr. 32.4) je ve směru μ a protíná zemský povrch v **geomagnetickém severním pólu** (v roce 1980 ležel v severozápadním Grónsku na $78,8^\circ$ severní šířky a $289,3^\circ$ východní délky, tedy asi 1 250 km od pólu geografického) a v **geomagnetickém jižním pólu** v protilehlém bodě v Antarktidě. Indukční čáry pole \mathbf{B} obecně vycházejí z jižní polokoule a vstupují do Země na severní polokouli. Severní magnetický pól, ležící na severní polokouli, je tedy *ve skutečnosti jižním pólem zemského magnetického dipólu*.



Obr. 32.4 Zemské magnetické pole zobrazené jako pole dipólu. Osa dipólu MM svírá úhel 11° s osou rotace Země RR . Jižní pól dipólu je na severní polokouli.

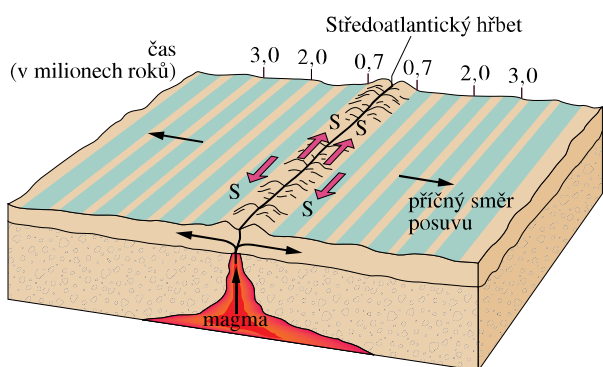
Směr magnetického pole v kterémkoli místě na zemském povrchu je obecně určen dvěma úhly. **Magnetická deklinace** je úhel (+ nalevo nebo – napravo) mezi zeměpisným severem (který odpovídá 90° zeměpisné šířky)

a směrem vodorovné složky magnetického pole. **Magnetická inklinace** je úhel (+ nahoru, – dolů) mezi vodorovnou rovinou a směrem magnetického pole.

Tyto úhly se měří *magnetometry* s velkou přesností. K jejich přibližnému určení však vystačíme s *kompasem* a *inklinační magnetkou*. V kompasu je magnet ve tvaru jehly (magnetka, štrelka) upevněný tak, aby se mohl volně otáčet ve vodorovné rovině kolem svislé osy. Držíme-li kompas ve vodorovné poloze, směřuje severní pól jehly ke *geomagnetickému* severnímu pólu (což je jižní pól magnetického dipólu Země, obr. 32.4). Úhel mezi jehlou a zemepisným severem je deklinace pole. Inklinací magnetka je magnet, který se může volně otáčet ve svislé rovině okolo vodorovné osy. Leží-li (svislá) rovina otáčení inklinací magnetky v severojižním směru, pak úhel mezi jehlou a vodorovnou rovinou je inklinace pole.

Magnetické pole naměřené na různých místech zemského povrchu se může znatelně lišit od idealizovaného pole dipólu podle obr. 32.4. Tak místo, kde je pole přesně kolmé k zemskému povrchu, se nenalézá, jak bychom očekávali, v Grónsku. Tento tzv. *magnetický severní pól* je na ostrově královny Alžběty v severní Kanadě, daleko od Grónska.

Dodejme ještě, že pole, pozorované na kterémkoli místě na povrchu Země, se mění s časem, a to s měřitelnou odchylkou během několika let a se znatelnou změnou asi za 100 let. Např. mezi lety 1580 a 1820 se směr naměřený kompasem v Londýně změnil o 35° .



Obr. 32.5 Magnetický profil mořského dna na obou stranách Středoatlantického hřbetu. Mořské dno posouvající se od středo-oceánského hřbetu obsahuje záznam magnetické historie zemského jádra. Směr magnetického pole se mění na opačný přibližně za milion roků (někdy za sto tisíc, jindy za deset milionů let).

Přes uvedené změny se střední dipólový moment Země mění během takovéto relativně krátké doby málo. Změny za delší dobu můžeme studovat měřením slabého magnetismu

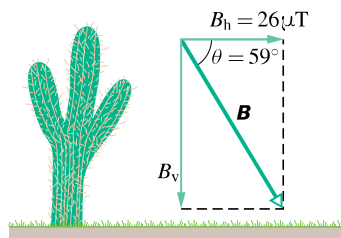
mořského dna na obou stranách Středoatlantického hřbetu (obr. 32.5). Toto dno bylo vytvořeno roztaveným magmatem, které pomalu pronikalo ze zemského nitra, tuhlo a bylo postupně posunuto v příčném směru od hřbetu (posuvem tektonických desek) rychlostí několika centimetrů za rok. Jak magma tuhlo, slabě se zmagnetizovalo ve směru zemského magnetického pole v době tuhnutí. Studium tohoto ztuhlého magmatu napříč dnem oceánu odhaluje, že zemské magnetické pole měnilo svoji polaritu (směr severního a jižního pólu) přibližně jednou za milion let (někdy za sto tisíc, jindy za deset milionů let). Důvod této změny není znám. Mechanismus, který vytváří magnetické pole Země, nám stále není příliš jasný.

PŘÍKLAD 32.1

V arizonském Tucsonu v r. 1964 směřoval severní pól štrelky kompasu 13° východně od severního zeměpisného pólu a severní pól inklinací magnetky směřoval 59° směrem dolů od vodorovné roviny. Vodorovná složka B_h zemského magnetického pole \mathbf{B} v Tucsonu měla velikost $26 \mu\text{T}$. Jaká byla velikost indukce B pole v gaussech? (Zemské magnetické pole se často udává v gaussech, G.)

ŘEŠENÍ: Obr. 32.6, který ukazuje zadané hodnoty, je kreslen ve svislé rovině vektoru \mathbf{B} , pootočené o 13° k východu. Z obrázku je patrné, že

$$B = \frac{B_h}{\cos \theta} = \frac{(26 \mu\text{T})}{\cos 59^\circ} = 50 \mu\text{T} = 0,50 \text{ G. (Odpověď)}$$



Obr. 32.6 Příklad 32.1. Zemské magnetické pole a jeho složky v Tucsonu v Arizoně v r. 1964.

32.4 MAGNETISMUS A ELEKTRONY

Magnetické materiály od magnetovce až po videopásku jsou magnetické především díky svým elektronům. Už jsme poznali jeden způsob, jakým mohou elektrony generovat magnetické pole: usměrníme-li jejich pohyb vodičem, pak tento elektrický proud vytváří magnetické pole okolo vodiče. Existují dva další způsoby, které umožňují vznik magnetických dipólů a kterými se vytváří magnetické pole. Jejich vysvětlení však vyžaduje znalost kvantové fyziky, které se budeme věnovat později. Proto zde pouze nastíníme výsledky.

Spinový magnetický dipólový moment

Elektron má vlastní, vnitřní moment hybnosti, nazývaný též **spinový moment hybnosti** (nebo jednoduše **spin**), který značíme \mathbf{S} . Se spinem je spojen vlastní **spinový magnetický dipólový moment** $\boldsymbol{\mu}_s$. (Slovem *vlastní* máme na mysli to, že \mathbf{S} a $\boldsymbol{\mu}_s$ jsou charakteristiky elektronu stejně jako jeho hmotnost a elektrický náboj. Přívlástek „dipólový“ budeme zpravidla pro stručnost vypouštět.) Momenty \mathbf{S} a $\boldsymbol{\mu}_s$ spolu souvisejí vztahem

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m}\mathbf{S}, \quad (32.2)$$

kde e je elementární náboj ($1,60 \cdot 10^{-19}$ C) a m je hmotnost elektronu ($9,11 \cdot 10^{-31}$ kg). Znaménko minus znamená, že \mathbf{S} a $\boldsymbol{\mu}_s$ mají opačné směry.

Spin \mathbf{S} je zcela odlišný od klasického momentu hybnosti z kap. 12, a to ze dvou hledisek:

1. Samotný spin \mathbf{S} nelze měřit. Měřit lze jen jeho složku ve zvoleném směru.
2. Měřená složka je kvantována; nabývá diskretních hodnot, a to stejných bez ohledu na to, který směr jsme zvolili.

Předpokládejme, že měříme složku spinu \mathbf{S} ve směru osy z souřadnicové soustavy. Pak složka S_z může mít pouze některou ze dvou hodnot daných vztahem

$$S_z = m_s \hbar \quad \text{pro } m_s = \pm \frac{1}{2}. \quad (32.3)$$

Zde m_s je *spinové magnetické kvantové číslo* a $\hbar = h/2\pi \doteq 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s je redukovaná Planckova konstanta, významná konstanta kvantové fyziky. Znaménka v rov. (32.3) souvisejí se směrem průmětu \mathbf{S}_z do osy z . Je-li \mathbf{S}_z souhlasně rovnoběžný s osou z , je $m_s = +\frac{1}{2}$ a říkáme, že elektron má spin orientovaný nahoru. Je-li \mathbf{S}_z s osou z nesouhlasně rovnoběžný, je $m_s = -\frac{1}{2}$ a říkáme, že elektron má spin orientovaný dolů.

Spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_s$ také nelze měřit. Měřit lze pouze jeho složku, která je rovněž kvantována a která nabývá stejných hodnot nezávisle na zvoleném směru. Podle rov. (32.2) můžeme složku $\mu_{s,z}$ vyjádřit pomocí složky S_z spinu vztahem

$$\mu_{s,z} = -\frac{e}{m}S_z.$$

Dosažením za S_z z rov. (32.3) dostaneme

$$\mu_{s,z} = \pm \frac{e\hbar}{2m}, \quad (32.4)$$

kde znaménka plus a minus odpovídají souhlasně a nesouhlasně rovnoběžnému průmětu $\boldsymbol{\mu}_{s,z}$ do osy z .

Zlomek na pravé straně rov. (32.4) se nazývá *Bohrův magneton* μ_B :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1} \quad (\text{Bohrův magneton}). \quad (32.5)$$

Spinové magnetické dipólové momenty elektronů a dalších elementárních částic jsou násobky μ_B . Pro elektron je měřená složka vektoru $\boldsymbol{\mu}_s$ rovna

$$\mu_{s,z} = \pm \mu_B. \quad (32.6)$$

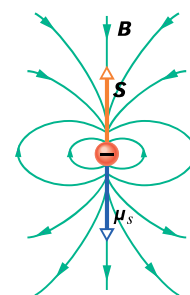
(*Kvantová elektrodynamika*, zabývající se kvantováním polí, ukazuje, že $\mu_{s,z}$ je ve skutečnosti poněkud větší než μ_B , ale to v našich úvahách není podstatné.)

Když je elektron umístěn do vnějšího magnetického pole \mathbf{B}_{ext} , lze libovolně orientaci magnetického spinového momentu $\boldsymbol{\mu}_s$ přiřadit potenciální energii E_p stejně, jako lze potenciální energii přiřadit magnetickému momentu $\boldsymbol{\mu}$ proudové smyčky umístěné v \mathbf{B}_{ext} . Z rov. (29.36) dostaneme pro potenciální energii elektronu

$$E_p = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = -\mu_{s,z} B, \quad (32.7)$$

kde osa z je ve směru \mathbf{B}_{ext} .

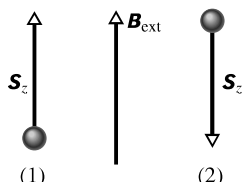
Představíme-li si, že elektron je mikroskopická kulička (což ale ve skutečnosti není!), můžeme znázornit spin \mathbf{S} , spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_s$ a příslušné magnetické pole dipólu tak, jak je naznačeno na obr. 32.7. Ačkoli užíváme slovo „spin“ (tj. rotace), elektrony nerotují jako vlček. Jak ale může mít částice moment hybnosti bez toho, že by skutečně rotovala? Odpověď opět dává až kvantová fyzika.



Obr. 32.7 Spin \mathbf{S} , spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_s$ a magnetické pole \mathbf{B} elektronu znázorněného kuličkou.

Podobně jako elektrony mají i protony a neutrony vlastní moment hybnosti (spin) a s ním spřažený spinový magnetický dipólový moment. Pro proton mají tyto dva vektory stejný směr, pro neutron jsou směry opačné. Nebudeme se zde zabývat příspěvky těchto dipólových momentů k magnetickému poli atomů, protože jsou asi tisíckrát menší než magnetické momenty elektronů.

KONTROLA 2: Obrázek ukazuje dvě částice a jejich spiny ve vnějším magnetickém poli \mathbf{B}_{ext} . Která z částic má menší potenciální energii, jde-li o (a) elektrony, (b) protony?



Orbitální magnetický dipólový moment

Elektron jako součást atomu má ještě orbitální moment hybnosti, který značíme \mathbf{L} . S ním je spojen orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$. Oba momenty spolu souvisejí vztahem

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m}\mathbf{L}. \quad (32.8)$$

Záporné znaménko znamená, že $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ a \mathbf{L} mají opačné směry.

Ani orbitální moment \mathbf{L} nelze měřit; měřit lze jen jeho složku ve zvoleném směru a ta je kvantována. Zvolíme-li osu z , pak složka L_z může mít pouze hodnoty vyjádřené vztahem

$$L_z = m_l \hbar \quad \text{pro } m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad (32.9)$$

ve kterém m_l je orbitální magnetické kvantové číslo a l je tzv. orbitální (neboli vedlejší) kvantové číslo (viz čl. 41.4). Znaménka v rov. (32.9) souvisejí s orientací L_z vůči ose z .

Orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ elektronu také nelze měřit; měřit lze opět jen jeho složku a ta je kvantována. Z rov. (32.8) a (32.9) plyne

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \frac{e\hbar}{2m} \quad (32.10)$$

a užitím Bohrova magnetonu z rov. (32.5) dostaneme

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \mu_B. \quad (32.11)$$

Nachází-li se atom ve vnějším magnetickém poli \mathbf{B}_{ext} , lze libovolné orientaci $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ každého jeho elektronu přiřadit potenciální energii E_p o hodnotě

$$E_p = -\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = -\mu_{\text{orb},z} B_{\text{ext}}, \quad (32.12)$$

kde osa z je ve směru \mathbf{B}_{ext} .

I když jsme zde použili termín „orbitální“, elektrony neobíhají jádro atomu po nějakých orbitách (dráhách, trajektoriích) jako planety okolo Slunce. Jak však může mít elektron orbitální moment hybnosti, aniž by obíhal v obvyklém významu tohoto slova? Odpověď dává opět až kvantová fyzika.

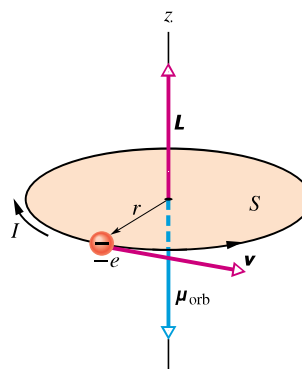
Smyčkový model pro dráhy elektronů

Rov. (32.8) odvodíme bez pomoci kvantové fyziky. Budeme pouze předpokládat, že elektron se pohybuje po kruhové dráze — smyčce s poloměrem mnohem větším, než je poloměr atomu (odtud název „smyčkový model“). Odvození se však nehodí na elektron uvnitř atomu (v tomto případě bychom potřebovali použít kvantovou fyziku).

Představme si, že elektron rovnoměrně obíhá po kruhové dráze proti směru otáčení hodinových ručiček, jak je znázorněno na obr. 32.8. Pohyb záporného náboje elektronu je ekvivalentní proudu I (kladného náboje), který teče ve směru otáčení hodinových ručiček. Velikost orbitálního magnetického dipólového momentu takového proudové smyčky je dána rov. (29.33) pro $N = 1$:

$$\mu_{\text{orb}} = IS, \quad (32.13)$$

kde S je obsah plochy ohraničené smyčkou. Směr tohoto magnetického dipólu míří v obr. 32.8 podle pravidla pravé ruky v obr. 30.22 dolů.



Obr. 32.8 Elektron rovnoměrně obíhá po kruhové dráze o poloměru r , která obepíná plochu S . Elektron má orbitální moment hybnosti \mathbf{L} a s ním spojený orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$. Pohyb elektronu vytváří elektrický proud I tekoucí ve směru otáčení hodinových ručiček (elektron má záporný náboj).

K úpravě rov. (32.13) je třeba znát proud I . Ustálený proud je obecně podíl náboje, procházejícího libovolným průřezem obvodu, a doby průchodu. Zde náboj velikosti e proběhne celou kruhovou dráhu (orbitu) za dobu $T = 2\pi r/v$, takže

$$I = \frac{\text{náboj}}{\text{doba}} = \frac{e}{2\pi r/v}. \quad (32.14)$$

Dosadíme-li tuto hodnotu a obsah plochy $S = \pi r^2$ do rov. (32.13), dostaneme

$$\mu_{\text{orb}} = \frac{e}{2\pi r/v} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (32.15)$$

Abychom získali výraz pro orbitální moment hybnosti \mathbf{L} elektronu, použijeme rov. (12.25) ($\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$). Protože \mathbf{r} a \mathbf{v} jsou navzájem kolmé, má \mathbf{L} velikost

$$L = mrv \sin 90^\circ = mrv. \quad (32.16)$$

Vektor \mathbf{L} na obr. 32.8 směřuje vzhůru (obr. 12.12). Použitím rov. (32.15) a (32.16) a při respektování opačných směrů vektorů znaménkem minus dostaneme vektorový zápis

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L},$$

což je rov. (32.8). Takto jsme klasickým (nekvantovým) postupem získali též výsledek, který dává kvantová fyzika.

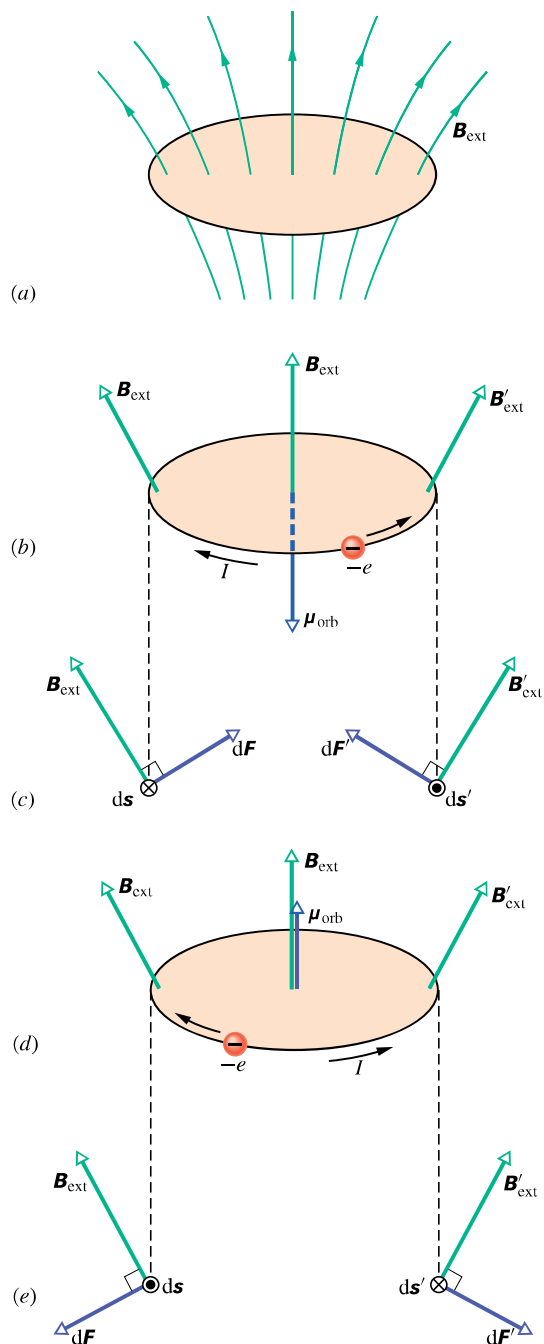
Takové odvození by šlo provést i pro elektron pohybující se uvnitř atomu a analogický výsledek by byl také správný. Taková představa by však vedla k dalším, nesprávným důsledkům. Proto jsme se omezili jen na dráhy podstatně větší.

Smyčka v nehomogenním poli

V dalším výkladu budeme považovat dráhu elektronu za (nedeforovatelnou) proudovou smyčku podle obr. 32.8. Budeme se však zabývat nehomogenním magnetickým polem \mathbf{B}_{ext} , jaké je naznačeno v obr. 32.9a. (Toto pole je podobné poli v okolí severního pólu magnetu v obr. 32.3, kde se indukční čáry také podobně rozbíhají. Připomeňme, že pole je silnější tam, kde jsou indukční čáry hustší, a je slabší tam, kde jsou řidší. Pole tedy slábne ve směru, v němž se indukční čáry rozbíhají a sílí ve směru, v němž se sbíhají.) Tím si připravíme podklady pro studium sil, působících na magnetické materiály v nehomogenních polích.

Předpokládejme vnější pole podle obr. 32.9b, d: vektory magnetické indukce podél celé kruhové dráhy elektronu mají stejnou velikost, jsou k ní kolmé a svírají se svislou osou stejný úhel. Také předpokládejme, že každý elektron v atomu se pohybuje buď proti směru (obr. 32.9b), nebo po směru (obr. 32.9d) otáčení hodinových ručiček. Obr. 32.9c, e ukazují tyto situace v řezu rovinou dráhy elektronu. Obrázky ukazují i dohodu přiřazený směr proudu I tekoucího proudovou smyčkou a orbitální magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}}$ proudu I .

Sledujme nejprve levou část obr. 32.9c. Je zakreslen element $d\mathbf{s}$ smyčky orientovaný souhlasně se směrem proudu I , pole \mathbf{B}_{ext} a magnetická síla $d\mathbf{F}$ působící na ele-



Obr. 32.9 (a) Smyčkový model elektronu obíhajícího po kruhové dráze v atomu, který je v nehomogenním magnetickém poli \mathbf{B}_{ext} . (b) Náboj $-e$ obíhá proti směru otáčení hodinových ručiček, a proto má jemu odpovídající proud opačný směr. (c) Magnetické síly $d\mathbf{F}$ a $d\mathbf{F}'$ působící na levou a pravou stranu smyčky. Výsledná síla působící na smyčku směřuje nahoru. (Pohled v rovině smyčky.) (d) Opačný směr pohybu náboje. (e) Výsledná síla působící na smyčku směřuje dolů. (Pohled v rovině smyčky.)

ment $d\mathbf{s}$. Připomeňme, že na proudový element $I d\mathbf{s}$ v magnetickém poli o indukci \mathbf{B}_{ext} působí magnetická síla podle rov. (29.27), tj.

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}. \quad (32.17)$$

V levé části obr. 32.9c směřuje tedy síla $d\mathbf{F}$ nahoru a doprava. Vzhledem k symetrii problému (otočení kolem svislé osy o 180°) má síla $d\mathbf{F}'$ na pravé straně obr. 32.9c stejnou velikost, směřuje rovněž nahoru, ale tentokrát doleva. Součtem sil $d\mathbf{F}$ a $d\mathbf{F}'$ se jejich vodorovné složky zruší, zatímco svislé se zdvojnásobí. Totéž platí pro každou symetricky umístěnou dvojici elementů smyčky. Výsledná síla na smyčku tedy bude podle obr. 32.9b působit nahoru. Úplně stejně odvodíme, že výsledná síla působící na smyčku v obr. 32.9e směřuje dolů. Toho použijeme dále při studiu chování materiálů v nehomogenním magnetickém poli.

32.5 MAGNETICKÉ LÁTKY

Každý elektron v atomu má orbitální dipólový magnetický moment a spinový magnetický dipólový moment, které se vektorově skládají. Výslednice těchto dvou vektorů se vektorově skládá s výslednicemi ostatních elektronů v atomu. A takto získaná výslednice pro jeden atom se skládá s výslednicemi všech ostatních atomů ve vzorku látky. Pokud součet všech těchto magnetických dipólových momentů vytváří makroskopické magnetické pole, je látka magnetická. Existují tři hlavní typy magnetismu: diamagnetismus, paramagnetismus a feromagnetismus.

1. **Diamagnetismus** vykazují všechny látky. Je ale tak slabý, že je překryt, když látka vykazuje také paramagnetismus nebo feromagnetismus. Umístíme-li jakoukoli látku do vnějšího magnetického pole, indukují se v jejích atomech slabé magnetické dipólové momenty orientované *proti vnějšímu poli*. Výsledné působení všech indukovaných dipólů je však zdrojem pouze slabého magnetického pole. Dipólové momenty, a tedy i jejich slabé pole zmizí, jestliže vnější pole odstraníme. Výraz *diamagnetická látka* se obvykle užívá pro materiály, které vykazují pouze diamagnetismus.

2. **Paramagnetismus** vykazují všechny látky, jejichž atomy mají nenulový moment hybnosti (např. všechny atomy s lichým počtem elektronů), a zejména látky obsahující přechodové prvky, prvky vzácných zemin a aktinidy (viz dodatek G). Každý atom takovéto látky má tedy i bez vnějšího působení svůj magnetický dipólový moment. Tyto momenty jsou však v látce náhodně orientovány, takže látka jako celek nemá výsledné magnetické pole. Vnější magnetické pole může částečně uspořádat atomové magnetické momenty *souhlasně* s vnějším polem a tím se v látce

vytvoří magnetické pole. Vzniklé uspořádání však zanikne poté, co vnější pole odstraníme. Termín *paramagnetická látka* se obvykle užívá pro materiály, které vykazují paramagnetismus, ale nikoli feromagnetismus.

3. **Feromagnetismus** je vlastnost např. železa, niklu a několika málo dalších prvků (a jejich sloučenin a slitin). Některé elektrony v těchto materiálech seřadí souhlasně své výsledné magnetické dipólové momenty a vytvoří oblasti (domény) se silnými výslednými magnetickými dipólovými momenty. Vnější magnetické pole může pak seřadit magnetické momenty těchto oblastí a vytvořit tak silné magnetické pole látky jako celku. Toto pole se částečně udrží, i když je vnější pole odstraněno. Termín *feromagnetická látka* (a zpravidla jen *magnetická látka*) se obvykle užívá jen pro materiály, které vykazují převážně feromagnetismus.

Následující tři články zkoumají uvedené tři druhy magnetismu blíže.

32.6 DIAMAGNETISMUS

Třebaže magnetické vlastnosti látek lze vyčerpávajícím způsobem vyložit jen kvantově, můžeme diamagnetismus přiblížit i klasicky, použijeme-li smyčkový model z čl. 32.4. Protože nám jde jen o hlavní ideu, použijeme model co nejjednodušší: zvolíme osu z v očekávaném směru vnějšího magnetického pole \mathbf{B}_{ext} a v atomu látky se budeme zabývat jen elektrony obíhajícími kolem jádra jedním (obr. 32.9b) či druhým (obr. 32.9d) směrem po kružnicích ležících v rovinách kolmých k ose z . Budeme také předpokládat, že počet elektronů obíhajících jedním i druhým směrem je stejný, takže výsledný magnetický dipólový moment celého atomu je roven nule (spin jádra lze pro náš účel zanedbat).

Přiložme na uvažovanou látku vnější magnetické pole tak, že je zesílíme z nuly až do jisté (koncové) hodnoty; při tom se magnetický indukční tok tohoto pole plochami ohraničenými proudovými smyčkami mění. Na elektron tedy působí tři síly: Coulombova síla, kterou je elektron vázán k jádru, Lorentzova síla, kterou na elektron působí přiložené magnetické pole, a síla od indukovaného elektrického pole vyvolaného změnou indukčního magnetického toku proudovou smyčkou. Zatímco první dvě síly udržují elektron na kruhové dráze, třetí síla zvyšuje nebo snižuje velikost jeho rychlosti; všimněme si této síly blíže. Změna indukčního toku během zesilování přiloženého magnetického pole vyvolá (podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce) elektrické pole, jehož intenzita má směr tečny k proudové smyčce. Toto indukované elektrické pole urychluje elektrony na obr. 32.9b obíhající proti směru otáčení hodinových ručiček a zpomaluje elektrony obíhající na

obr. 32.9d v opačném směru. Velikost magnetického dipólového momentu smyčky na obr. 32.9b tedy roste a smyčky na obr. 32.9d tedy klesá. Výsledný dipólový magnetický moment atomu vloženého do magnetického pole bude tedy nenulový a bude mířit *proti směru* vnějšího magnetického pole. (To, že indukovaný magnetický moment míří proti směru přiloženého magnetického pole, můžeme kvalitativně pochopit jako důsledek Lenzova zákona.) Zdůrazňme, že indukovaný magnetický dipólový moment získaný během změny vnějšího magnetického pole pak trvá, a to po celou dobu, kdy se látka v magnetickém poli nachází.

Je-li vnější pole \mathbf{B}_{ext} homogenní, nepůsobí na vzorek diamagnetika žádná výsledná síla. Je-li však \mathbf{B}_{ext} nehomogenní, pak odvodíme stejně jako v čl. 32.4, že vzorek je „vyláčován z pole ven“:

Je-li diamagnetická látka umístěna do vnějšího magnetického pole, vyvolá se v ní magnetický dipólový moment směřující proti tomuto poli. Pokud vnější pole není homogenní, je diamagnetická látka vyláčována „z pole ven“, tj. z oblasti s větší magnetickou indukcí do oblasti s menší indukcí.

KONTROLA 3: Na obrázku jsou dvě diamagnetické kuličky, umístěné v blízkosti jižního pólu tyčového magnetu. Jsou (a) magnetické síly působící na kuličky a (b) magnetické dipólové momenty kuliček orientovány směrem k tyčovému magnetu, nebo od něho? (c) Je magnetická síla na kuličku 1 větší, menší, nebo stejná jako síla působící na kuličku 2?



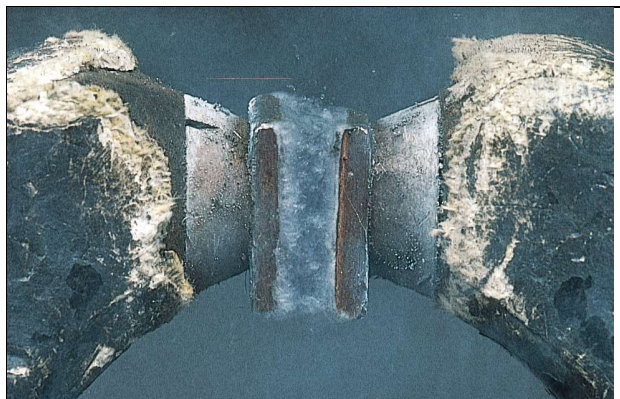
32.7 PARAMAGNETISMUS

V paramagnetických látkách se spinové a orbitální magnetické momenty elektronů v každém atomu při vektorovém skládání nevyruší, takže atomu zbude jistý výsledný (a trvalý) magnetický dipólový moment μ . Za nepřítomnosti vnějšího pole jsou jednotlivé atomové magnetické momenty náhodně orientovány a výsledný moment je tedy nulový. Jestliže však vzorek látky vložíme do vnějšího magnetického pole \mathbf{B}_{ext} , snaží se magnetické dipólové momenty orientovat ve směru pole, takže vzorek získá výsledný nenulový magnetický moment. Jeho orientace je opačná, než se kterou jsme se setkali při diamagnetismu.

Je-li paramagnetická látka umístěna do vnějšího magnetického pole \mathbf{B}_{ext} , vytvoří se v ní magnetický dipólový moment ve směru tohoto pole. Není-li vnější magnetické pole homogenní, je paramagnetický materiál vtahován „do pole“, tj. z oblasti s menší magnetickou indukcí do oblasti s větší indukcí.

V případě, že by všechny atomové magnetické dipóly μ byly souhlasně seřazeny, měl by paramagnetický vzorek s N atomy mít magnetický dipólový moment o velikosti $N\mu$. Náhodné srážky atomů v důsledku neuspořádaného tepelného pohybu atomů však narušují jejich seřazení a zmenšují velikost výsledného magnetického dipólového momentu vzorku.

Vliv tepelného pohybu lze posoudit porovnáním dvou energií. První je (viz rov. (20.20)) střední kinetická energie posuvného pohybu $E_k = \frac{3}{2}kT$ atomů při teplotě T ; $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ je Boltzmannova konstanta. Druhá je (viz rov. (29.37)) rozdíl energie $\Delta E_p = 2\mu B_{\text{ext}}$ mezi souhlasnou a nesouhlasnou orientací magnetického dipólového momentu atomu vzhledem k vnějšímu magnetickému poli. Jak ukážeme níže, při obvyklých teplotách a velikostech magnetické indukce je $E_k \gg \Delta E_p$. Proto se uspořádání atomových dipólových momentů snadno naruší srážkami mezi atomy. To vede ke zmenšení magnetického momentu vzorku na hodnotu mnohem menší, než je maximální možná hodnota $N\mu$.



Kapalný kyslík se vznáší mezi dvěma čely magnetu, neboť je paramagnetický a je do magnetického pole vtahován.

Míru zmagnetování látky můžeme vyjádřit vektorem **magnetizace** \mathbf{M} . Ten udává magnetický dipólový moment jednotkového objemu látky:

$$\mathbf{M} = \frac{\text{magnetický moment}}{\text{objem}}. \quad (32.18)$$

Jednotkou \mathbf{M} je $\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$. Úplné seřazení atomárních dipólo-

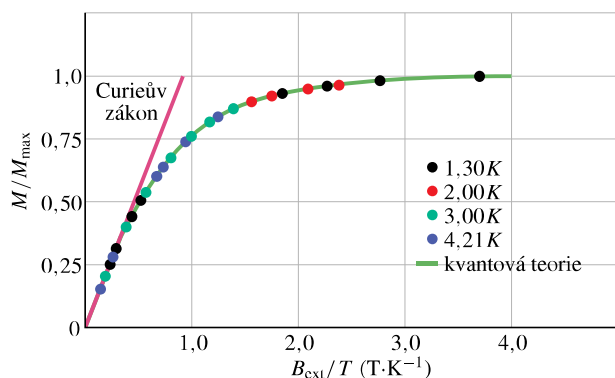
vých momentů, nazývané *saturace* vzorku, odpovídá maximální hodnotě $M_{\max} = N\mu/V$.

Pierre Curie v r. 1895 objevil experimentálně, že magnetizace paramagnetické látky je přímo úměrná indukci B_{ext} vnějšího magnetického pole a nepřímo úměrná absolutní teplotě T , tj.

$$M = C \frac{B_{\text{ext}}}{T} \quad (\text{Curieův zákon}). \quad (32.19)$$

Rov. (32.19) se nazývá *Curieův zákon* a C je *Curieova konstanta*. Curieův zákon vyjadřuje to, co intuitivně chápeme: při zvětšení B_{ext} se seřadí atomové dipólové momenty, a tedy M se zvětší, zatímco při zvýšení T se poruší seřazení v důsledku tepelného pohybu, a tedy M se zmenší. Tento zákon je pouze přiblížením a platí jen pro slabá pole a vyšší teploty. Uvedený vztah byl později odvozen teoreticky (viz též úlohu 27).

Obr. 32.10 ukazuje magnetizační křivku, tj. poměr M/M_{\max} jako funkci B_{ext}/T pro síran chromito-draselný, ve kterém jsou ionty chromu paramagnetickou substancí. Lineární závislost podle Curieova zákona souhlasí s experimentálními daty v levé části grafu cca pro $B_{\text{ext}}/T < 0,5 \text{ T}\cdot\text{K}^{-1}$. Křivka, která odpovídá naměřeným hodnotám v celém rozsahu, odpovídá výkladu na základě kvantové fyziky. Hodnoty v pravé části grafu poblíž nasycení se získávají velmi obtížně, neboť vyžadují velmi silná magnetická pole (asi 100 000krát silnější než zemské pole), a to i za velmi nízkých teplot vyznačených v obr. 32.10.



Obr. 32.10 Magnetizační křivka pro paramagnetickou látku (síran chromito-draselný). Poměr magnetizace M látky k maximální magnetizaci M_{\max} je zobrazen jako funkce podílu magnetické indukce B_{ext} a teploty T . Curieův zákon souhlasí s hodnotami v levé části grafu; kvantová teorie uspokojivě vysvětluje hodnoty v celém intervalu. Podle W. E. Henryho.

PŘÍKLAD 32.2

Paramagnetický plyn při pokojové teplotě 300 K se nachází ve vnějším homogenním magnetickém poli s $B = 1,5 \text{ T}$.

Atomy plynu mají magnetický dipólový moment velikosti $\mu = 1,0\mu_B$. Vypočítejte střední kinetickou energii posuvného pohybu E_k atomu plynu a rozdíl energie ΔE_p mezi souhlasnou a nesouhlasnou orientací magnetického dipólového momentu atomu vzhledem k vnějšímu poli.

ŘEŠENÍ: Z rov. (20.20) vypočteme

$$E_k = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1})(300 \text{ K}) = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,039 \text{ eV}. \quad (\text{Odpověď})$$

Z rov. (29.37) a (32.5) dostaneme

$$\Delta E_p = 2\mu B = 2(9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1})(1,5 \text{ T}) = 2,8 \cdot 10^{-23} \text{ J} = 0,00017 \text{ eV}. \quad (\text{Odpověď})$$

Energie E_k je asi 230krát větší než ΔE_p , takže výměnou energie mezi atomy během vzájemných srážek se snadno mění směr magnetických momentů, které by jinak byly orientovány ve směru vnějšího magnetického pole. Magnetický moment vykazovaný plynem je pak slabým uspořádáním atomových momentů.

KONTROLA 4: Na obrázku jsou dvě paramagnetické kuličky, umístěné v blízkosti jižního pólu tyčového magnetu. Jsou (a) magnetické síly působící na kuličky a (b) magnetické momenty kuliček orientovány směrem k magnetu, nebo od něj? (c) Je magnetická síla na kuličku (1) větší, menší, nebo stejná jako síla působící na kuličku (2)?



32.8 FEROMAGNETISMUS

Když mluvíme o magnetismu v běžném významu tohoto slova, máme spíše na mysli představu tyčového nebo malého knoflíkového magnetu (přidržíčímho např. vzkaz na chladničce). Představujeme si tedy feromagnetický materiál se silným permanentním magnetismem, a ne diamagnetickou nebo paramagnetickou látku se slabými a dočasnými magnetickými vlastnostmi.

Železo, kobalt, nikl, gadolinium, dysprozium a slitiny těchto i některých jiných (i neferomagnetických) prvků vykazují feromagnetismus v důsledku čistě kvantového jevu, nazývaného *výměnná interakce*. Při tomto procesu se spiny elektronů jednoho atomu vzájemně ovlivňují se spiny sousedních atomů. Výsledkem je souhlasná orientace magnetických momentů atomů, která překonává rušivý vliv náhodných vzájemných srážek.

Pokud zvýšíme teplotu feromagnetického materiálu nad jistou kritickou hodnotu nazývanou *Curieova teplota*, výměnná interakce již k uspořádání momentů nepostačí a materiál se stane paramagnetickým. Dipóly sice stále jeví snahu seřadit se podle vnějšího pole, ale mnohem slaběji. Tepelný pohyb pak může snáze porušit jejich uspořádání. Curieova teplota pro železo je $1\,043\text{ K} \doteq 770\text{ }^\circ\text{C}$.

Magnetizaci feromagnetických materiálů (jako je železo) můžeme studovat v uspořádání nazývaném *Rowlandův prstenc* (obr. 32.11). Měřený materiál má tvar tenkého prstencového jádra kruhového průřezu. Primární cívka P s n závitů na jednotku délky je rovnoměrně navinuta po obvodu prstence a prochází jí proud I_P . Bez železného jádra by magnetická indukce pole uvnitř cívky měla podle rov. (30.25) velikost

$$B_0 = \mu_0 n I_P. \quad (32.20)$$

Je-li v cívce železné jádro, je velikost magnetické indukce B uvnitř cívky obvykle mnohonásobně větší než B_0 . Můžeme ji zapsat jako součet

$$B = B_0 + B_M, \quad (32.21)$$

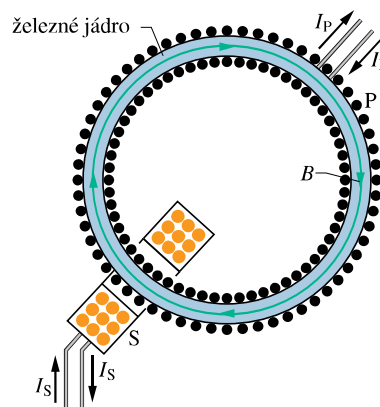
kde B_M je příspěvek k magnetickému poli od železného jádra. Tento příspěvek je způsoben souhlasným uspořádáním atomových dipólových momentů v železe díky výměnné interakci a vlivem magnetického pole B_0 .

Abychom stanovili B_M , je nutné znát B_0 a B ; B_0 vypočteme z rov. (32.20) a B změříme takto: Proud primární cívky P prudce zvýšíme z nuly na hodnotu I_P . Během tohoto děje se mění B a magnetický indukční tok v jádru toroidu tvořeném měřeným materiálem. Indukované emn v sekundární cívce S vyvolá krátký proudový pulz $I_S(t)$, který projde balistickým galvanometrem* (na obr. 32.11 není zakreslen). Balistickým galvanometrem změříme celkový náboj, který jím projde a který je (jak se dá vypočítat) úměrný nárůstu velikosti magnetické indukce v měřeném materiálu, tedy hledané hodnotě B .

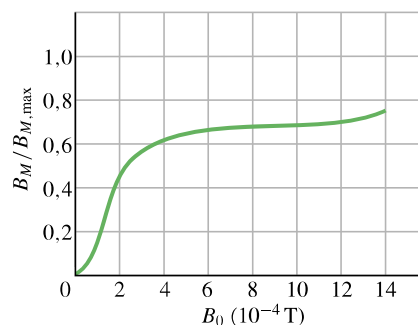
Obr. 32.12 ukazuje magnetizační křivku pro feromagnetický materiál v Rowlandově prstenci, tj. závislost podílu $B_M/B_{M,\max}$ na B_0 ($B_{M,\max}$ je nejvyšší možná hodnota B_M odpovídající saturaci). Křivka je podobná závislosti v obr. 32.10, tj. magnetizační křivce pro paramagnetickou látku. Obě křivky ukazují, jak dalece je pole B_0 úspěšné při tomto uspořádání.

Pro feromagnetické jádro z obr. 32.12 jsou dipóly seřazeny na 70 % pro $B_0 \doteq 1 \cdot 10^{-3}\text{ T}$. Pokud bychom B_0 zvýšili na 1 T, uspořádání by bylo téměř úplné (dosáhnout hodnoty $B_0 = 1\text{ T}$ je však velmi obtížné).

* Nyní se k sekundární cívce S připojuje místo klasického galvanometru elektronický integrátor napětí, který přímo udává hodnotu B .



Obr. 32.11 Rowlandův prstenc; užívá se k měření B ve feromagnetických materiálech.

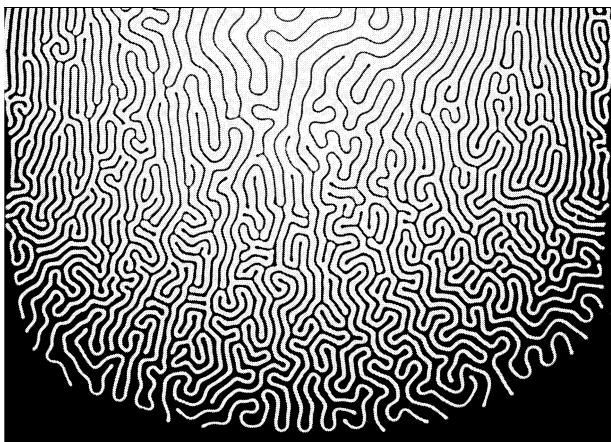


Obr. 32.12 Magnetizační křivka pro feromagnetické jádro v Rowlandově prstenci z obr. 32.11. Hodnota 1,0 na svislé ose odpovídá úplnému seřazení (saturaci) atomárních dipólů v materiálu.

Magnetické domény

Výměnná interakce vytváří při teplotě pod Curieovým bodem výrazné uspořádání sousedních atomárních dipólů ve feromagnetických materiálech. Proč tedy není materiál přirozeně saturován v případě, kdy není použito žádné vnější magnetické pole B_0 ? Proč není každý kus železa, jako je např. hřebík, sám od sebe silným magnetem?

K pochopení tohoto jevu uvažujme monokrystalický vzorek feromagnetického materiálu, jako je např. železo. V monokrystalech jsou atomy, ze kterých je vzorek sestaven, zcela pravidelně uspořádány v celém objemu vzorku. I takový krystal se však bude v normálním stavu skládat z určitého počtu *magnetických domén*. Domény jsou oblasti krystalu, ve kterých jsou atomové dipóly úplně seřazeny. V krystalu jako celku jsou však jednotlivé domény orientovány celkem náhodně, takže pole domén se navzájem navenek z velké části ruší.

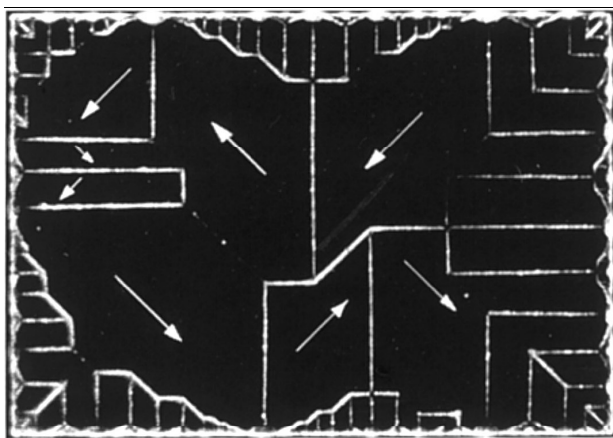


Neprůhledná magnetická tekutina (suspenze jemného prášku magnetitu v petroleji) a průhledná nemagnetická tekutina jsou nalaty do tenké skleněné kyvety. Když je kyveta ve svislé poloze, magnetická tekutina (v obrázku černě), která má větší hustotu, klesne ke dnu kyvety. Přiložíme-li nyní magnetické pole kolmo ke stěně kyvety, magnetická kapalina se vymršťí hadovitě směrem do nemagnetické kapaliny a vytvoří půvabné bludiště.

Obr. 32.13 představuje zvětšenou fotografii uspořádání domén v monokrystalu niklu. Zviditelnění bylo dosaženo postříkáním povrchu krystalu koloidní suspenzí jemného železného prachu. Na hranici domén, tedy tam, kde se mění orientace elementárních dipólů, je silné, ostře lokalizované a nehomogenní magnetické pole. Suspendované koloidní částice jsou přitahovány k těmto hranicím a jsou vidět jako bílé čáry. Ačkoli jsou atomární dipóly v každé oblasti zcela seřazeny v jednom směru (jak ukazují šipky), má krystal jako celek navenek velmi malý výsledný magnetický moment.

Obyčejný kus železa, se kterým se obvykle setkáme, není monokrystal, ale seskupení mnoha maličkých krystalků, které jsou náhodně uspořádané. Takové těleso nazýváme polykrystalické. Každý malý krystal však má své vlastní pole různě orientovaných magnetických domén stejně jako na obr. 32.13. Pokud magnetizujeme takový vzorek postupně narůstajícím magnetickým polem, vyvoláme dva procesy, které spolu určují průběh magnetizační křivky podle obr. 32.12: jednak se zvětšují ty domény, které jsou orientovány ve směru vnějšího pole na úkor ostatních, jednak se v rámci jedné domény přeorientují všechny dipóly jako celek do směru bližšího směru vnějšího pole.

Ve feromagnetickém materiálu se vytvoří vnějším magnetickým polem výrazný magnetický dipólový moment ve směru \mathbf{B}_{ext} . Pokud je pole nehomogenní, feromagnetický materiál je vtahován „do pole“, tj. z oblasti s menší magnetickou indukcí směrem do oblasti s větší indukcí.



Obr. 32.13 Fotografie obrazce domén v monokrystalu niklu; bílé čáry ukazují hranice domén. Bílé šipky (dokreslené na fotografii dodatečně) ukazují orientace magnetických dipólů uvnitř oblastí, a tedy orientace výsledných magnetických dipólů domén. Krystal jako celek je nemagnetický, pokud výsledné magnetické pole (vyjádřené vektorovým součtem přes všechny domény) je nulové.

Posun domén můžeme dokonce slyšet. Postačí, když přepneme kazetový přehrávač bez kazety do módu přehrávání, nastavíme hlasitost na maximum a potom přiložíme silný magnet k přehrávací hlavě; ta je feromagnetická. Pole magnetu způsobí, že se domény v přehrávací hlavě přeorientovávají, čímž se mění magnetické pole v cívice, která je na hlavě navinutá. Výsledné napětí indukované onou změnou pole se pak zesiluje a přivádí na reproduktor, ze kterého slyšíme praskavé zvuky.

Magnetismus dávných pecí

Jíl ve stěnách a na dně dávných pecí se chová podobně jako železo, neboť obsahuje oxidy železa — magnetit a hematit. V jednom zrnku magnetitu je mnoho velmi malých domén velikosti okolo $3 \cdot 10^{-7}$ m. Naproti tomu každé zrnko hematitu tvoří jedinou doménu velikosti až 1 mm. Když je jíl zahřát na teplotu několika set stupňů Celsia (a to je v pecích běžné), změní se domény v zrnkách obou typů. V magnetitu se doménové stěny posunou tak, že se zvětší ty domény, které jsou více orientované ve směru zemského magnetického pole, zatímco domény orientované v jiných směrech se zmenší. V hematitu se domény pootočí tak, aby byly více orientovány ve směru magnetického pole Země. Oba procesy pak vedou k tomu, že jíl má magnetické pole, které je rovnoběžné s polem Země. Když pec po použití vychladne, zůstane uspořádání domén, a tím i magnetické pole v jílu zachováno. Tento jev nazýváme *termoremanentní magnetismus* (TRM).

K určení směru magnetického pole Země v daném místě v době posledního vyhřátí a zchlazení pece vymezí archeolog malý vzorek dna pece, pečlivě změří jeho orientaci vůči vodorovné rovině a zeměpisnému severu a vyjme ho ze dna pece. Pak určí směr magnetického pole samotného vzorku, neovlivněného stávajícím magnetickým polem Země. Tím určí směr magnetického pole Země v době, kdy byla pec naposledy použita. Je-li známo stáří pece, např. radiouhlíkovou metodou, je tím určeno, kdy mělo pole zjištěný směr.

PŘÍKLAD 32.3

Střelka kompasu z čistého železa (o hustotě $7\,900\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) má délku $L = 3,0\text{ cm}$, šířku $1,0\text{ mm}$ a tloušťku $0,5\text{ mm}$. Velikost dipólového momentu spojeného s atomem železa je $\mu_{\text{Fe}} = 2,1\cdot 10^{-23}\text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$.

(a) Kdyby mělo 10 % atomů ve střelce orientováno svůj magnetický moment ve směru pole, jaký by byl její dipólový moment μ ?

ŘEŠENÍ: Seřazení všech N atomů ve střelce by vyvolalo magnetický dipólový moment $N\mu_{\text{Fe}}$. Pro 10 % seřazených atomů dostaneme

$$\mu = 0,10N\mu_{\text{Fe}}. \quad (32.22)$$

Počet atomů ve střelce je

$$N = \frac{\text{hmotnost střelky}}{\text{hmotnost atomu železa}}. \quad (32.23)$$

Hmotnost střelky m je součinem její hustoty $7\,900\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a jejího objemu $1,50\cdot 10^{-8}\text{ m}^3$, tedy $1,185\cdot 10^{-4}\text{ kg}$. Hmotnost atomu železa je poměr molární hmotnosti železa $m_m = 55,847\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ (dodatek F) a Avogadrovy konstanty $N_A = 6,02\cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1}$. Dosazením rov. (32.23) do rov. (32.22) a použitím výše uvedených veličin a číselných údajů nalezneme

$$\begin{aligned} \mu &= 0,10 \left(\frac{mN_A}{m_m} \mu_{\text{Fe}} \right) = \\ &= 0,10 \frac{(1,185\cdot 10^{-4}\text{ kg})(6,02\cdot 10^{23}\text{ mol}^{-1})}{(55,847\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1})(10^{-3}\text{ kg/g})} \cdot \\ &\quad \cdot (2,1\cdot 10^{-23}\text{ J}\cdot\text{T}^{-1}) = \\ &= 2,682\cdot 10^{-3}\text{ J}\cdot\text{T}^{-1} \doteq 2,7\cdot 10^{-3}\text{ J}\cdot\text{T}^{-1}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(b) Pokud střelku kompasu lehce vychýlíme z její (vodorovné) severojižní rovnovážné polohy, kmitá kolem ní. Jaká je vodorovná složka indukce zemského magnetického pole, je-li perioda těchto kmitů $2,2\text{ s}$?

ŘEŠENÍ: Dipólový moment μ střelky směřuje od jejího jižního pólu k severnímu. Když střelku pootočíme z rovnovážné polohy o úhel θ , pootočí se tím i μ . Zemské magnetické pole

pak vyvolá silový moment M vzhledem k ose otáčení, který vrací střelku zpět, aby byl směr μ (a střelka) znovu rovnoběžný s vodorovnou složkou pole. (Připomeňme, že střelka je volně otáčivá pouze ve vodorovné rovině, takže uvažujeme pouze složku B_h .) Podle rov. (29.34) je

$$M = -\mu B_h \sin \theta, \quad (32.24)$$

kde znaménko minus ukazuje, že M má opačnou orientaci než θ . Protože je úhlová výchylka velmi malá, můžeme psát $\sin \theta \approx \theta$, takže

$$M = -\mu B_h \theta. \quad (32.25)$$

Protože μ a B_h jsou konstanty, je moment síly, vracející střelku do její ustálené polohy, úměrný záporně vzaté úhlové výchylce. Tento vztah je charakteristický pro harmonický pohyb, jak jsme viděli v čl. 16.5. Z rovnic (16.24) a (16.25) plyne pro periodu kmitů

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu B_h}},$$

odkud

$$B_h = \frac{J}{\mu} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2, \quad (32.26)$$

kde J je moment setrvačnosti střelky vzhledem k ose jejího otáčení. Považujeme-li střelku za homogenní tenkou tyč a použijeme-li tab. 11.2e, dostaneme

$$\begin{aligned} J &= \frac{mL^2}{12} = \frac{(1,185\cdot 10^{-4}\text{ kg})(0,030\text{ m})^2}{12} = \\ &= 8,888\cdot 10^{-9}\text{ kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

Dosazením za J , T a μ do rov. (32.26) obdržíme výsledek

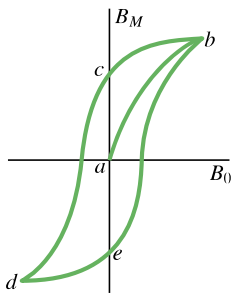
$$\begin{aligned} B_h &= \frac{(8,888\cdot 10^{-9}\text{ kg}\cdot\text{m}^2)}{(2,682\cdot 10^{-3}\text{ J}\cdot\text{T}^{-1})} \left(\frac{2\pi}{2,2\text{ s}} \right)^2 = \\ &= 2,7\cdot 10^{-5}\text{ T}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

To je přibližně stejná hodnota, kterou jsme použili v př. 32.1 pro Tucson. Vidíme, že dokonce i s levným kompasem můžeme měřit místní magnetické pole (vodorovnou složku magnetické indukce) změřením doby kmitu střelky po jejím malém vychýlení.

Hystereze

Magnetizační křivky feromagnetických materiálů nemají stejný průběh v procesu zesilování a v procesu zeslabování vnějšího magnetického pole B_0 . Obr. 32.14 znázorňuje závislost B_M na B_0 během následujícího postupu magnetizace Rowlandova prstence: (1) Začneme s nezmagnetovaným železem (bod a) a zvyšujeme proud v toroidu, až

$B_0 = \mu_0 n I$ má hodnotu odpovídající bodu b . (2) Snižujeme proud ve vinutí toroidu zpět k nule (bod c). (3) Obrátíme směr proudu a zvyšujeme jeho velikost, až B_0 má hodnotu odpovídající bodu d . (4) Proud znovu snižujeme až na nulovou hodnotu (bod e). (5) Změníme směr proudu na původní, až znovu dosáhneme bodu b .



Obr. 32.14 Magnetizační křivka (ab) pro feromagnetický vzorek a příslušná hysterezní smyčka ($bcdeb$).

Nejednoznačná závislost B_M na B_0 podle obr. 32.14, tedy to, že B_M závisí nejen na hodnotě B_0 , ale i na tom, jakou cestou k magnetizaci došlo, se nazývá **hystereze** a křivka $bcdeb$ se nazývá magnetická *hysterezní smyčka*. Poznamenejme, že v bodech c a e je železné jádro zmagnetováno, i když je proud ve vinutí nulový. To je dobře známý jev, nazývaný *permanentní magnetismus*.

Hysterezi můžeme vyložit pomocí magnetických domén. Pohyby hranic domén a změna orientace jejich směru nejsou zřejmě děje zcela vratné. Jestliže vnější magnetické pole B_0 zesílíme a poté zeslabíme na původní hodnotu, nevrátí se domény zcela do původního stavu, ale částečně si „zapamatují“ směr, do něhož byly natočeny předchozí změnou. Tato paměť magnetických materiálů je zásadní pro magnetické uchování informace např. na magnetických páskách kazet nebo na discích počítačů.

Paměť daná seřazením domén se může vyskytovat i v přírodě. Když udeří blesk, tekou elektrické proudy mnohočetnými křivolakými cestami v zemi a vytvoří silné magnetické pole, které může zmagnetovat jakýkoli feromagnetický materiál v blízké skále. Takový materiál zachová v důsledku hystereze jistou magnetizaci i po úderu blesku, tj. poté, co proud zmizí. Kusy skály, později vystavené vlivu počasí, se rozpadají na přírodní magnetovec, o kterém jsme hovořili v úvodu této kapitoly.

32.9 INDUKOVANÉ MAGNETICKÉ POLE

Dosud jsme viděli, že magnetické pole lze vytvořit elektrickým proudem (viz kap. 30) nebo magnetickými materiály.

Existuje i třetí způsob, jak je vytvořit — magnetoelektrickou indukci.

V kap. 31 jsme viděli, že časová změna toku magnetické indukce vytváří elektrické pole, což vyjadřuje Faradayův zákon elektromagnetické indukce (rov. (31.22)):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (\text{Faradayův zákon elektromagnetické indukce}). \quad (32.27)$$

Zde \mathbf{E} je intenzita elektrického pole indukovaného podél orientované uzavřené křivky časovou změnou toku Φ_B magnetické indukce plochou, která je touto křivkou ohraničena. Protože se ve fyzice často uplatňuje princip symetrie, pokusíme se zjistit, zda se uvedený jev indukce nevyskytuje také obráceně. Jinými slovy: může změna toku elektrické intenzity (elektrického toku) indukovat pole magnetické?

Odpověď je kladná; navíc rovnice, která popisuje indukovaní magnetického pole (jev **magnetoelektrické indukce**), má téměř stejnou strukturu jako rov. (32.27):

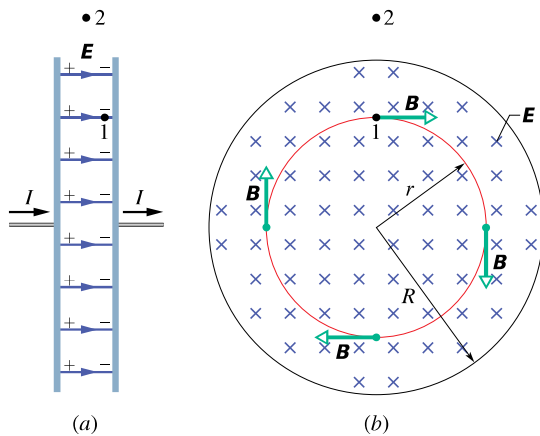
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{Maxwellův zákon magnetoelektrické indukce}). \quad (32.28)$$

kroužek na integrálu opět ukazuje, že se integruje po uzavřené křivce. Její orientace je svázána s orientací vektoru $d\mathbf{S}$ v plošném integrálu vyjadřujícím elektrický tok Φ_E pravidlem pravé ruky stejně jako u Faradayova zákona.

Jako příklad tohoto typu indukce uvažujme nabíjení kondenzátoru s rovnoběžnými kruhovými elektrodami podle obr. 32.15a. (I když se dále soustředíme na toto konkrétní uspořádání, zdůrazněme, že časově proměnný elektrický tok indukuje magnetické pole vždy.) Předpokládejme, že náboj na kondenzátoru narůstá rovnoměrně s časem tím, že přitéká konstantní proud přírodními vodiči. Potom i velikost intenzity elektrického pole mezi deskami rovnoměrně narůstá s časem.

Na obr. 32.15b je pohled na pravou elektrodu z prostoru mezi deskami. Elektrické pole \mathbf{E} směřuje od nás. Uvažujme kružnici procházející bodem 1 v obr. 32.15 soustřednou s kruhovými elektrodami kondenzátoru a s poloměrem menším než poloměr desek. Protože elektrické pole v prostoru mezi elektrodami se s časem mění, mění se s časem i elektrický tok Φ_E . Podle rov. (32.28) tento proměnný elektrický tok indukuje magnetické pole podél uzavřené křivky — kružnice.

Experiment potvrzuje, že se magnetické pole podél této kružnice *skutečně* indukuje a jeho indukce \mathbf{B} má směr vyznačený na obrázku. Ta má konstantní velikost v každém bodě kružnice, a proto má toto magnetické pole válcovou symetrii vůči středové ose desek kondenzátoru.



Obr. 32.15 (a) Kondenzátor s rovnoběžnými kruhovými elektrodami, nakreslený v bočním pohledu, je nabíjen konstantním proudem I . (b) Pohled z prostoru mezi deskami směrem k pravé desce. Elektrické pole \mathbf{E} je homogenní a směřuje kolmo do nákresny (směrem k desce), velikost \mathbf{E} roste spolu s narůstajícím nábojem na kondenzátoru. Magnetické pole \mathbf{B} , indukované tímto proměnným elektrickým polem, je naznačeno ve čtyřech bodech na kružnici s poloměrem r menším, než je poloměr elektrod R .

Pokud nyní uvažujeme větší kružnici, procházející např. bodem 2 mimo desky, shledáme, že podél této kružnice se také indukuje magnetické pole. Můžeme říci, že mění-li se elektrické pole v čase, indukuje se magnetické pole jak mezi elektrodami, tak i vně. Když se elektrické pole přestane měnit v čase, zmizí i indukované magnetické pole.

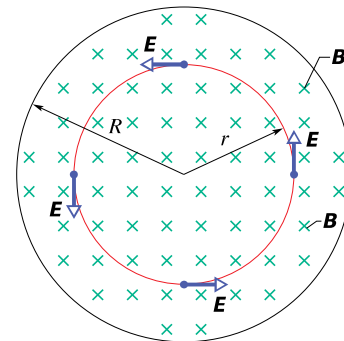
Ačkoli jsou si rov. (32.28) a (32.27) podobné, liší se od sebe dvojnásob: (1) Rov. (32.28) obsahuje dva symboly navíc, μ_0 a ε_0 , ale ty jsou důsledkem volby jednotek v SI. (2) Rov. (32.28) nemá znaménko minus, které je v rov. (32.27). Tento rozdíl ve znaménkách znamená, že intenzita \mathbf{E} indukovaného elektrického pole a indukce \mathbf{B} indukovaného magnetického pole mají opačné směry, jsou-li vytvořena stejnými změnami svých budících polí.

Abychom viděli tento rozdíl ve směrech indukovaných polí, sledujme obrázek 32.16, na kterém rostoucí magnetické pole \mathbf{B} směřující od nás indukuje elektrické pole \mathbf{E} . Jeho intenzita \mathbf{E} má směr proti otáčení hodinových ručiček, zatímco indukce \mathbf{B} magnetického pole (indukovaného na obr. 32.15b narůstajícím elektrickým polem \mathbf{E} směřujícím od nás) má směr opačný.

Připomeňme nyní, že levá strana rov. (32.28), tj. cirkulace vektoru \mathbf{B} , se vyskytuje i v jiné rovnici, a to v Ampérově zákonu (30.16):

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_c \quad (\text{Ampérov zákon}), \quad (32.29)$$

kde I_c je proud obepnutý uzavřenou orientovanou křiv-



Obr. 32.16 Homogenní magnetické pole \mathbf{B} v kruhové oblasti. Pole směřuje kolmo do nákresny a jeho velikost rovnoměrně narůstá s časem. Elektrické pole \mathbf{E} , indukované změnou magnetického pole, je naznačeno ve čtyřech bodech na kružnici sousoší s kruhovými deskami. Porovnejte tento stav s obr. 32.15b.

kou (Ampérovou křivkou). Obě rovnice (32.28) a (32.29), které určují magnetické pole \mathbf{B} pocházející od elektrického proudu a od proměnného elektrického pole, můžeme spojit v rovnici jedinou:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + I_c \quad (\text{Ampérov-Maxwellův zákon}). \quad (32.30)$$

Je-li proud I_c nenulový a elektrický tok se nemění v čase (jako v případě vodiče, kterým protéká stejnosměrný proud), je první člen na pravé straně rov. (32.30) nulový a rov. (32.30) se redukuje na rov. (32.29) — Ampérov zákon. Pokud se s časem mění elektrický tok při nulovém proudu (tak jako uvnitř nebo vně elektrod kondenzátoru), je druhý člen na pravé straně rov. (32.30) nulový a rov. (32.30) se redukuje na rov. (32.28) vyjadřující magnetoelektrickou indukci.

PŘÍKLAD 32.4

Nabíjíme kondenzátor s rovnoběžnými kruhovými elektrodami o poloměru R , obr. 32.15a.

(a) Jaké magnetické pole se indukuje v bodech ve vzdálenosti r od osy elektrod pro $r \leq R$?

ŘEŠENÍ: Mezi elektrodami neprotéká proud, proto v rovnici (32.30) je $I_c = 0$ a zůstane

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (32.31)$$

Pro kružnici o poloměru $r \leq R$ orientovanou ve směru otáčení hodinových ručiček je levá strana rov. (32.31) rovna $(B)(2\pi r)$. Elektrický tok Φ_E plochou ohraničenou touto kružnicí (tj. kruhem orientovaným podle pravidla pravé ruky v souladu s orientací kružnice a majícím obsah S) je

$ES \cos 0^\circ = \pi r^2 E$, kde E je velikost intenzity elektrického pole mezi elektrodami. Rov. (32.31) dává

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (\pi r^2 E) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt}.$$

Odtud plyne

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 r}{2} \frac{dE}{dt} \quad (\text{pro } r \leq R). \quad (\text{Odpověď})$$

Vidíme, že $B = 0$ ve středu kondenzátoru, kde $r = 0$, a že B lineárně roste s r směrem k okraji kruhové elektrody.

(b) Vypočítejte velikost magnetické indukce B pro $r = R/5 = 11,0 \text{ mm}$, je-li $dE/dt = 1,50 \cdot 10^{12} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

ŘEŠENÍ: Z odpovědi na (a) víme, že

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} \mu_0 \varepsilon_0 r \frac{dE}{dt} = \\ &= \frac{1}{2} \left(4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} \right) \left(8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \right) \cdot \\ &\quad \cdot (11,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}) \left(1,50 \cdot 10^{12} \frac{\text{V}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right) = \\ &= 9,18 \cdot 10^{-8} \text{ T}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

(c) Odvoďte magnetickou indukci pro případ $r \geq R$.

ŘEŠENÍ: Vně elektrody o poloměru R je elektrické pole nulové, takže elektrický tok kruhem o poloměru $r \geq R$ je nenulový pouze v oblasti o obsahu πR^2 a je roven $\Phi_E = \pi R^2 E$. Pak rov. (32.31) dává

$$(B)(2\pi r) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (\pi R^2 E) = \mu_0 \varepsilon_0 \pi R^2 \frac{dE}{dt}.$$

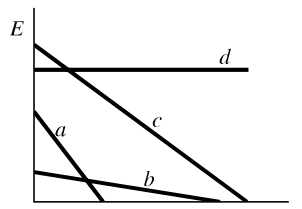
Odtud vypočteme B :

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 R^2}{2r} \frac{dE}{dt} \quad \text{pro } r \geq R. \quad (\text{Odpověď})$$

Poznamenejme, že oba výrazy odvozené pro B dávají, jak jsme očekávali, stejné hodnoty pro $r = R$. Tato hodnota B je maximální.

Hodnota B vypočtená v (b) je tak malá, že je téměř neměřitelná běžnými měřicími přístroji. To je v ostrém kontrastu k indukovanému elektromotorickému napětí (Faradayův zákon), které můžeme zjistit snadno. Tento rozdíl je částečně dán tím, že indukované \mathcal{E} lze snadno znásobit použitím cívky s mnoha závitů. Nemáme však žádný postup srovnatelné jednoduchosti pro znásobení indukovaných magnetických polí. Přesto bylo při velmi pečlivém provedení pokusu magnetické pole indukované nabíjením kondenzátoru spolehlivě naměřeno; výsledek souhlasil s teorií.

elektrická pole v kondenzátoru (obr. 32.15). Seřadte v sestupném pořadí tato elektrická pole podle velikosti B indukovaného magnetického pole v bodě 1 na obr. 32.15b.



32.10 MAXWELLŮV PROUD

Z pravé strany rov. (32.30) vidíme, že její první člen $\varepsilon_0(d\Phi_E/dt)$ musí mít rozměr proudu. Nazýváme jej **Maxwellův proud** I_M :

$$I_M = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (\text{Maxwellův proud}). \quad (32.32)$$

(Dříve se nazýval posuvný proud v souvislosti s tehdejšími představami o světelném éteru a jeho pohybu.) Rov. (32.30) můžeme s užitím rov. (32.32) zapsat ve tvaru

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I_{M,c} + I_c) \quad (\text{Ampérův-Maxwellův zákon}), \quad (32.33)$$

ve kterém $I_{M,c}$ je Maxwellův proud procházející plochou ohraničenou uzavřenou orientovanou křivkou. Zákon Ampérův-Maxwellův nazýváme často **zákon celkového proudu**.

Uvažujme znovu nabíjení kondenzátoru s kruhovými elektrodami podle obr. 32.17a. Proud I , který nabíjí elektrody, mění elektrické pole \mathbf{E} mezi nimi. Maxwellův proud I_M mezi deskami je spojen se změnami pole \mathbf{E} . Porovnejme oba proudy.

V každém okamžiku je náboj Q na elektrodách spojen s velikostí intenzity E mezi nimi rov. (26.4):

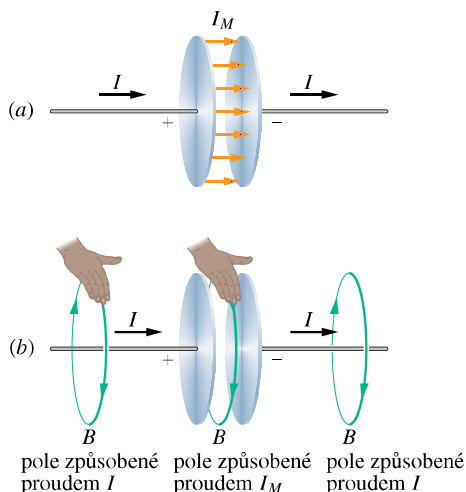
$$Q = \varepsilon_0 S E, \quad (32.34)$$

kde S je obsah elektrody. Abychom dostali proud I , derivujme rov. (32.34) podle času, čímž dostaneme

$$\frac{dQ}{dt} = I = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt}. \quad (32.35)$$

Maxwellův proud I_M získáme z rov. (32.32). Za předpokladu, že elektrické pole \mathbf{E} mezi dvěma deskami je homogenní (zanedbáme-li rozptyl na okraji), můžeme vyjádřit elektrický tok Φ_E v této rovnici součinem ES . Potom

KONTROLA 5: Obrázek znázorňuje závislost velikosti elektrické intenzity E na čase t pro čtyři homogenní



Obr. 32.17 (a) Maxwellův proud I_M mezi deskami kondenzátoru nabíjeného proudem I . (b) Pravidlo pravé ruky pro určení směru magnetického pole okolo vodiče s kondukčním (vodivým) proudem (vlevo) dává stejný směr i pro magnetické pole Maxwellova proudu (uprostřed).

z rov. (32.32) plyne

$$I_M = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d(ES)}{dt} = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt}. \quad (32.36)$$

Porovnáním rov. (32.35) a (32.36) vidíme, že vodivý proud I , který nabíjí kondenzátor, a Maxwellův proud I_M mezi elektrodami mají stejnou velikost:

$$I_M = I \quad (\text{Maxwellův proud v kondenzátoru}). \quad (32.37)$$

Maxwellův proud I_M můžeme proto považovat za pokračování vodivého proudu I z jedné elektrody přes mezeru kondenzátoru k druhé elektrodě. Protože elektrické pole je mezi deskami homogenní, je i Maxwellův proud I_M mezi nimi rozložen rovnoměrně, jak ukazují proudové šipky na obr. 32.17a. Uvažme, že mezi deskami je vakuum, kde není žádný náboj, který by se pohyboval a vytvářel tak jakýkoli proud. Přesto je zde nenulový Maxwellův proud, který vytváří magnetické pole, které, jak poznáme dále, snadno určíme.

Určení indukovaného magnetického pole

V kap. 30 jsme použili pro určení směru indukce \mathbf{B} magnetického pole, které je vyvolané vodivým proudem I , pravidlo pravé ruky podle obr. 30.4. Totéž pravidlo můžeme také použít k tomu, abychom určili směr \mathbf{B} indukovaného magnetického pole vytvořeného Maxwellovým proudem I_M , jak je naznačeno uprostřed obr. 32.17b pro kondenzátor. Také můžeme I_M využít k tomu, abychom stanovili velikost indukovaného magnetického pole při nabíjení kondenzátoru s rovnoběžnými kruhovými elektrodami

o poloměru R . Považujme prostě prostor mezi deskami za pomyslný kruhový vodič poloměru R , kterým prochází Maxwellův proud I_M . Potom je podle rov. (30.22) velikost magnetické indukce v bodech uvnitř kondenzátoru ve vzdálenosti r od jeho osy ($r \leq R$)

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_M}{2\pi R^2} \right) r \quad (\text{uvnitř kondenzátoru s kruhovými elektrodami}). \quad (32.38)$$

Podobně podle rov. (30.19) je velikost magnetické indukce pole v bodě mimo kondenzátor ($r \geq R$)

$$B = \frac{\mu_0 I_M}{2\pi r} \quad (\text{mimo kondenzátor s kruhovými elektrodami}). \quad (32.39)$$

PŘÍKLAD 32.5

Deskový kondenzátor s rovnoběžnými kruhovými elektrodami z př. 32.4 je nabíjen proudem I .

(a) Vyjádřete $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ ve vzdálenosti $r = R/5$ od osy kondenzátoru pomocí μ_0 a I .

ŘEŠENÍ: Magnetické pole v kondenzátoru je vytvořeno Maxwellovým proudem mezi elektrodami. Užijeme-li Ampérův zákon pro kružnici o poloměru r souosou s kruhovými elektrodami kondenzátoru, dostáváme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_{M,c}. \quad (32.40)$$

Předpokládáme, že Maxwellův proud je stejnoměrně rozložen mezi deskami. Potom je proud $I_{M,c}$ obepnutý kružnicí úměrný obsahu plochy ohraničené touto křivkou, tj.

$$\frac{I_{M,c}}{I_M} = \frac{\text{obsah plochy obepnuté kružnicí}}{\text{obsah celé elektrody}},$$

odkud plyne

$$I_{M,c} = I_M \frac{\pi r^2}{\pi R^2}.$$

Výsledek dosadíme do rov. (32.40) a dostaneme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_M \frac{\pi r^2}{\pi R^2}. \quad (32.41)$$

Nyní podle rov. (32.37) položíme $I_M = I$ a dosadíme $r = R/5$ do rov. (32.41). Dostaneme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_M \frac{\pi (R/5)^2}{\pi R^2} = \frac{\mu_0 I}{25}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Vyjádřete velikost magnetické indukce ve vzdálenosti $r = R/5$ od osy kondenzátoru pomocí maximální velikosti magnetické indukce B_{\max} .

ŘEŠENÍ: Protože kondenzátor má rovnoběžné elektrody, můžeme ke stanovení velikosti B použít rov. (32.38). Pro $r = R/5$ dostaneme z této rovnice

$$B = \left(\frac{\mu_0 I_M}{2\pi R^2} \right) r = \frac{\mu_0 I_M (R/5)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_M}{10\pi R}. \quad (32.42)$$

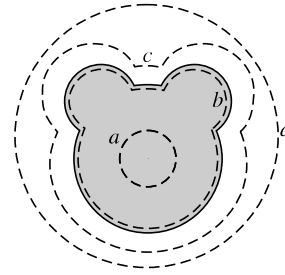
Největší velikost indukce B_{\max} v kondenzátoru je na kružnici o poloměru $r = R$, a to

$$B_{\max} = \left(\frac{\mu_0 I_M}{2\pi R^2} \right) R = \frac{\mu_0 I_M R}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I_M}{2\pi R}. \quad (32.43)$$

Podíl rov. (32.42) a (32.43) dává

$$B = \frac{B_{\max}}{5}. \quad (\text{Odpověď})$$

Tento výsledek jsme mohli dostat snadněji též následující úvahou: Podle rov. (32.38) roste velikost B uvnitř kondenzátoru lineárně s r , a proto magnetická indukce ve vzdálenosti $R/5$ má velikost $B_{\max}/5$.



32.11 MAXWELLOVY ROVNICE

Rov. (32.30) je poslední ze čtyř základních rovnic elektromagnetismu, nazývaných *Maxwellovy rovnice*; jsou uvedeny (v integrálním tvaru) v tab. 32.1. Tyto čtyři rovnice vysvětlují všechny kategorie elektromagnetických jevů, počínaje tím, proč směřuje stříška kompasu k severu, až po důvody, proč nastartujeme automobil, otočíme-li klíčkem zapalování. Jsou teoretickým základem pro vysvětlení funkce elektromagnetických zařízení, jako jsou například elektromotory, cyklotrony, televizní vysílače a přijímače, telefony, faxy, radary nebo mikrovlnné trouby.

Maxwellovy rovnice jsou fundamentální rovnice pro elektromagnetické pole. Můžeme z nich odvodit všechny rovnice, se kterými jsme se setkali počínaje kap. 22, a které popisují elektrické, magnetické nebo elektromagnetické pole. Jsou ale také základem mnoha dalších rovnic, se kterými se setkáme v kap. 34 až 37, tedy v optice i v teorii optických přístrojů, ať už jde o složité teleskopy nebo obyčejné brýle.

KONTROLA 6: Obrázek představuje pohled zevnitř na jednu elektrodu deskového kondenzátoru. Čárkované čáry představují čtyři integrační cesty (cesta b sleduje okraj desky). Seřadte v sestupném pořadí tyto cesty podle velikosti $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ podél jednotlivých cest během vybíjení kondenzátoru. Rozptýl pole na okraji kondenzátoru zanedbejte.

Tabulka 32.1 Maxwellovy rovnice

NÁZEV	ROVNICE	
Gaussův zákon pro elektrické pole (rov. (24.7))	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	vyjadřuje souvislost mezi tokem intenzity elektrického pole \mathbf{E} uzavřenou plochou a celkovým elektrickým nábojem uvnitř této plochy.
Gaussův zákon pro magnetické pole (rov. (32.1))	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	vyjadřuje poznatek, že tok magnetické indukce \mathbf{B} libovolnou uzavřenou plochou je roven nule (tj. neexistuje magnetický náboj).
Faradayův zákon (rov. (21.22))	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	vyjadřuje souvislost mezi cirkulací intenzity elektrického pole \mathbf{E} podél uzavřené orientované křivky a časovou změnou indukčního magnetického toku $\Phi_B = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ plochou ohraničenou touto křivkou.
Ampérův-Maxwellův zákon (rov. (32.33))	$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + I_c \right)$	vyjadřuje souvislost mezi cirkulací magnetické indukce \mathbf{B} podél uzavřené orientované křivky a časovou změnou toku elektrické intenzity $\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ plochou ohraničenou touto křivkou a celkovým proudem procházejícím touto plochou.

Rovnice jsou uvedeny ve tvaru platném pro vakuum, tedy v nepřítomnosti magnetických materiálů nebo dielektrik.

PŘEHLED & SHRNU TÍ

Gaussův zákon pro magnetické pole

Nejjednodušší magnetickou strukturou je magnetický dipól. Magnetický monopol („magnetický náboj“), pokud zatím víme, neexistuje. Gaussův zákon pro magnetické pole

$$\Phi_B = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (32.1)$$

říká, že celkový magnetický tok jakoukoli uzavřenou plochou je nulový. Vystihuje poznatek, že magnetické monopóly neexistují.

Zemské magnetické pole

Zemské magnetické pole lze aproximovat polem magnetického dipólu, který svírá úhel 11° s osou zemské rotace (spojující zemské póly). Jeho jižní pól nazýváme *severní geomagnetický pól*, protože leží na severní polokouli. Směr místního magnetického pole v kterémkoli místě na Zemi popisujeme jeho *deklinací* (úhel nalevo nebo napravo od zeměpisného severu) a *inklinací* (úhel nahoru nebo dolů od vodorovné roviny).

Spinový magnetický dipólový moment

Elektron má vlastní, vnitřní moment hybnosti, nazývaný *spinový moment hybnosti* (neboli *spin*) \mathbf{S} . S ním je spojen vlastní *spinový magnetický dipólový moment* $\boldsymbol{\mu}_s$

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m} \mathbf{S}. \quad (32.2)$$

Spin \mathbf{S} nemůžeme měřit, ale můžeme měřit jeho složku ve zvoleném směru. Orientujeme-li podle něj souřadnicovou osu z , může mít složka S_z pouze hodnoty vyjádřené vztahem

$$S_z = m_s \hbar \quad \text{pro } m_s = \pm \frac{1}{2}, \quad (32.3)$$

kde $\hbar \doteq 1,05 \cdot 10^{-34}$ J·s je redukovaná Planckova konstanta. Podobně nelze měřit samotný spinový magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}_s$ elektronu, avšak lze měřit jeho složku ve zvoleném směru z :

$$\mu_{s,z} = \pm \frac{e\hbar}{2m} = \pm \mu_B, \quad (32.6, 32.4)$$

kde μ_B je *Bohrův magneton*:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}. \quad (32.5)$$

Potenciální energie E_p spinového magnetického dipólového momentu ve vnějším poli \mathbf{B}_{ext} je

$$E_p = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = -\mu_{s,z} B_{\text{ext}}. \quad (32.7)$$

Orbitální magnetický dipólový moment

Je-li elektron součástí atomu, má také moment hybnosti nazývaný *orbitální moment hybnosti* \mathbf{L} , se kterým je spojen *orbitální magnetický dipólový moment*:

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}. \quad (32.8)$$

Orbitální moment hybnosti je kvantován a jeho složka nabývá pouze hodnot

$$L_z = m_l \hbar \quad \text{pro } m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad (32.9)$$

kde l je vedlejší kvantové číslo. Tomu odpovídá složka orbitálního magnetického dipólového momentu

$$\mu_{\text{orb},z} = -m_l \frac{e\hbar}{2m} = -m_l \mu_B. \quad (32.10, 32.11)$$

Potenciální energie E_p orbitálního magnetického dipólového momentu ve vnějším magnetickém poli \mathbf{B}_{ext} je

$$E_p = -\boldsymbol{\mu}_{\text{orb}} \cdot \mathbf{B}_{\text{ext}} = -\mu_{\text{orb},z} B_{\text{ext}}. \quad (32.12)$$

Diamagnetismus

Diamagnetické látky nevykazují magnetické vlastnosti, pokud nejsou vloženy do vnějšího magnetického pole. Ve vnějším poli \mathbf{B}_{ext} se v nich indukují dipólový magnetický moment orientovaný opačně, než je směr \mathbf{B}_{ext} . Jestliže je pole nehomogenní, je diamagnetická látka vytlačována z oblasti s větší magnetickou indukci.

Paramagnetismus

V *paramagnetické látce* má každý atom permanentní magnetický dipólový moment $\boldsymbol{\mu}$, avšak tyto momenty jsou orientovány nahodile, takže látka jako celek magnetické pole nemá. Vnější magnetické pole \mathbf{B}_{ext} ale může částečně uspořádat atomární dipólové momenty do svého směru. Jestliže je pole nehomogenní, je paramagnetická látka vtahována do oblasti s větší magnetickou indukci.

Stupeň seřazení atomových dipólových momentů se zvyšuje s růstem \mathbf{B}_{ext} a klesá s růstem teploty T látky. Mírou zmagnetizování látky je *magnetizace*:

$$\mathbf{M} = \frac{\text{magnetický moment}}{\text{objem vzorku}}. \quad (32.18)$$

Úplné seřazení všech N atomárních magnetických dipólů ve vzorku, nazývané *saturovací vzorku*, by odpovídalo nejvyšší možné hodnotě magnetizace $M_{\text{max}} = N\mu/V$. Pro slabá pole a vyšší teploty platí přibližný vztah

$$M = C \frac{B_{\text{ext}}}{T} \quad (\text{zákon Curieův}), \quad (32.19)$$

kde C je *Curieova konstanta* daného materiálu.

Feromagnetismus

I za nepřítomnosti vnějšího magnetického pole mají některé elektrony ve feromagnetickém materiálu magnetické dipólové

momenty seřazeny díky kvantově-mechanickému jevu, nazývanému *výměnná interakce*. Tou vznikají uvnitř materiálu oblasti (domény) s výraznými magnetickými dipólovými momenty. Vnější pole \mathbf{B}_{ext} může *uspořádat* tyto domény a vytvořit tak velký výsledný magnetický dipólový moment materiálu jako celku, a to ve směru \mathbf{B}_{ext} . Ten může částečně přetrvávat, i když je pole \mathbf{B}_{ext} odstraněno. Je-li \mathbf{B}_{ext} nehomogenní, je feromagnetický materiál vtahován do oblastí s větší magnetickou indukcí. Výměnné interakce se přestanou projevovat, přesáhne-li teplota vzorku jeho *Curieovu teplotu*. Pak vzorek vykazuje pouze paramagnetismus.

Maxwellovo rozšíření Ampérova zákona

Proměnný tok elektrické intenzity indukuje magnetické pole \mathbf{B} , pro které platí

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}. \tag{32.28}$$

Tato rovnice spojuje magnetické pole indukované podél uzavřené orientované křivky a změnu elektrického toku Φ_E plochou ohraničenou touto křivkou. Ampérův zákon

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_c \tag{Ampérův zákon}, \tag{32.29}$$

spojuje magnetické pole vytvářené elektrickým proudem I_c procházejícím plochou, kterou ohraničuje Ampérova křivka. Před-

chozí dvě rovnice mohou být zapsány rovnicí jedinou:

$$\frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + I_c \tag{Ampérův-Maxwellův zákon}. \tag{32.30}$$

Maxwellův proud

Maxwellův proud I_M , svázaný s měnícím se elektrickým polem, je

$$I_M = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{Maxwellův proud}. \tag{32.32}$$

Rov. (32.30) pak píšeme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I_{M,c} + I_c) \tag{Ampérův-Maxwellův zákon}, \tag{32.33}$$

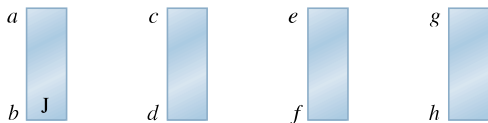
kde $I_{M,c}$ je celkový Maxwellův proud tekoucí plochou obepnutou Ampérovou křivkou. Idea Maxwellova proudu dovoluje zachovat představu, že proud protéká souvisle celým obvodem — i kondenzátorem (bez dielektrika). Žádný náboj se však mezi elektrodami nepohybuje.

Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice, uvedené v tab. 32.1, shrnují poznatky elektromagnetismu a představují základní zákony pro elektromagnetické pole.

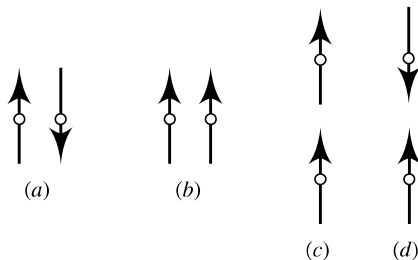
OTÁZKY

1. Na obr. 32.18 jsou čtyři ocelové tyče; tři z nich jsou permanentní magnety. Jeden z pólů je označen. Pokusem sledáme, že konce *a* a *d* se navzájem přitahují, konce *c* a *f* odpuzují, konce *e* a *h* přitahují a konce *a* a *h* přitahují. (a) Které konce jsou severní póly? (b) Která tyč není magnetem?



Obr. 32.18 Otázka 1

2. Obr. 32.19 znázorňuje čtyři uspořádání dvojic kompasových střepek v oblasti bez vnějšího magnetického pole. Šipky ukazují

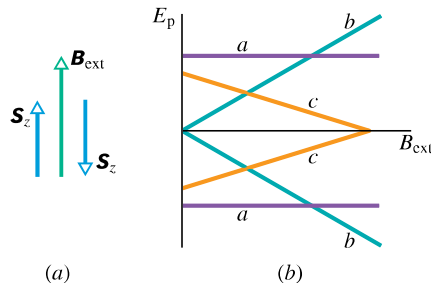


Obr. 32.19 Otázka 2

směry střelek, a tedy i směry magnetických dipólových momentů. Které dvojice jsou ve stabilní rovnováze?

3. Elektron má ve vnějším magnetickém poli \mathbf{B}_{ext} průmět spinu \mathbf{S}_z antiparalelní s \mathbf{B}_{ext} . Musíme elektronu dodat, nebo odebrat energii k tomu, aby změnil *orientaci spinu*, tj. aby pak byl \mathbf{S}_z paralelní s \mathbf{B}_{ext} ?

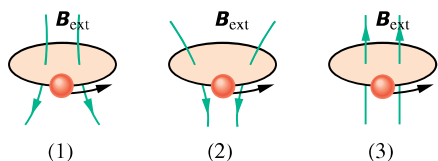
4. Obr. 32.20a ukazuje opačné orientace spinů elektronu ve vnějším magnetickém poli \mathbf{B}_{ext} . Obr. 32.20b nabízí tři možné volby závislosti potenciální energie spinových magnetických momentů na velikosti \mathbf{B}_{ext} . Která z nich je správná?



Obr. 32.20 Otázka 4

5. Obr. 32.21 ukazuje smyčkové modely elektronů obíhajících v magnetickém poli proti směru otáčení hodinových ručiček.

Pole je nehomogenní pro model (1) a (2) a homogenní pro model (3). Kam směřují: (a) magnetické dipólové momenty smyček, (b) magnetické síly působící na smyčku: nahoru, dolů, nebo jsou nulové?



Obr. 32.21 Otázky 5, 7 a 8

6. Co se stane s výslednou silou, která působí na smyčku podle obr. 32.9a, b, jestliže zvětšíme (a) velikost vnějšího pole \mathbf{B}_{ext} , (b) jeho nehomogenitu (rozbíhavost indukčních čar): vzroste, poklesne, nebo zůstane stejná?

7. Nahraďte proudové smyčky v otázce 5 a v obr. 32.21 diamagnetickými koulemi. Rozhodněte pro každé z polí, zda (a) magnetický dipólový moment koule a (b) síla působící na kouli směřují nahoru, dolů, nebo jsou nulové.

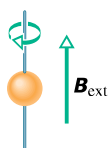
8. Nahraďte proudové smyčky v otázce 5 a v obr. 32.21 paramagnetickými koulemi. Rozhodněte pro každé z polí, zda (a) magnetický dipólový moment koule a (b) síla působící na kouli směřují nahoru, dolů, nebo jsou nulové.

9. V uspořádání podle obr. 32.22 je mezi dvěma póly magnetu nehomogenní magnetické pole. Do tohoto pole vletí elektron kolmo do roviny stránky v místě tečky. Kam směřuje síla působící na elektron vyvolaná interakcí jeho spinu s polem (směrem vlevo, napravo, nebo je nulová), je-li průmět spinu elektronu \mathbf{S}_z orientován (a) nalevo, (b) napravo? (Tip: Elektron modelujte kuličkou se záporným nábojem na povrchu, takže představuje proudovou smyčku podobně jako na obr. 32.9.)



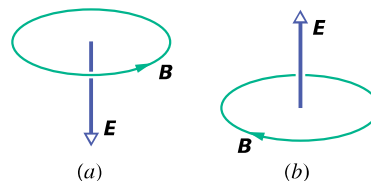
Obr. 32.22 Otázka 9

10. Obr. 32.23 ukazuje feromagnetickou kouli, která byla původně bez výsledného magnetického dipólového momentu. Kouli držíme v naznačené poloze dvěma tenkými napjatými drátky. Jestliže se vytvoří vnější magnetické pole \mathbf{B}_{ext} směřující vzhůru, získá koule magnetický dipólový moment orientovaný směrem nahoru. Jestliže nyní pole odstraníme, bude se koule otáčet okolo vodiče ve směru otáčení hodinových ručiček (jak je naznačeno), nebo opačně? (Tip: Uvažujte orientaci spinového momentu hybnosti elektronů a zákon zachování momentu hybnosti.)



Obr. 32.23 Otázka 10

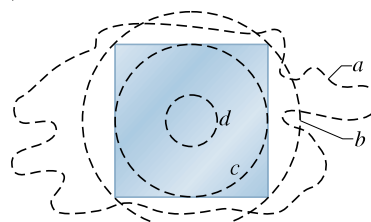
11. Obr. 32.24 ukazuje ve dvou situacích intenzitu elektrického pole \mathbf{E} a příslušnou indukční čáru indukovaného magnetického pole. Zvyšuje se, nebo se snižuje v jednotlivých případech velikost \mathbf{E} ?



Obr. 32.24 Otázka 11

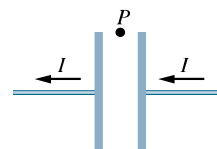
12. V obr. 32.15b směřuje elektrická intenzita \mathbf{E} od nás a její velikost roste. Jaký směr má indukce \mathbf{B} magnetického pole (ve směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček), jestliže vektor \mathbf{E} míří k nám a (a) roste, (b) klesá? (c) Jaký má směr \mathbf{B} , jestliže \mathbf{E} míří k nám a s časem se nemění?

13. Na obr. 32.25 je čelní pohled na jednu ze dvou čtvercových elektrod deskového kondenzátoru a na čtyři křivky, které se nalézají mezi deskami. Kondenzátor se vybíjí. Zanedbejte rozptyl elektrického pole na okraji elektrod. (a) Seřadte křivky sestupně podle velikosti integrálu $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ podél křivek. (b) Podél které křivky (jestli taková vůbec existuje) je úhel mezi \mathbf{B} a $d\mathbf{s}$ konstantní (takže lze snadno vypočítat skalární součin obou vektorů)? (c) Podél které křivky (jestli taková vůbec existuje) je \mathbf{B} konstantní, takže lze \mathbf{B} vytknout před integrál v rov. (32.28)?



Obr. 32.25 Otázka 13

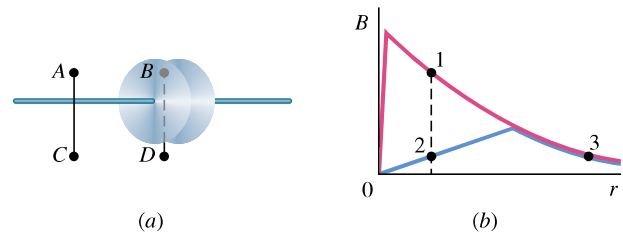
14. Na obr. 32.26 je naznačen kondenzátor s rovnoběžnými elektrodami a proud v připojených vodičích, který kondenzátor vybíjí. Směřuje (a) \mathbf{E} , (b) I_M nalevo, nebo napravo? (c) Směřuje magnetické pole v bodě P k nám, nebo od nás?



Obr. 32.26 Otázka 14

15. Kondenzátor s rovnoběžnými obdélníkovými elektrodami ($2L \times 4L$) se vybíjí. Myšlený obdélník ($L \times 2L$) se stranami rovnoběžnými s elektrodami leží uvnitř něj. Jaká část celkového Maxwellova proudu jím prochází?

16. Kondenzátor se nabíjí podle obr. 32.27a. Bod A (poblíž jednoho z přívodních vodičů) i bod B (mezi deskami kondenzátoru) jsou stejně vzdáleny od osy. Také bod C (poblíž vodiče) a bod D (mezi deskami, ale vně kondenzátoru) jsou od osy stejně vzdáleny. V obr. 32.27b udává jedna křivka schematicky závislost velikosti magnetické indukce na poloměru r uvnitř přívodního vodiče a mimo něj, druhá pak mezi deskami kondenzátoru. Obě křivky se částečně překrývají. Který ze tří bodů na křivkách odpovídá některému ze čtyř bodů na obr. 32.27a?

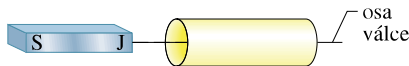


Obr. 32.27 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 32.2 Gaussův zákon pro magnetické pole

1C. Jižní pól magnetu umístíme poblíž válce ze stočeného listu papíru podle obr. 32.28. (a) Načrtněte indukční čáry magnetického pole, které procházejí povrchem válce. (b) Co lze říci o znaménku součinu $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ pro každou plošku $d\mathbf{S}$ na tomto povrchu? (c) Odporuje výsledek Gaussovu zákonu pro magnetické pole? Vysvětlete.

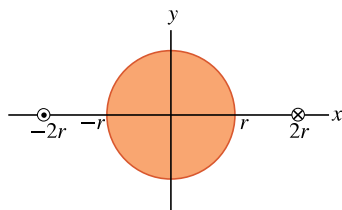


Obr. 32.28 Cvičení 1

2C. Velikost magnetického toku každou z prvních pěti stěn hrací kostky je číselně roven počtu ok. Toky o sudé velikosti jsou kladné, o liché záporné. Jaký je tok šestou stěnou kostky?

3Ú. Gaussova plocha má tvar povrchu válce s poloměrem základny 12,0 cm a o výšce 80,0 cm. Magnetický indukční tok dolní základnou je 25,0 μWb . Na horní základně je homogenní magnetické pole o indukci 1,60 mT kolmé k povrchu směřující ven z objemu válce. Jaký je výsledný magnetický indukční tok pláštěm válce?

4Ú*. Dvěma vodiči rovnoběžnými s osou z a vzdálenými $4r$ od sebe teče stejně velký proud I v opačných směrech podle obr. 32.29. Uprostřed mezi nimi leží válec o poloměru r a délce L s osou splývající s osou z . Použijte Gaussův zákon pro magnetické pole k výpočtu výsledného magnetického indukčního toku polovinou válcového povrchu, ležícího nad osou x . (*Tip:* Určete tok tou částí roviny xz , která je uvnitř válce.)

Obr. 32.29
Úloha 4

ODST. 32.3 Zemský magnetismus

5C. V New Hampshire byla v roce 1912 vodorovná složka magnetické indukce zemského magnetického pole 16 μT a inklinace 73°. Jaká byla velikost magnetické indukce?

6C. Podle školních Tabulek je v Brně deklinace 0,15° západně a inklinace 65,4° dolů. Brno má (v r. 2000) rozlohu 230 km². Jak velký je magnetický tok zbytkem zemského povrchu? Je kladný, nebo záporný?

7C. Země má magnetický dipólový moment 8,0 · 10²² J · T⁻¹. (a) Jaký proud by musel protékat jedním závitem umístěným na geomagnetickém rovníku, aby vytvořil stejný magnetický moment? Kdybychom nechali téci tento proud obráceně, zrušili bychom magnetické pole spíše (b) dále od Země, (c) u povrchu Země?

8Ú. Zemské magnetické pole lze aproximovat polem magnetického dipólu. V bodě ve vzdálenosti r od středu Země má složku vodorovnou B_h a svislou B_v :

$$B_h = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \cos \lambda_m, \quad B_v = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi r^3} \sin \lambda_m,$$

kde λ_m je *magnetická zeměpisná šířka* (měřená od geomagnetického rovníku směrem k severnímu nebo jižnímu geomagnetickému pólu). Zemský magnetický dipólový moment je $\mu = 8 \cdot 10^{22}$ A · m². (a) Ukažte, že závislost zemského magnetického pole na zeměpisné šířce λ_m je

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi r^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda_m}.$$

(b) Ukažte, že inklinace φ_i magnetického pole je vzhledem k magnetické šířce λ_m určena vztahem

$$\text{tg } \varphi_i = 2 \text{tg } \lambda_m.$$

9Ú. Použijte výsledky v úloze 8 k výpočtu zemského magnetického pole (jak velikost B , tak i inklinace φ_i) (a) na geomagnetickém rovníku, (b) v bodě s geomagnetickou šířkou 60°, (c) na severním geomagnetickém pólu.

10Ú. S použitím aproximace uvedené v úloze 8 stanovte (a) výšku nad zemským povrchem, ve které má velikost zemské magnetické indukce 50 % hodnoty na zemském povrchu a na téže šířce, (b) největší velikost magnetické indukce na plášti jádra Země 2 900 km pod zemským povrchem a (c) velikost a inklinaci magnetické indukce na severním zeměpisném pólu. Vysvětlete, proč se vypočtené hodnoty pro (c) liší od naměřených hodnot.

ODST. 32.4 Magnetismus a elektrony

11C. Elektron je ve vnějším magnetickém poli s indukcí \mathbf{B} , která má velikost 0,25 T a je rovnoběžná s osou z . Jaký je rozdíl energií při souhlasné a nesouhlasné orientaci průmětu \mathbf{S}_z jeho spinu vůči vnějšímu poli \mathbf{B} ?

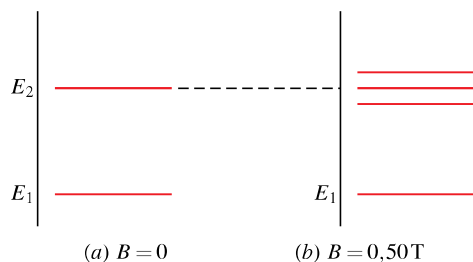
12C. Jakou hodnotu naměříme pro složku orbitálního magnetického dipólového momentu elektronu, když (a) $m_l = 1$ a (b) $m_l = -2$?

13C. V nejnižším energiovém stavu vodíkového atomu je podle kvantové mechaniky nejpravděpodobnější vzdálenost elektronu od jádra $5,2 \cdot 10^{-11}$ m. (a) Vypočítejte velikost intenzity elektrického pole protonu v této vzdálenosti. Složka $\mu_{s,z}$ spinového magnetického dipólového momentu protonu je $1,4 \cdot 10^{-26}$ J·T $^{-1}$. (b) Vypočítejte velikost B magnetického pole protonu na ose z ve vzdálenosti $5,2 \cdot 10^{-11}$ m. (*Tip:* Použijte rov. (30.29).) (c) Jaký je poměr spinového magnetického dipólového momentu elektronu a protonu?

14C. Elektron v atomu má orbitální magnetické kvantové číslo $m_l = 0$. Jaké jsou složky (a) L_z a (b) $\mu_{orb,z}$? Nechť je atom ve vnějším magnetickém poli o indukcii \mathbf{B} velikosti 35 mT směřující ve směru osy z . Jaká je potenciální energie (c) orbitálního magnetického dipólového momentu elektronu a (d) spinového magnetického dipólového momentu elektronu v tomto poli? (e) Opakujte úkoly (a) až (d) pro $m_l = -3$.

15C. Nechť má elektron v atomu orbitální moment hybnosti s hodnotami m_l pro $l = 3$. Kolika hodnot může nabýt (a) L_z a (b) $\mu_{orb,z}$? Jaká je největší a nejmenší dovolená velikost (vyjádřená pomocí h , m a e) složek (c) L_z a (d) $\mu_{orb,z}$? (e) Jaká je největší dovolená velikost z -ové složky jeho výsledného momentu hybnosti (orbitálního plus spinového)? (f) Kolika různých hodnot (kladných, záporných či nuly) může nabýt z -ová složka výsledného momentu hybnosti?

16Ú. Obr. 32.30 představuje energiové spektrum; na svislou osu vynášíme energiové hladiny atomu (jako v obr. 8.17). V nepřítomnosti pole má atom dvě hladiny E_1 a E_2 (obr. 32.30a). Je-li atom umístěn do magnetického pole 0,50 T, energiové spektrum se změní tak, jak ukazuje obr. 32.30b. (Zanedbejte spinový magnetický moment a uvažujte pouze potenciální energii $\mu_{orb} \cdot \mathbf{B}$.) Hladina E_1 se nezmění, ale hladina E_2 se rozštěpí na trojici blízkých hladin. Jaké jsou hodnoty m_l spojené s energiovou hladinou (a) E_1 a (b) E_2 ? (c) Jaká je vzájemná vzdálenost energiových hladin v tripletu na obr. 32.30b?



Obr. 32.30 Úloha 16

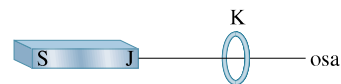
17Ú. Náboj Q je stejnoměrně rozložen podél prstence poloměru r . Prstenec rotuje s úhlovou rychlostí ω kolem osy symetrie kolmé k jeho rovině. (a) Dokažte, že magnetický moment v důsledku rotace náboje je

$$\mu = \frac{1}{2} Q \omega r^2.$$

(b) Jaký je směr příslušného magnetického momentu v případě, že je náboj kladný?

ODST. 32.6 Diamagnetismus

18C. Obr. 32.31 ukazuje smyčkový model (smyčka K) pro diamagnetickou látku. (a) Načrtněte indukční čáry magnetického pole procházející smyčkou a v okolí smyčky vyvolaného tyčovým magnetem. (b) Jaký je směr výsledného magnetického dipólového momentu μ a směr odpovídajícího proudu I ve smyčce? (c) Jaký je směr magnetické síly působící na smyčku?



Obr. 32.31 Cvičení 18 a 22

19Ú* Předpokládejme, že elektron s hmotností m a nábojem velikosti e se pohybuje po kružnici o poloměru r okolo jádra. Dále předpokládejme, že je zapnuto homogenní magnetické pole o indukcii \mathbf{B} , která je kolmá k rovině dráhy. Za předpokladu, že se poloměr dráhy nezmění a že změna velikosti rychlosti elektronu v důsledku přiloženého pole \mathbf{B} je malá, určete vztah pro orbitální magnetický dipólový moment elektronu.

ODST. 32.7 Paramagnetismus

20C. Paramagnetický plyn, jehož atomy mají vlastní magnetický dipólový moment $1,0 \cdot 10^{-23}$ J·T $^{-1}$, se nalézá v magnetickém poli o indukcii 0,50 T. Při jaké teplotě bude střední kinetická energie translačního pohybu atomů plynu rovna energii potřebné na překlopení magnetického dipólu jednoho atomu plynu v daném magnetickém poli?

21C. Permanentní tyčový válcový magnet má délku 5,00 cm, průměr 1,00 cm a konstantní magnetizaci $5,30 \cdot 10^3$ A·m $^{-1}$. Jaký je jeho magnetický dipólový moment?

22C. Opakujte cvič. 18 pro případ, kdy smyčka je z paramagnetického materiálu.

23C. Zkoumáme, zda vzorek paramagnetické soli s magnetizační křivkou podle obr. 32.10 splňuje Curieův zákon. Vzorek je umístěn do homogenního magnetického pole o indukcii 0,50 T, která je během experimentu konstantní. Magnetizaci M pak měříme za teplot v rozmezí 10 K až 300 K. Platí za těchto podmínek Curieův zákon?

24C. Vzorek paramagnetické soli s magnetizační křivkou podle obr. 32.10 má pokojovou teplotu 300 K. V jak silném magnetickém poli bude stupeň saturace (a) 50 %, (b) 90 %? Jsou pole o této magnetické indukcii běžně dosažitelná v laboratorních podmínkách?

25C. Vzorek paramagnetické soli s magnetizační křivkou podle obr. 32.10 se nalézá v homogenním magnetickém poli o indukci 2,0 T. Za jaké teploty bude stupeň magnetické saturace vzorku (a) 50 % a (b) 90 %?

26Ú. Elektron s kinetickou energií E_k obíhá po kružnici v rovině kolmé k homogennímu magnetickému poli. Elektron podléhá pouze síle tohoto pole. (a) Dokažte, že magnetický dipólový moment v důsledku orbitálního pohybu má velikost $\mu = E_k/B$ a má opačný směr než \mathbf{B} . (b) Jaká je velikost a směr magnetického dipólového momentu kladného iontu s kinetickou energií E_k za stejných podmínek? (c) V 1 m^3 ionizovaného plynu je $5,3 \cdot 10^{21}$ elektronů a stejný počet kladných iontů. Předpokládejte, že střední kinetická energie* elektronu je $6,2 \cdot 10^{-20} \text{ J}$ a střední kinetická energie iontu je $7,6 \cdot 10^{-21} \text{ J}$. Vypočtěte velikost magnetizace plynu, nalézá-li se v magnetickém poli o indukci 1,2 T.

27Ú. Uvažujte tuhé těleso obsahující N atomů v jednotkovém objemu. Každý atom má magnetický dipólový moment μ . Předpokládejte, že směr μ může být pouze paralelní nebo antiparalelní s vnějším polem \mathbf{B} (to bude případ, kdy μ pochází od spinu pouze jednoho elektronu). Pomocí statistické mechaniky lze dokázat, že pravděpodobnost výskytu atomu ve stavu s energií E je úměrná $e^{-E/kT}$, kde T je absolutní teplota a k je Boltzmannova konstanta. Protože platí $E = -\mu \cdot \mathbf{B}$, je počet atomů, jejichž dipólový moment je paralelní s \mathbf{B} , úměrný $e^{\mu B/kT}$ a počet atomů, jejichž dipólový moment je antiparalelní s \mathbf{B} , je úměrný $e^{-\mu B/kT}$. (a) Ukažte, že magnetizace tohoto tělesa je $M = N\mu \operatorname{tgh}(\mu B/kT)$, kde tgh je hyperbolický tangens, definovaný vztahem $\operatorname{tgh}(x) = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x})$. (b) Ukažte, že výsledky uvedené v (a) se redukují na vztah $M = N\mu^2 B/(kT)$ pro $\mu B \ll kT$. (c) Ukažte, že výsledky uvedené v (a) se redukují na vztah $M = N\mu$ pro $\mu B \gg kT$. (d) Ukažte, že výsledky (b) i (c) kvalitativně souhlasí s obr. 32.10.

ODST. 32.8 Feromagnetismus

28C. Měření v dolech a hloubkových vrtech ukazuje, že teplota uvnitř Země vzrůstá s hloubkou průměrně o $30 \text{ }^\circ\text{C}$ na 1 km. Určete, v jaké hloubce ztratí železo feromagnetismus za předpokladu, že na zemském povrchu je teplota $10 \text{ }^\circ\text{C}$. (Curieova teplota železa se s tlakem mění velmi málo, proto tuto závislost neberte v úvahu.)

29C. Výměnná interakce, kterou se v čl. 32.8 objasňuje feromagnetismus, je něco úplně jiného než magnetická interakce mezi dvěma magnetickými dipóly. Abyste se o tom přesvědčili, vypočtěte (a) velikost magnetické indukce, kterou vytváří atom kobaltu (s magnetickým dipólovým momentem $1,5 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$) v bodě C, který je ve vzdálenosti 10 nm od něj ve směru osy dipólu; (b) nejmenší energii potřebnou k překlopení sousedního atomu kobaltu, který se v bodě C nachází. K jakému závěru dojdete porovnáním tohoto výsledku s výsledky př. 32.2?

30C. Saturační magnetizace M_{\max} feromagnetického niklu je $4,70 \cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$. Vypočtěte magnetický moment jednoho atomu

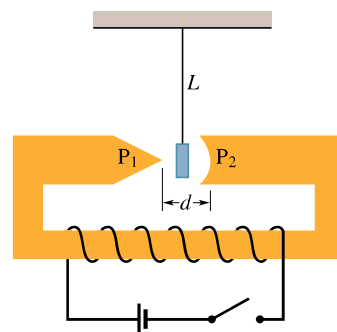
* V nízkoteplotním plazmatu mohou mít systém elektronů a systém iontů podstatně různé teploty.

niklu. (Hustota niklu je $8,90 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ a jeho molární hmotnost je $58,71 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.)

31C. Magnetický dipólový moment atomu železa v železně tyči je $2,1 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$. Předpokládejme, že všechny atomy v tyči délky 5,0 cm a příčného průřezu $1,0 \text{ cm}^2$ mají dipólové momenty seřazeny ve stejném směru. (a) Jaký je dipólový moment tyče? (b) Jak velký moment síly musí působit, aby se magnet udržel v poloze kolmé k vnějšímu magnetickému poli o indukci 1,5 T? Hustota železa je $7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

32Ú. Magnetický dipólový moment Země je $8,0 \cdot 10^{22} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$. (a) Pokud by zdrojem tohoto magnetismu byla zmagnetovaná železná koule ve středu Země, jaký by byl její poloměr? (b) Jakou část objemu Země by koule zaujímal? Předpokládejte úplně uspořádání všech dipólů. Hustota vnitřního jádra Země je $14000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Magnetický atomový moment atomu železa je $2,1 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{T}^{-1}$. (Tip: O vnitřním jádru Země se předpokládá, že má část tuhou a část kapalnou a že je zčásti železná; přesto je však permanentní magnet jako zdroj zemského magnetismu vyloučen z několika příčin. Jedním z důvodů je, že teplota jádra Země zcela určitě převyšuje teplotu Curieovu.)

33Ú. Obr. 32.32 ukazuje zařízení používané při přednášce k demonstraci paramagnetismu a diamagnetismu. Vzorek magnetické látky je zavěšen na dlouhém vlákně v nehomogenním poli (šířky $d = 2 \text{ cm}$) mezi póly silného elektromagnetu. Pól P_1 je ostře zašpičatěn a pól P_2 je vyhlouben, jak je naznačeno v obrázku. Jakékoli vychýlení vlákna ze svislého směru sledují posluchači optickou projekční soustavou (není zakreslena). (a) Nejprve je použit bismutový (diamagnetický) vzorek. Po zapnutí elektromagnetu se vzorek poněkud vychýlí (asi o 1 mm) k jednomu z pólů. Jaký je směr této vychýlky? (b) Jako další je použit hliníkový (paramagnetický a vodivý) vzorek. Po zapnutí elektromagnetu pozorujeme, že se vzorek znatelně (asi o 1 cm) vychýlí asi na dobu jedné sekundy směrem k jednomu pólu a potom se mírně vychýlí ke druhému pólu. Vysvětlíte to a určete, ke kterému z pólů se vzorek vychyluje. (Tip: Hliníkový vzorek je vodič; použijte Lenzův zákon.) (c) Co by se stalo v případě feromagnetického vzorku?



Obr. 32.32
Úloha 33

34Ú. Magnetický kompas má střelku (o hmotnosti 0,050 kg a délce 4,0 cm) orientovanou ve směru vodorovné složky zemského magnetického pole. V místě kompasu je tato složka $B_h = 16 \mu\text{T}$. Poté, co do kompasu zlehka klepneme, kmitá

volně otáčivá stříška ve vodorovné rovině s úhlovou frekvencí $45 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Stanovte magnetický dipólový moment stříšky za předpokladu, že stříška je homogenní tenká tyč uchycená ve svém středu.

35Ú. Rowlandův prstenec je tvořen feromagnetikem. Má kruhový průřez s vnitřním poloměrem $5,0 \text{ cm}$, s vnějším poloměrem $6,0 \text{ cm}$ a jeho primární vinutí má 400 závitů. (a) Jaký proud musí téci vinutím, abychom uvnitř toroidu vytvořili pole $B_0 = 0,20 \text{ mT}$? (b) Sekundární cívka navinutá okolo toroidu má 50 závitů a odpor $8,0 \Omega$. Jak velký náboj prošel sekundární cívkou po zapnutí proudu do primárního vinutí, je-li $B_M = 800B_0$?

ODST. 32.9 Indukované magnetické pole

36C. Při jakém poloměru r je indukované magnetické pole rovno 50% své nejvyšší hodnoty podle zadání z př. 32.4?

37C. Ve vzdálenosti $6,0 \text{ mm}$ od osy deskového kondenzátoru s kruhovými elektrodami má mít v prostoru mezi elektrodami indukované magnetické pole velikost $2,0 \cdot 10^{-7} \text{ T}$. Elektrody mají poloměr $3,0 \text{ mm}$. Jaká je k tomu potřebná rychlost změny intenzity elektrického pole dE/dt mezi elektrodami?

38Ú. Deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru $R = 16 \text{ mm}$ a vzdálenosti elektrod $d = 5,0 \text{ mm}$ vytváří v prostoru mezi nimi homogenní elektrické pole. Napětí mezi elektrodami je pro $t \geq 0$ vyjádřeno funkcí $U = (100 \text{ V})e^{-t/\tau_C}$ s časovou konstantou $\tau_C = 12 \text{ ms}$. Určete magnetické pole v mezeře kondenzátoru v radiální vzdálenosti $r = 0,80R$ od jeho osy (a) jako funkci času pro $t \geq 0$ a (b) v čase $t = 3\tau_C$.

39Ú. Uvažujme deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru $R = 30 \text{ mm}$ ve vzdálenosti $5,0 \text{ mm}$. Předpokládejme dále, že na elektrody přivedeme obvyklé síťové napětí, tj. sinusové napětí o kmitočtu 50 Hz s amplitudou 325 V :

$$U = (325 \text{ V}) \sin(2\pi(50 \text{ Hz})t).$$

(a) Vypočítejte amplitudu indukovaného magnetického pole $B_{\max}(r)$ pro $r = R$. (b) Zobraďte $B_{\max}(r)$ pro $0 < r < 10 \text{ cm}$.

ODST. 32.10 Maxwellův proud

40C. Dokažte, že pro Maxwellův proud v deskovém kondenzátoru o kapacitě C platí vztah $I_M = C(dU/dt)$, kde U je napětí na elektrodách.

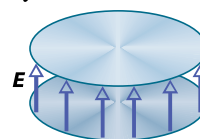
41C. Jaká musí být rychlost změny napětí na elektrodách kondenzátoru s kapacitou $2,0 \mu\text{F}$, aby vyvolala Maxwellův proud $1,5 \text{ A}$?

42C. Pro zadání z př. 32.4 ukažte, že hustota Maxwellova proudu má pro $r \leq R$ velikost $J_M = \epsilon_0(dE/dt)$.

43C. Vybíjíme deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru $0,10 \text{ m}$. Kružnice o poloměru $0,20 \text{ m}$ je soustředná s elektrodami kondenzátoru a leží uprostřed mezery mezi elektrodami. Maxwellův proud plochou ohraničenou kružnicí je $2,0 \text{ A}$. Jaká je rychlost změny intenzity elektrického pole mezi deskami?

44C. Při vybíjení deskového kondenzátoru s kruhovými elektrodami o poloměru R je Maxwellův proud středovou kruhovou oblastí o poloměru $R/2$ a rovnoběžnou s elektrodami roven $2,0 \text{ A}$. Jak velký je vybíjecí proud?

45Ú. Velikost intenzity elektrického pole mezi dvěma kruhovými elektrodami deskového kondenzátoru na obr. 32.33 je $E = 4,0 \cdot 10^5 - 6,0 \cdot 10^4 t$, kde E i t jsou v jednotkách SI. V čase $t = 0$ směřuje pole E svisle vzhůru. Plocha elektrody je $0,04 \text{ m}^2$. Pro $t \geq 0$ určete (a) velikost a směr Maxwellova proudu mezi elektrodami, (b) zda směr magnetické indukce B vzhledem k elektrodám (podle obrázku) je ve směru, nebo proti směru otáčení hodinových ručiček.

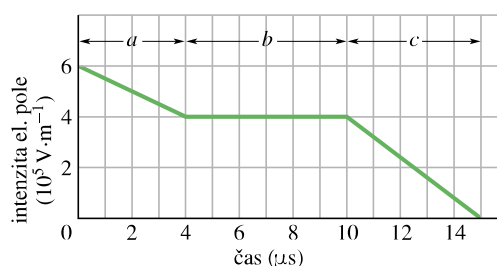


Obr. 32.33
Úloha 45

46Ú. Deskový kondenzátor s kruhovými elektrodami o poloměru R se vybíjí proudem $6,0 \text{ A}$. (a) V jaké vzdálenosti od jeho osy má indukované magnetické pole velikost 75% své největší hodnoty? (b) Jaká je maximální velikost magnetické indukce, je-li $R = 0,040 \text{ m}$?

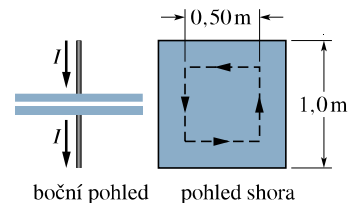
47Ú. Při vybíjení deskového kondenzátoru s kruhovými elektrodami o průměru 20 cm je hustota Maxwellova proudu v celém prostoru mezi elektrodami konstantní a má velikost $20 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$. (a) Vypočítejte velikost B indukce magnetického pole ve vzdálenosti $r = 50 \text{ mm}$ od osy kondenzátoru. (b) Vypočítejte dE/dt v prostoru mezi elektrodami.

48Ú. Homogenní elektrické pole o počáteční intenzitě $6,0 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ zaniká během $15 \mu\text{s}$ podle obr. 32.34. Vypočítejte velikost Maxwellova proudu plochou $1,6 \text{ m}^2$ kolmou ke směru pole v jednotlivých intervalech a , b , c naznačených v grafu. (Nezabývejte se podrobněji chováním na koncích intervalů.)



Obr. 32.34 Úloha 48

49Ú. Deskový kondenzátor má čtvercové elektrody o straně $1,0 \text{ m}$ podle obr. 32.35. Kondenzátor je nabíjen proudem $2,0 \text{ A}$,



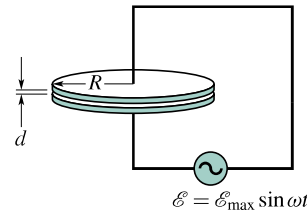
Obr. 32.35
Úloha 49

který vyvolá mezi elektrodami elektrické pole \mathbf{E} kolmé k jejich povrchu. (a) Jak velký je Maxwellův proud mezi elektrodami? (b) Jaká je hodnota dE/dt v této oblasti? (c) Jaký velký je Maxwellův proud čárkovaně vyznačeným čtvercem? (d) Jakou hodnotu má $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ po obvodu vyčárkovaného čtverce?

50Ú. Dlouhý přímý stříbrný vodič má rezistivitu $\rho = 1,62 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ a příčný průřez $5,00 \text{ mm}^2$. Proud je v průřezu vodiče stejnoměrně rozložen a při velikosti 100 A se mění rychlostí $2000 \text{ A} \cdot \text{s}^{-1}$. (a) Jak velká je intenzita (homogenního) elektrického pole ve vodiči, je-li proud protékající vodičem 100 A ? (b) Jak velký je Maxwellův proud ve vodiči ve stejném okamžiku? (c) Vypočtěte poměr velikosti magnetické indukce pole vyvolaného Maxwellovým proudem k velikosti magnetické indukce pole vytvořeného vodivým proudem ve vzdálenosti r od vodiče? Permittivitu stříbra můžeme položit rovnu ϵ_0 .

51Ú. Deskový kondenzátor (obr. 32.36) s kruhovými elektro-

dami o poloměru $R = 18,0 \text{ cm}$ je připojen ke zdroji emf $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{max}} \sin \omega t$, kde $\mathcal{E}_{\text{max}} = 220 \text{ V}$ a $\omega = 130 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Amplituda Maxwellova proudu je $I_M = 7,60 \mu\text{A}$. Zanedbejte rozptyl elektrického pole na okraji elektrod. (a) Jaká je maximální hodnota proudu I v obvodu? (b) Jaká je maximální hodnota $d\Phi_E/dt$, kde Φ_E je tok elektrické intenzity plochou mezi elektrodami? (c) Jaká je vzdálenost d mezi elektrodami? (Permittivita mezi deskami je ϵ_0 .) (d) Vypočtěte největší velikost B magnetické indukce mezi elektrodami ve vzdálenosti $r = 11,0 \text{ cm}$ od středu.



Obr. 32.36
Úloha 51

33

Elektromagnetické kmity a střídavé proudy



Vyžadují-li vysokonapěťová výkonová vedení opravu, nemohou je rozvodné společnosti jednoduše odpojit, protože by se propadla do tmy třeba celá města. Opravy se proto musejí provádět na vedeních pod napětím. Muž na obrázku právě vyměnil distanční rozpěrku na 500 kV vedení, což vyžaduje značnou zkušenost. Proč je vlastně napětí výkonových přenosových vedení tak vysoké? Proud tekoucí vedením je přitom vzhledem k přenášenému výkonu relativně malý. Nemohl by být větší?

33.1 NOVÁ FYZIKA — STARÁ MATEMATIKA

V této kapitole uvidíme, jak se s časem mění elektrický náboj Q v obvodu sestaveném z cívky L , kondenzátoru C a rezistoru R . Z jiného pohledu vzato budeme probírat, jak se energie přenáší tam a zpět mezi magnetickým polem cívky a elektrickým polem kondenzátoru, přičemž jí v průběhu těchto oscilací ubývá (a rezistor se zahřívá).

Kmity mechanické jsme již probírali dříve. V kap. 16 jsme viděli, jak se s časem mění výchylka x v mechanické kmitající soustavě skládající se z tělesa s hmotností m , pružiny s tuhostí k a prvku s výraznou viskozitou (např. olej) nebo s třením. Taková soustava je znázorněna na obr. 16.17. Z obrázku také vidíme, jak mechanická energie prochází periodickou změnou kinetické energie kmitajícího tělesa na potenciální energii deformované pružiny, přičemž je během kmitání postupně disipována.

Mezi těmito dvěma (idealizovanými) soustavami je analogie a také diferenciální rovnice popisující tyto procesy jsou stejné. Nemusíme tedy studovat novou matematiku a budeme věnovat plnou pozornost fyzikálnímu ději.

33.2 KVALITATIVNÍ ROZBOR KMITŮ LC

Ze tří obvodových prvků, rezistoru R , kondenzátoru C a cívky L , jsme dosud probrali sériové zapojení RC v čl. 28.8 a RL v čl. 31.9. Poznali jsme, že v těchto dvou typech obvodů náboj, proud a napětí narůstá a klesá s časem exponenciálně. Časový průběh růstu nebo poklesu lze charakterizovat příslušnou časovou konstantou τ_C nebo τ_L .

Nyní zkoumejme třetí možnost — sériové zapojení LC . Uvidíme, že v tomto případě náboj, proud a napětí neklesají exponenciálně s časem, ale mění se harmonicky (s dobou kmitu T a úhlovou frekvencí ω). Říkáme, že obvod *kmitá* neboli *osciluje* a příslušné změny elektrického pole kondenzátoru a magnetického pole cívky se nazývají **elektromagnetické kmity**. Části (a) až (h) na obr. 33.1 ukazují po sobě jdoucí fáze průběhu kmitů v jednoduchém kmitavém obvodu LC .

Metoda opravování vysokonapěťových vedení, zobrazená na úvodní fotografii, je patentována Scottem H. Yenzereem a vlastním licencem je výhradně Haverfield Corporation z Miami na Floridě. Jakmile se opravář přiblíží k vedení pod napětím, elektrické pole okolo vedení způsobí, že jeho tělo získá potenciál blízký potenciálu vedení. Aby se oba potenciály vyrovnaly, připojí se opravář vodivou tyčí k vedení. Aby nebyl usmrcen elektrickým proudem, musí být izolován od všeho, co je elektricky spojeno se zemí. A aby jeho tělo bylo na konstantním potenciálu — potenciálu vedení, má oblečen vodivý oblek s kapucí a rukavicemi, které jsou spojeny pomocí vodiče s vedením.

Podle rov. (26.21) je energie uložená v elektrickém poli kondenzátoru v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\text{el}}(t) = \frac{Q^2(t)}{2C}, \quad (33.1)$$

kde $Q(t)$ je náboj na kondenzátoru v čase t . Podle rovnice (31.53) je energie uložená v magnetickém poli cívky v libovolném okamžiku rovna

$$E_{\text{mg}}(t) = \frac{LI^2(t)}{2}, \quad (33.2)$$

kde $I(t)$ je proud protékající cívkou v čase t .

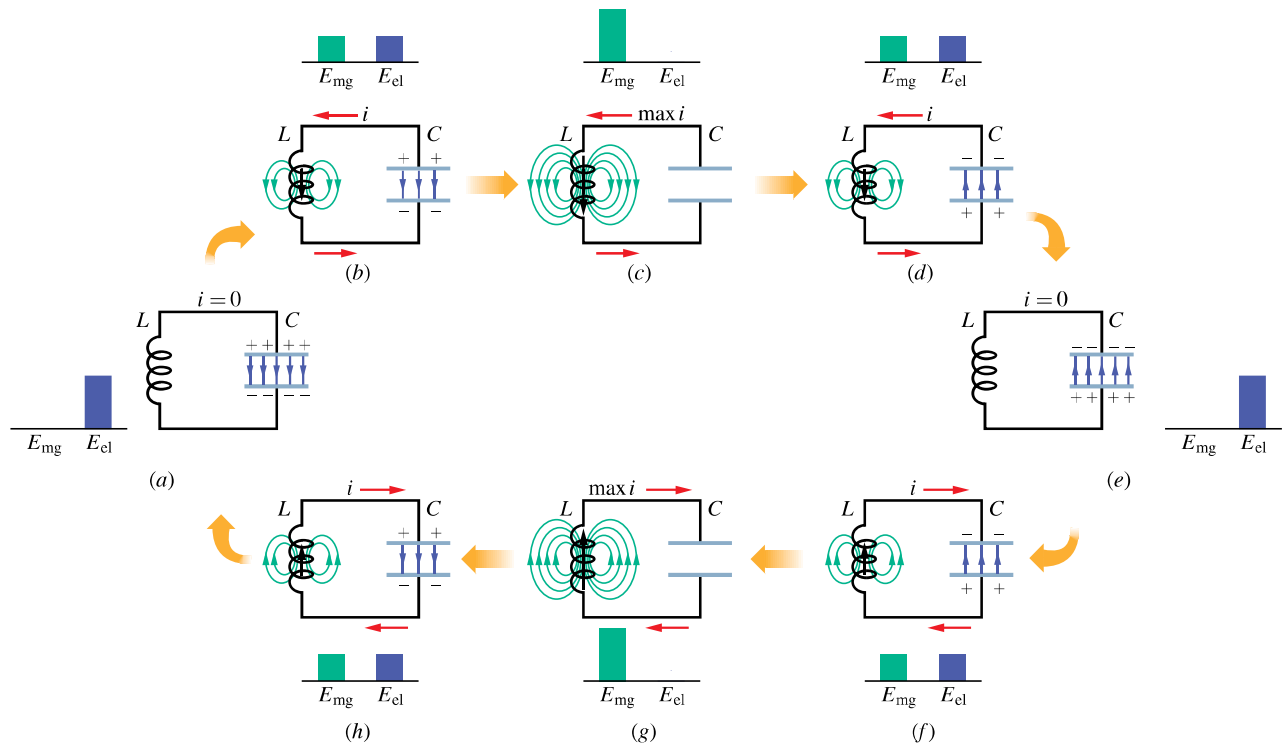
Přijmeme dále dohodu, že k vyjádření *okamžitých hodnot* elektrických veličin, které kmitají *harmonicky*, použijeme malá písmena (q, i, u, e) a pro jejich *amplitudy* velká písmena (Q, I, U, \mathcal{E}).

Předpokládejme, že počáteční náboj q na kondenzátoru je roven jeho amplitudě Q a počáteční proud i cívkou je nulový. Tento výchozí stav obvodu je na obr. 33.1a. Sloupcové grafy pro energii ukazují, že v tomto okamžiku při nulovém proudu v cívce a maximálním napětí na kondenzátoru je energie E_{mg} magnetického pole nulová a energie E_{el} elektrického pole je maximální.

Kondenzátor se nyní začne vybijet přes cívku. Kladný náboj se pohybuje proti směru otáčení hodinových ručiček (obr. 33.1b), což znamená, že vznikne proud $i = dq/dt$, který na obrázku směřuje v cívce dolů. Spolu s nábojem na kondenzátoru klesá i jeho energie. Tato energie se přeměňuje na energii magnetického pole cívky tak, jak narůstá proud i . Energie elektrického pole tedy klesá a mění se v energii pole magnetického.

Kondenzátor nakonec ztratí všechny náboj (obr. 33.1c), a tím také své elektrické pole a energii v tomto poli akumulovanou. Energie je zcela převedena do magnetického pole cívky. Protože magnetické pole má v tomto okamžiku největší hodnotu, má svou maximální hodnotu I také proud tekoucí cívkou.

Ačkoli náboj na kondenzátoru je nyní nulový, proud dále teče proti směru otáčení hodinových ručiček, neboť v důsledku elektromagnetické indukce cívka nedovolí, aby náhle zanikl. To znamená, že proud pokračuje v přenosu kladného náboje z horní elektrody kondenzátoru na jeho dolní elektrodu obvodem (obr. 33.1d). Energie nyní přechází z cívky zpět do kondenzátoru tak, jak postupně znovu narůstá elektrické pole kondenzátoru. Proud postupně během přenosu energie klesá. Když je nakonec všechna energie přenesena zpět do kondenzátoru (obr. 33.1e), proud klesne na okamžik na nulu. Situace na obr. 33.1e je stejná



Obr. 33.1 Osm stavů jedné periody kmitů v ideálním obvodu LC (bez odporu). Sloupcové grafy u každého obrázku ukazují velikost energie uložené v magnetickém a v elektrickém poli. Jsou též naznačeny indukční čáry magnetického pole cívky a elektrické siločáry v kondenzátoru. (a) Kondenzátor má maximální náboj a proud je nulový. (b) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá. (c) Kondenzátor je zcela vybit a proud je maximální. (d) Kondenzátor je nabíjen, ale s opačnou polaritou než v (a). (e) Kondenzátor má maximální náboj opačné polarity než v (a), proud je nulový. (f) Kondenzátor se vybíjí, proud narůstá v opačném směru než v (b). (g) Kondenzátor je zcela vybit, proud je maximální. (h) Kondenzátor je nabíjen, proud klesá.

jako původní (obr. 33.1a), s tím rozdílem, že kondenzátor je nyní nabit opačně.

Kondenzátor se potom začíná znovu vybíjet, avšak nyní proudem ve směru otáčení hodinových ručiček. Z důvodů právě uvedených vidíme, že proud vzrůstá k maximum (obr. 33.1g) a pak klesá (obr. 33.1h), až se obvod nakonec dostane do původního stavu (obr. 33.1a). Celý proces se opakuje s kmitočtem f a tedy úhlovou frekvencí $\omega = 2\pi f$. V ideálním obvodu bez odporu neprobíhá jiná přeměna energie než mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Podle zákona zachování energie by kmity pokračovaly nekonečně dlouho. Kmity nemusejí začínat s veškerou energií v elektrickém poli — počátečním stavem může být kterýkoli jiný stav během kmitu.

Abychom našli časový průběh náboje q na kondenzátoru, budeme na něm měřit voltmetrem napětí u_C . Z rov. (26.1) plyne

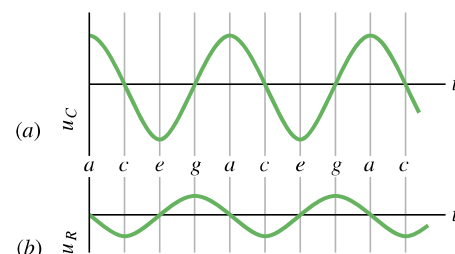
$$u_C = \left(\frac{1}{C}\right) q,$$

odkud můžeme vyjádřit q . Abychom změřili proud, zapojíme do série s kondenzátorem a cívku malý rezistor R

a změříme časově proměnné napětí u_R na rezistoru; to je úměrné i podle vztahu

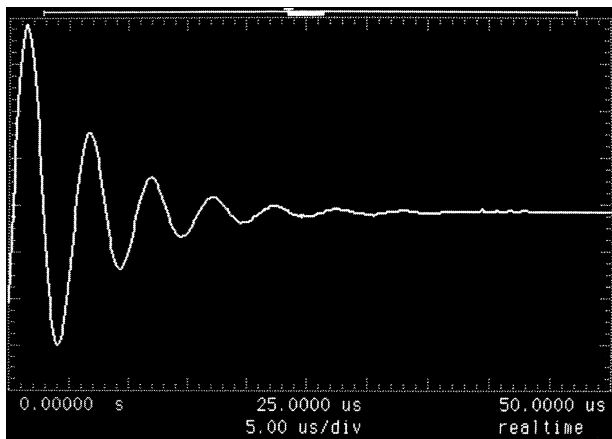
$$u_R = iR.$$

Přitom předpokládáme, že odpor R je tak malý, že jeho vliv na chování obvodu je zanedbatelný. Časový průběh u_C a u_R , a tedy také q a i je naznačen v obr. 33.2. Všechny čtyři veličiny se mění s časem harmonicky.



Obr. 33.2 (a) Napětí u_C na kondenzátoru v obvodu z obr. 33.1 jako funkce času t . Napětí u_C je úměrné náboji q na kondenzátoru. (b) Napětí u_R na malém rezistoru je úměrné proudu i v obvodu z obr. 33.1. Písmena se vztahují ke stejně označeným stavům kmitajícího obvodu z obr. 33.1.

Ve skutečném obvodu LC nebudou kmity trvat nekonečně dlouho, protože obvod má vždy jistý odpor, který odčerpá energii z elektrického a magnetického pole a rozptýlí ji (obvod se zahřeje). Vybuzené kmity postupně zaniknou, jak je vidět z obr. 33.3. Porovnejte tento obrázek s obr. 16.18, který ukazuje útlum mechanických kmitů, způsobený třením v soustavě pružina + těleso.



Obr. 33.3 Stopa na stínítku osciloskopu ukazuje útlum oscilací v obvodu RLC v důsledku disipace energie v rezistoru.

KONTROLA 1: Nabitý kondenzátor a cívka jsou spojeni do série v čase $t = 0$. Určete v násobcích periody T kmitů obvodu LC , kdy poprvé pro $t > 0$ dosáhne maximální hodnotu (a) náboj na kondenzátoru, (b) napětí na kondenzátoru s původní polaritou, (c) energie akumulovaná v elektrickém poli, (d) proud.

PŘÍKLAD 33.1

Kondenzátor o kapacitě $1,5 \mu\text{F}$ je nabit na napětí 57 V . Potom je odpojen od zdroje a připojen k cívce s indukčností 12 mH . Takto vzniklý obvod LC bude kmitat. Jaký bude největší proud v cívce? Předpokládejte, že odpor obvodu je zanedbatelný.

ŘEŠENÍ: Ze zákona zachování energie plyne, že maximální energie v kondenzátoru je rovna maximální energii v cívce. To podle rov. (33.1) a (33.2) znamená, že

$$\frac{Q^2}{2C} = \frac{LI^2}{2},$$

kde I je maximální proud a Q je maximální náboj. (Maximální proud a maximální náboj se nevyskytnou ve stejném okamžiku, ale jsou posunuty v čase o čtvrtinu periody, jak je zřejmé i z obr. 33.1 a 33.2.) Z uvedeného vztahu vypočteme I

(za Q dosadíme CU) a tím dostaneme

$$I = U\sqrt{\frac{C}{L}} = (57 \text{ V})\sqrt{\frac{(1,5 \cdot 10^{-6} \text{ F})}{(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})}} = 0,637 \text{ A} \doteq 640 \text{ mA.} \quad (\text{Odpověď})$$

33.3 ELEKTRO-MECHANICKÁ ANALOGIE

Podívejme se poněkud blíže na analogii mezi kmitajícím obvodem LC z obr. 33.1 a kmitající soustavou tvořenou tělesem a pružinou. V mechanické soustavě těleso + pružina se vyskytují dva druhy energie: jednak potenciální energie stlačené nebo napnuté pružiny, jednak kinetická energie pohybujícího se tělesa. Oba druhy energie jsou popsány známými vztahy v tab. 33.1 vlevo.

Tabulka také ukazuje dva druhy energie v kmitajícím obvodu LC . Můžeme vidět analogii mezi dvojicemi: potenciální + kinetická energie mechanické soustavy a magnetická + elektrická energie obvodu LC . Rovnice pro v a i na konci tabulky pomáhají lépe pochopit tuto analogii. Říkají nám, že náboji q odpovídá výchylka x a proud i odpovídá rychlost v (v obou rovnicích se druhá veličina získá derivací veličiny první). Tato obdoba nás vede k tomu, abychom seskupili energie do dvojic v řádcích tak, jak jsou v tabulce. Z tabulky vyplývá, že veličině $1/C$ odpovídá tuhost k a indukčnosti L odpovídá hmotnost m :

$$\begin{aligned} q &\text{ odpovídá } x, & 1/C &\text{ odpovídá } k, \\ i &\text{ odpovídá } v, & L &\text{ odpovídá } m. \end{aligned}$$

Podle matematického popisu je tedy obvod LC analogický soustavě těleso + pružina, kondenzátor odpovídá pružině a cívka tělesu.

Tabulka 33.1 Energie prvků kmitajících soustav

TĚLESO + PRUŽINA		CÍVKA + KONDENZÁTOR	
PRVEK	ENERGIE	PRVEK	ENERGIE
pružina	$E_p = \frac{1}{2}kx^2$	kondenzátor	$E_{el} = \frac{1}{2}(1/C)q^2$
těleso	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	cívka	$E_{mg} = \frac{1}{2}Li^2$
$v = dx/dt$		$i = dq/dt$	

Z čl. 16.3 víme, že úhlová frekvence kmitů soustavy těleso + pružina při zanedbání tření je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{soustava těleso + pružina}). \quad (33.3)$$

Uvedená analogie nás vede k tomu, abychom pro stanovení úhlové frekvence kmitů v obvodu LC (bez odporu) nahradili k veličinou $1/C$ a m veličinou L . Tím dostaneme

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{obvod } LC). \quad (33.4)$$

Tento výsledek odvodíme v následujícím článku.

33.4 KMITY LC KVANTITATIVNĚ

Nyní potvrdíme platnost rov. (33.4) pro úhlovou frekvenci kmitů LC . Současně budeme podrobněji zkoumat analogii mezi kmity obvodu LC a kmity soustavy těleso + pružina. Začneme tak, že rozšíříme naše dřívější studium kmitající soustavy těleso + pružina.

Oscilátor těleso + pružina

Kmity soustavy těleso + pružina jsme studovali v kap. 16 z hlediska přenosu energie. Tehdy jsme si však neodvodili základní rovnici, která mechanické kmity popisuje. To provedeme nyní.

Pro celkovou energii E oscilátoru těleso + pružina v libovolném okamžiku můžeme psát

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (33.5)$$

kde E_k je kinetická energie pohybujícího se tělesa a E_p je potenciální energie napnuté nebo stlačené pružiny. Přitom zanedbáváme tření, takže se celková energie E s časem nemění, i když se v a x mění. Platí tedy $dE/dt = 0$. Derivace rov. (33.5) podle času dává

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) = \\ &= mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (33.6)$$

Avšak $v = dx/dt$, a tedy $dv/dt = d^2x/dt^2$. Dosazením do rov. (33.6) pak dostaneme

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (\text{kmity tělesa na pružině}). \quad (33.7)$$

Diferenciální rovnice (33.7) je základní diferenciální rovnicí popisující kmity v soustavě těleso + pružina při zanedbání tření. Vystupuje v ní výchylka z rovnovážné polohy x a její druhá derivace podle času.

Obecné řešení rov. (33.7), tj. funkce $x(t)$, která popisuje kmity soustavy těleso + pružina, je, jak víme z rov. (16.3),

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{výchylka}), \quad (33.8)$$

kde X je amplituda výchylky mechanických kmitů (v kapitole 16 značená x_m), ω je úhlová frekvence kmitů a φ je počáteční fáze.

Oscilátor LC

Studujme nyní kmity v obvodu LC beze ztrát. Postupujme přitom stejně jako v případě soustavy těleso + pružina. Celková energie E , kterou má v každém okamžiku kmitající obvod LC , je

$$E = E_{\text{mg}} + E_{\text{el}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}, \quad (33.9)$$

kde E_{mg} je energie magnetického pole cívky a E_{el} je energie elektrického pole kondenzátoru. Protože jsme předpokládali, že odpor obvodu je nulový, energie není disipována, takže E zůstává v čase konstantní. Jinak řečeno, změna dE/dt je rovna nule. To vede ke vztahu:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = \\ &= Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = 0. \end{aligned} \quad (33.10)$$

Avšak $i = dq/dt$ a $di/dt = d^2q/dt^2$. Dosazením do rov. (33.10) dostaneme

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{kmity obvodu } LC), \quad (33.11)$$

což je *diferenciální rovnice*, která popisuje kmity v obvodu LC beze ztrát. Při porovnání rov. (33.11) a (33.7) vidíme, že mají stejný matematický tvar a liší se pouze jiným pojmenováním proměnných a konstant.

Protože tyto diferenciální rovnice jsou matematicky stejné, jejich řešení musí být také stejná. Protože q odpovídá x , můžeme napsat obecné řešení rov. (33.11) pro q analogicky s rov. (33.8):

$$\begin{aligned} q &= Q \cos(\omega t + \varphi) \\ & \quad (\text{časový průběh náboje}), \end{aligned} \quad (33.12)$$

kde Q je amplituda proměnného náboje, ω je úhlová frekvence elektromagnetických kmitů a φ je počáteční fáze.

První derivace rov. (33.12) podle času dává proud tekoucí v obvodu LC :

$$\begin{aligned} i &= \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \varphi) \\ & \quad (\text{časový průběh proudu}). \end{aligned} \quad (33.13)$$

Amplituda I tohoto harmonicky proměnného proudu je

$$I = \omega Q, \quad (33.14)$$

takže rov. (33.13) můžeme přepsat do tvaru

$$i = -I \sin(\omega t + \varphi). \quad (33.15)$$

Vztah (33.12) je řešením rov. (33.11). Ověříme to tak, že ho dosadíme spolu s jeho druhou derivací podle času do rov. (33.11). První derivací rov. (33.12) je rov. (33.13). Druhou derivací je

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega^2 Q \cos(\omega t + \varphi).$$

Dosažením za q a za $d^2 q/dt^2$ do rov. (33.11) dostaneme

$$-L\omega^2 Q \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C} Q \cos(\omega t + \varphi) = 0.$$

Má-li toto platit v libovolném okamžiku t , musí být $-L\omega^2 Q + Q/C = 0$, odkud

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Za této podmínky je tedy rov. (33.12) opravdu řešením rov. (33.11). Všimněme si, že tento výraz pro ω je stejný jako vztah (33.4), získaný na základě elektromechanické analogie.

Amplitudu Q i počáteční fázi φ určíme z počátečních podmínek. Jestliže v čase $t = 0$ neteče obvodem proud, tj. $i(0) = 0$, musí být $\varphi = 0$ a okamžitý náboj $q(0)$ musí nabývat své maximální hodnoty Q . Těmto počátečním podmínkám odpovídá obr. 33.1a.

Energii uloženou v elektrickém poli obvodu LC v libovolném čase t dostaneme z rov. (33.1) a (33.12):

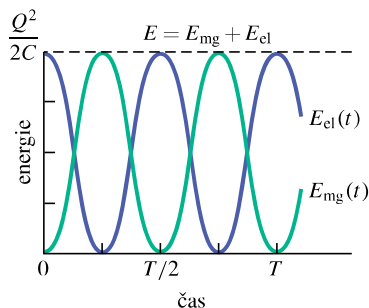
$$E_{el} = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C} \cos^2(\omega t + \varphi), \quad (33.16)$$

energii uloženou v magnetickém poli dostaneme z rovnice (33.2) a (33.13):

$$E_{mg} = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L\omega^2 Q^2 \sin^2(\omega t + \varphi).$$

Když za ω dosadíme z rov. (33.4), dostaneme

$$E_{mg} = \frac{Q^2}{2C} \sin^2(\omega t + \varphi). \quad (33.17)$$



Obr. 33.4 Energie elektrického a magnetického pole v kmitavém obvodu LC (obr. 33.1) vyjádřená jako funkce času. Po všimněme si, že úhrnná energie zůstává konstantní. T je perioda kmitů.

Obr. 33.4 znázorňuje časové průběhy $E_{el}(t)$ a $E_{mg}(t)$ pro případ $\varphi = 0$. Poznamenejme, že:

1. Maximální hodnota jak E_{el} , tak i E_{mg} je rovna $Q^2/(2C)$.
2. Součet E_{el} a E_{mg} je roven v každém okamžiku $Q^2/(2C)$.
3. V okamžiku, kdy je energie E_{el} maximální, je E_{mg} minimální (nulová) a naopak.

KONTROLA 2: Kondenzátor v obvodu LC má maximální napětí 17 V a maximální energii 160 μJ . Stanovte (a) emn na cívce a (b) energii akumulovanou v magnetickém poli v okamžiku, kdy je na kondenzátoru napětí 5 V a energie 10 μJ .

PŘÍKLAD 33.2

(a) Vyjádříme pomocí maximálního náboje Q náboj q na kondenzátoru kmitavého obvodu LC v okamžiku, kdy je energie rozdělena stejným dílem mezi elektrické a magnetické pole. Předpokládejme, že $L = 12 \text{ mH}$ a $C = 1,7 \mu\text{F}$.

ŘEŠENÍ: Podle zadání je $E_{el} = \frac{1}{2} E_{el, \max}$. Okamžitá a maximální energie akumulovaná v kondenzátoru jsou

$$E_{el} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{el, \max} = \frac{Q^2}{2C}.$$

Zadání vyžaduje, aby

$$\frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{2C},$$

a odtud

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} Q \doteq 0,707 Q. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Kdy je tato podmínka splněna, má-li kondenzátor největší náboj v čase $t = 0$?

ŘEŠENÍ: Rov. (33.12) vyjadřuje, jak se q mění s časem. Protože v čase $t = 0$ je $q = Q$, je počáteční fáze φ rovna nule. Dosažením $\varphi = 0$ a $q = 0,707 Q$ do rov. (33.12) dostaneme

$$0,707 Q = Q \cos \omega t,$$

odkud

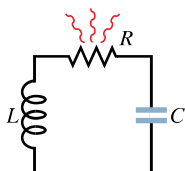
$$\omega t = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

To odpovídá jedné osmině kmitu. Dosadíme-li za ω z rovnice (33.4), dostaneme hledaný čas

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi}{4\omega} = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = \frac{\pi\sqrt{(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(1,7 \cdot 10^{-6} \text{ F})}}{4} = \\ &= 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ s} \doteq 110 \mu\text{s}. \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

33.5 TLUMENÉ KMITY V OBVODU RLC

Obvod skládající se z rezistoru, cívky a kondenzátoru se nazývá **obvod RLC** . Probereme zde pouze **sériový obvod RLC** , který je na obr. 33.5. Je-li přítomen rezistor R , potom celková *elektromagnetická energie* E obvodu (součet energie elektrického a magnetického pole) již nezůstává konstantní, ale klesá s časem tak, jak je energie postupně disipována v rezistoru. Proto také postupně klesá amplituda kmitů náboje, proudu a napětí; říkáme, že kmity jsou **tlumené**. Jak uvidíme, jsou kmity v obvodu RLC tlumeny stejně jako je tomu v tlumené soustavě těleso + pružina (čl. 16.8).



Obr. 33.5 Sériový obvod RLC . Protože proud v obvodu prochází (střídavě) rezistorem, dochází k disipaci elektromagnetické energie a kmity se tlumí (zmenšuje se jejich amplituda).

Abychom tyto kmity analyzovali, napíšeme rovnici pro celkovou energii E elektromagnetického pole tohoto obvodu, a to pro libovolný okamžik. Tato energie se ukládá jen v cívce a kondenzátoru podle rov. (33.9):

$$E = E_{\text{mg}} + E_{\text{el}} = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \quad (33.18)$$

Nyní však již celková energie není konstantní, ale klesá tak, jak je postupně disipována. Rychlost této disipace (tj. ztrátový výkon) je podle rov. (27.22)

$$\frac{dE}{dt} = -Ri^2, \quad (33.19)$$

kde znaménko minus říká, že E s časem klesá. Derivací rov. (33.18) podle času a dosazením výsledku do rovnice (33.19) dostaneme

$$Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} = -i^2 R.$$

Dosadíme-li dq/dt za i a d^2q/dt^2 za di/dt , dostaneme po vykrácení i

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0 \quad (\text{obvod } RLC), \quad (33.20)$$

což je diferenciální rovnice popisující tlumené kmity v sériovém obvodu RLC .

Tato rovnice má řešení

$$q = Qe^{-Rt/(2L)} \cos(\omega't + \varphi), \quad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2} \quad (33.22)$$

a $\omega = 1/\sqrt{LC}$ je stejně jako v případě netlumených kmitů. Rov. (33.21) vyjadřuje, jak se v čase mění náboj Q na kondenzátoru v tlumeném obvodu RLC . Tato rovnice je elektromagnetickým protějškem rov. (16.40), která určuje časový průběh výchylky tlumeného mechanického oscilátoru těleso + pružina.

Rov. (33.21) popisuje kmity (kosinový člen) s *exponenciálně klesající amplitudou* $Qe^{-Rt/(2L)}$. Úhlová frekvence ω' tlumených kmitů je tedy vždy menší než úhlová frekvence ω netlumených kmitů; pokud je odpor R dostatečně malý, lze ω' nahradit hodnotou ω .

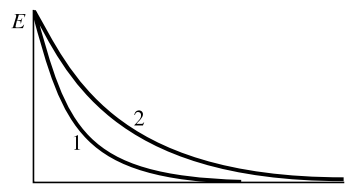
Vyjádříme dále celkovou elektromagnetickou energii E obvodu jako funkci času. Jeden způsob, jak toho dosáhnout, je sledovat energii elektrického pole v kondenzátoru; ta je dána rov. (33.1) $E_{\text{el}} = q^2/(2C)$. Dosadíme-li do ní rov. (33.21), dostaneme

$$\begin{aligned} E_{\text{el}} &= \frac{q^2}{2C} = \frac{(Qe^{-Rt/(2L)} \cos(\omega't + \varphi))^2}{2C} = \\ &= \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L} \cos^2(\omega't + \varphi). \end{aligned} \quad (33.23)$$

Rov. (33.23) ukazuje, že energie elektrického pole se periodicky mění v čase se čtvercem kosinu fáze a že amplituda těchto kmitů klesá exponenciálně s časem. Energie magnetického pole cívky se s časem mění poněkud složitěji. Lze odvodit, že střední hodnota celkové energie v obvodu RLC klesá s časem exponenciálně podle vztahu

$$E = \frac{Q^2}{2C} e^{-Rt/L}. \quad (33.24)$$

KONTROLA 3: (a) Obrázek ukazuje časovou závislost střední hodnoty celkové elektromagnetické energie E ve dvou obvodech RLC se stejnými kondenzátory a cívkami. Která křivka odpovídá obvodu s větším R ? (b) Pokud by měly oba obvody stejnou hodnotu R i C , která křivka by odpovídala obvodu s větší hodnotou L ?



PŘÍKLAD 33.3

Sériový obvod RLC má indukčnost $L = 12 \text{ mH}$, kapacitu $C = 1,6 \text{ }\mu\text{F}$ a odpor $R = 1,5 \text{ }\Omega$.

(a) Za jakou dobu t poklesne amplituda kmitů náboje v obvodu na 50 % své původní hodnoty?

ŘEŠENÍ: Rov. (33.21) vyjadřuje exponenciální útlum při kmitání náboje. Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % původní hodnoty, jestliže

$$Qe^{-Rt/(2L)} = 0,50Q.$$

Zkrátíme Q a logaritmujeme obě strany; tím dostaneme

$$-\frac{Rt}{2L} = \ln 0,50.$$

Řešením této rovnice vzhledem k t a dosazením zadaných hodnot dostaneme

$$t = -\frac{2L}{R} \ln 0,50 = -\frac{2(12 \cdot 10^{-3} \text{ H}) \ln 0,50}{(1,5 \text{ }\Omega)} = 0,011 \text{ s} \doteq 11 \text{ ms.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Kolik kmitů proběhne během této doby?

ŘEŠENÍ: Protože doba kmitu je $T = 2\pi/\omega$ a úhlová frekvence je $\omega = 1/\sqrt{LC}$, dostaneme $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Každý kmit trvá jednu periodu, takže v časovém intervalu $\Delta t = 0,011 \text{ s}$ je počet kmitů roven

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{(0,011 \text{ s})}{2\pi\sqrt{(12 \cdot 10^{-3} \text{ H})(1,6 \cdot 10^{-6} \text{ F})}} \doteq 13. \quad (\text{Odpověď})$$

Amplituda kmitů náboje poklesne na 50 % přibližně během 13 kmitů. Toto tlumení je výrazně menší než tlumení z obr. 33.3, kde klesala amplituda o něco více než 50 % během jednoho kmitu.

33.6 STŘÍDAVÉ PROUDY

Kmity v obvodu RLC nebudou tlumeny, jestliže vhodný vnější zdroj elektromotorického napětí dodá dostatek energie k pokrytí tepelných ztrát na rezistoru R . Elektrické obvody v domácnostech, úřadech a továrnách obsahující bezpočet obvodů RLC , které odebírají tuto energii od místních rozvodných podniků. Ve většině zemí se energie dodává formou střídavého emn, resp. **střídavého proudu***. Tyto

* Proud v čase neproměnný, např. z baterií a akumulátorů, se nazývá **stejnoseměrný**.

kmitající emn a proudy se mění v čase harmonicky s kmitočtem 50 Hz, což znamená, že změní 100krát za sekundu svůj směr. (V některých zemích, např. v USA, se používá kmitočet 60 Hz; směr se za sekundu změní 120krát.)

Všimněme si jedné pozoruhodnosti střídavého proudu. Viděli jsme, že driftová rychlost elektronů (čl. 27.3) ve vodičích obvykle nepřesahuje $4 \cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Jestliže nyní změníme směr proudu každou setinu sekundy, posune se elektron asi o $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ za půl periody. Tato vzdálenost představuje posun elektronu asi o 10 atomů, načež je elektron přinucen obrátit směr. Můžeme se tedy ptát, jak se může elektron při střídavém proudu vůbec dostat ke spotřebiči.

Odpověď spočívá v tom, že vodivé elektrony se nemusí „někam dostat“. Řekneme-li, že proud ve vodiči je jeden ampér, míníme tím, že nosiče náboje, které projdou průřezem vodiče, jím přenesou náboj jednoho coulombu za sekundu. Velikost rychlosti, kterou náboje procházejí rovinou průřezu, není přitom podstatná. Tentýž proud může odpovídat mnoha nábojům pohybujícím se pomalu, nebo několika nábojům pohybujícím se velmi rychle. Dále si uvědomme, že fyzikální popud, který mění směr pohybu elektronů a který má původ ve střídavém emn dodávaném z generátoru v elektrárně, se šíří jako elektromagnetická vlna podél tohoto vodiče s rychlostí blízkou rychlosti světla. Všechny elektrony, bez ohledu na jejich polohu, dostávají „pokyny pro změnu směru“ prakticky ve stejném okamžiku. Je také na místě poznamenat, že v mnoha zařízeních (jako jsou žárovky a tepelné spotřebiče) není směr pohybu elektronů důležitý. Elektrony totiž takovým zařízením předávají energii srážkami s jeho atomy, tedy dějem, kde směr pohybu náboje není podstatný.

Základní výhoda střídavých proudů je tato: *s časovou změnou proudů se mění i magnetické pole obklopující vodiče*. To dává možnost využít Faradayův zákon elektromagnetické indukce, což mezi mnoha jinými důsledky znamená, že můžeme libovolně zvýšit nebo snížit velikost střídavého napětí použitím transformátoru, jak uvidíme v této kapitole později. Navíc je střídavý proud vhodnější k použití v rotačních strojích, jako jsou generátory a motory, než (v čase stálý) stejnosměrný proud.

Obr. 33.6 ukazuje jednoduchý model alternátoru — generátoru střídavého napětí. Přinutíme-li vodivou smyčku točit se ve vnějším magnetickém poli o indukci \mathbf{B} , indukuje se v ní emn s harmonickým průběhem (kap. 31, úloha 25):

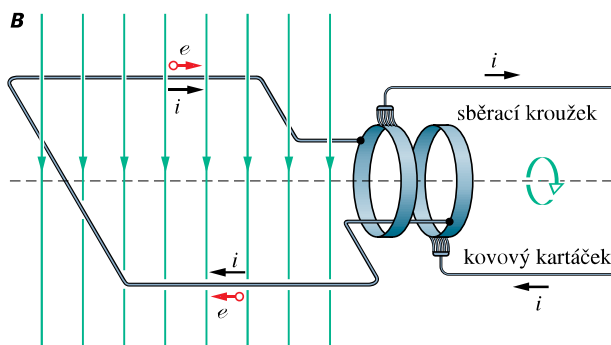
$$e = \mathcal{E} \sin \omega_b t. \quad (33.25)$$

Úhlová frekvence emn, označená ω_b , je rovna úhlové rychlosti, se kterou se smyčka otáčí v magnetickém poli. *Fáze* emn je $\omega_b t$ a *amplituda* emn je \mathcal{E} . Je-li otáčející se smyčka

částí uzavřeného obvodu, budí v něm toto emn **harmonický*** proud se stejnou úhlovou frekvencí ω_b , která se nazývá **budicí úhlová frekvence**. Proud můžeme vyjádřit vztahem

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.26)$$

kde I je amplituda buzeného proudu. Zvolíme-li znaménko před φ záporné, pak $\varphi > 0$ přímo udává fázové zpoždění proudu i vůči e ; proud i totiž nemusí být obecně ve fázi s e . Jak uvidíme, závisí fázový posun φ na vlastnostech obvodu, který je ke generátoru připojen. (Je-li $\varphi < 0$, jde ovšem o předbíhání, nikoli zpoždění.)



Obr. 33.6 Princip generátoru střídavého proudu: vodivá smyčka se otáčí ve vnějším magnetickém poli. Střídavé emn indukované ve smyčce se z ní vyvede pomocí sběracích kroužků připojených ke smyčce. Po nich kloužou vodivé kartáčky spojené s vnějším obvodem. (V praxi se místo smyčky používá cívky s mnoha závitů, aby indukované emn bylo větší.)

33.7 NUCENÉ KMITY

Viděli jsme, že náboj, napětí a proud, jakmile vzniknou, kmitají jak v netlumeném obvodu LC , tak v slabě tlumeném obvodu RLC (s dostatečně malým R) s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Takovým kmitům se říká **vlastní kmit** (bez vnějšího emn) a úhlová frekvence ω se nazývá **vlastní úhlová frekvence** obvodu.

Je-li k obvodu RLC připojeno vnější střídavé emn s frekvencí ω_b , potom mluvíme o **nučených** nebo též **buzených kmit**ech. Dá se dokázat, že tyto kmity mají po odeznění přechodových jevů rovněž frekvenci ω_b , a to bez ohledu na hodnotu ω .

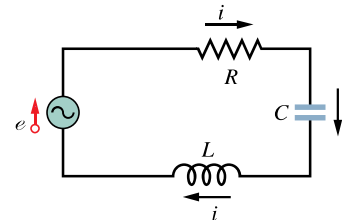
Nucené kmity (náboje, proudu, napětí) vždy převzou po celkem krátké době budicí úhlovou frekvenci ω_b , ať už byla vlastní úhlová frekvence ω jakákoli.

* Je to běžný název pro sinusový a kosinusový průběh s libovolnou počáteční fází.

Jak uvidíme v čl. 33.9, závisí amplitudy kmitů značně na tom, jak jsou navzájem blízké velikosti ω_b a ω . Jsou-li obě úhlové frekvence stejné, nastane **rezonance**, kdy amplituda proudu I v obvodu je největší.

33.8 TŘI JEDNODUCHÉ OBVODY

V dalších článcích připojíme vnější zdroj střídavého emn k sériovému obvodu RLC tak jako na obr. 33.7. Potom vyjádříme amplitudu I a počáteční fázi φ harmonicky kmitajícího proudu pomocí amplitudy emn \mathcal{E} a úhlové frekvence ω_b vnějšího zdroje emn. Nejprve však prostudujeme tři jednodušší obvody, z nichž každý má kromě vnějšího zdroje emn pouze jeden obvodový prvek: R , L , nebo C . Začneme s rezistorem (čistě **odporová zátěž**).



Obr. 33.7 Sériový obvod skládající se z generátoru, rezistoru, kondenzátoru a cívky; generátor je znázorněn kroužkem se sinusoidou. Je zdrojem střídavého emn, které v obvodu vyvolá střídavý proud. Na obrázku je naznačen směr emn a proudu v jednom okamžiku.

Odporová zátěž

Obr. 33.8a ukazuje obvod s rezistorem o odporu R připojeným ke generátoru harmonického emn. Pro smyčku (jak víme z čl. 28.3) platí

$$e - u_R = 0.$$

Po dosazení z rov. (33.25) dostaneme

$$u_R = \mathcal{E} \sin \omega_b t.$$

Napětí na rezistoru se tedy mění harmonicky s úhlovou frekvencí rovnou ω_b a amplitudou, která se rovná amplitudě přiloženého emn. Můžeme proto psát

$$u_R = U_R \sin \omega_b t. \quad (33.27)$$

Z definice odporu ($R = u/i$) můžeme vyjádřit proud rezistorem vztahem

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{U_R}{R} \sin \omega_b t. \quad (33.28)$$

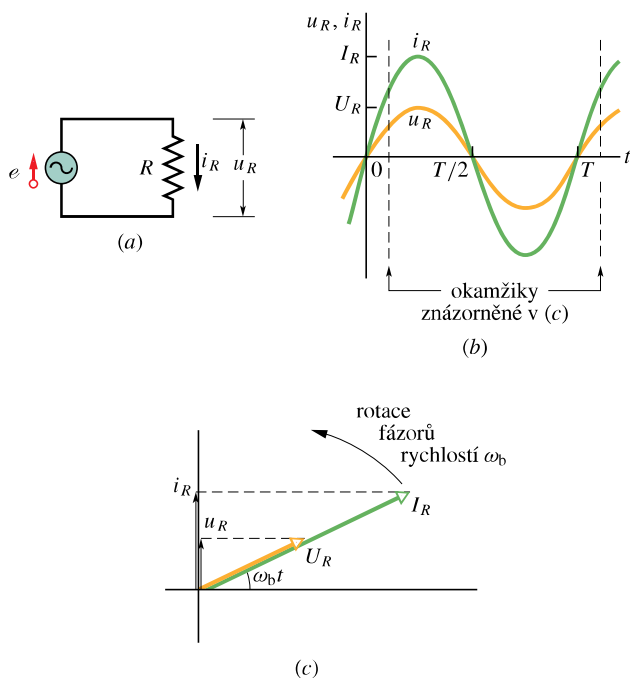
Podle rov. (33.26) můžeme tento proud zapsat ve tvaru

$$i_R = I_R \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.29)$$

kde I_R je amplituda proudu i_R v rezistoru. Porovnáním rov. (33.28) a (33.29) vidíme, že pro čistě odporovou zátěž je $\varphi = 0^\circ$ a že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

$$U_R = I_R R \quad (\text{rezistor}). \quad (33.30)$$

V obvodech střídavého proudu odporovou zátěž R zpravidla nazýváme **rezistance**. Ačkoli jsme našli tento vztah pro konkrétní obvod odpovídající obr. 33.8a, lze ho použít na libovolný rezistor v obvodu střídavého proudu.



Obr. 33.8 (a) Rezistor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud a napětí na rezistoru jsou ve fázi a uskuteční jeden kmit za jednu periodu T . (c) Fázorový diagram ukazuje tutěž situaci jako obr. (b).

Porovnáním rov. (33.27) a (33.28) vidíme, že obě časové závislosti $u_R(t)$ a $i_R(t)$ jsou dány tímž výrazem $\sin \omega_b t$, a tedy rozdíl jejich fází je $\varphi = 0^\circ$. Říkáme, že obě veličiny jsou **ve fázi**, což znamená, že jejich maxima (a minima) nastanou ve stejných okamžicích. Obr. 33.8b se závislostmi $u_R(t)$ a $i_R(t)$ tuto skutečnost dokresluje. Poznamenejme, že $u_R(t)$ a $i_R(t)$ nejsou tlumené proto, že generátor dodává do obvodu energii a nahrazuje energii disipovanou v rezistoru.

Časově proměnné veličiny $u_R(t)$ a $i_R(t)$ můžeme znázornit též geometricky pomocí **fázorů**. Připomeňme si z čl. 17.10, že fázory jsou vektory, které rotují kolem počátku souřadnic. Fázory představující napětí na rezistoru a proud, který jím prochází, jsou nakresleny v jistém okamžiku t na obr. 33.8c. Fázory mají následující vlastnosti:

Úhlová rychlost: Fázory rotují (při popisu střídavých proudů) proti směru otáčení hodinových ručiček okolo počátku s úhlovou rychlostí, která je rovna úhlové frekvenci ω_b napětí u_R i proudu i_R .

Délka: Délka fázoru představuje amplitudu střídavé veličiny, tedy U_R pro napětí a I_R pro proud.

Projekce: Projekce fázoru do svislé osy udává okamžitou hodnotu střídavé veličiny, tedy napětí u_R a proud i_R v čase t . Když je $\omega_b t = 90^\circ$, směřuje fázor svisle vzhůru a jeho projekce je právě rovna jeho délce.

Úhel pootočení: S časem proměnný úhel pootočení fázoru měříme od vodorovné osy (obr. 33.8c). Je roven fázi střídavé veličiny v čase t . Na obr. 33.8c jsou napětí a proud ve fázi. Proto mají i jejich fázory tutěž fázi $\omega_b t$, tj. stejný úhel pootočení v obrázku a rotují tedy společně. Na obr. 33.9c jsou fázory navzájem posunuty o 90° .

Kapacitní zátěž

Obr. 33.9a ukazuje obvod sestavený z kondenzátoru a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, kterým jsme dospěli k rov. (33.27), zjistíme, že napětí na kondenzátoru je

$$u_C = U_C \sin \omega_b t, \quad (33.31)$$

kde U_C je amplituda napětí na kondenzátoru. Z definice kapacity plyne

$$q_C = C u_C = C U_C \sin \omega_b t. \quad (33.32)$$

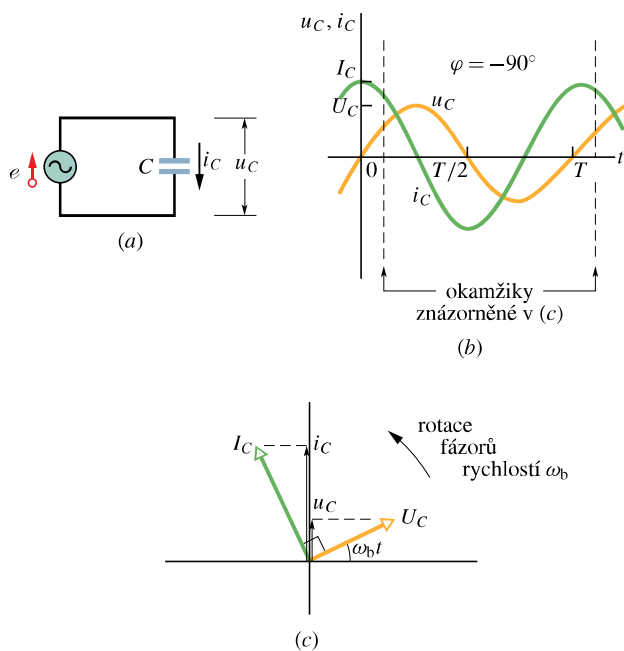
Více než náboj nás však zajímá proud. Derivováním rov. (33.32) dostaneme

$$i_C = \frac{dq_C}{dt} = \omega_b C U_C \cos \omega_b t. \quad (33.33)$$

Provedeme dále dvě úpravy rov. (33.33). Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **kapacitní reaktanci** X_C kondenzátoru, definovanou vztahem

$$X_C = \frac{1}{\omega_b C} \quad (\text{kapacitní reaktance}). \quad (33.34)$$

Její hodnota závisí nejen na kapacitě C , ale i na úhlové frekvenci ω_b . Vidíme, že jednotkou pro X_C je ohm, stejně



Obr. 33.9 (a) Kondenzátor je připojen ke zdroji harmonického emn. (b) Proud předbíhá před napětím o 90° . (c) Fázorový diagram ukazuje tutěž situaci.

jako pro odpor R . Za druhé: v rov. (33.33) nahradíme funkci $\cos \omega_b t$ funkcí sinus fázově posunutou:

$$\cos \omega_b t = \sin(\omega_b t + 90^\circ).$$

Po těchto dvou úpravách zapíšeme rov. (33.33) ve tvaru

$$i_C = \left(\frac{U_C}{X_C} \right) \sin(\omega_b t + 90^\circ). \quad (33.35)$$

Proud i_C však můžeme vyjádřit také podle rov. (32.26):

$$i_C = I_C \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.36)$$

kde I_C je amplituda veličiny i_C . Porovnáním rov. (33.35) a (33.36) vidíme, že při čistě kapacitní zátěži je $\varphi = -90^\circ$. Vidíme též, že amplitudy napětí a proudu jsou spolu spojeny vztahem

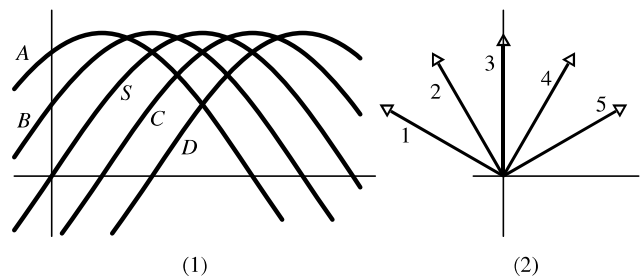
$$U_C = I_C X_C \quad (\text{kondenzátor}). \quad (33.37)$$

Ačkoli jsme našli tento vztah pro konkrétní obvod na obr. 33.9a, lze ho použít na libovolný kondenzátor v jakémkoli obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.31) a (33.35) nebo pohledem na obr. 33.9b zjistíme, že veličiny u_C a i_C jsou posunuty o úhel 90° , tedy o čtvrtinu periody. Navíc vidíme, že i_C předbíhá u_C , což znamená, že na obr. 33.9a dosahuje i_C maxima o čtvrtinu periody před u_C .

Tento vztah mezi i_C a u_C je znázorněn na fázorovém diagramu v obr. 33.9c: fázor I_C předbíhá před fázorem U_C o úhel 90° .

KONTROLA 4: Obrázek (1) ukazuje sinusovou funkci $S(t) = \sin \omega_b t$ a čtyři další sinusoidy $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, každou tvaru $\sin(\omega_b t - \varphi)$. (a) Seřadte sestupně uvedené čtyři křivky podle hodnoty φ . (b) Která z křivek odpovídá jednotlivým fázorům z obrázku (2)? (c) Která křivka časově předbíhá před ostatními?



Induktivní zátěž

Obr. 33.10a ukazuje obvod sestavený z cívky a generátoru harmonického emn podle rov. (33.25). Postupem, který nás přivedl k rov. (33.27) a (33.31), dostaneme, že napětí na cínce je

$$u_L = U_L \sin \omega_b t, \quad (33.38)$$

kde U_L je amplituda napětí u_L . Z rov. (31.40) můžeme vyjádřit napětí na cínce L , ve které se mění proud s rychlostí di_L/dt :

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (33.39)$$

Z rov. (33.38) a (33.39) dostaneme

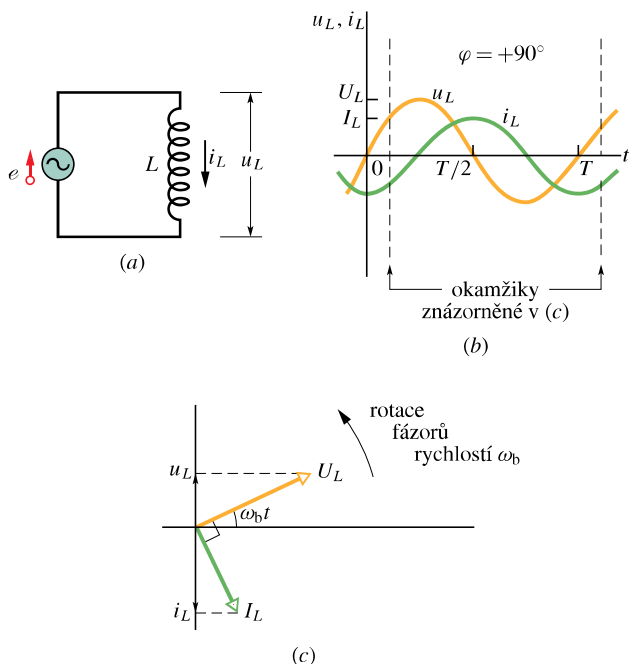
$$\frac{di_L}{dt} = \frac{U_L}{L} \sin \omega_b t. \quad (33.40)$$

Více než časová derivace proudu nás však zajímá samotný proud. Ten dostaneme integrací rov. (33.40):

$$\begin{aligned} i_L &= \int di_L = \frac{U_L}{L} \int \sin \omega_b t \, dt = \\ &= - \left(\frac{U_L}{\omega_b L} \right) \cos \omega_b t. \end{aligned} \quad (33.41)$$

Provedeme dále dvě úpravy této rovnice. Za prvé: aby se zápis podobal rov. (33.28), zavedeme **induktivní reaktanci** X_L cívky vztahem

$$X_L = \omega_b L \quad (\text{induktivní reaktance}). \quad (33.42)$$



Obr. 33.10 (a) Cívka je připojena ke zdroji harmonického emn. (b) Proud je zpožděn za napětím o 90° . (c) Fázorový diagram ukazuje totéž.

Její hodnota závisí nejen na indukčnosti, ale i na úhlové frekvenci ω_b . Opět vidíme, že jednotkou X_L je ohm, stejně jako pro X_C a R .

Za druhé: zaměníme funkci $-\cos \omega_b t$ v rov. (33.41) funkcí sinus fázově posunutou:

$$-\cos \omega_b t = \sin(\omega_b t - 90^\circ).$$

Po těchto úpravách zapíšeme rov. (33.41) ve tvaru

$$i_L = \frac{U_L}{X_L} \sin(\omega_b t - 90^\circ). \quad (33.43)$$

Proud i_L však můžeme vyjádřit také podle rov. (33.26):

$$i_L = I_L \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.44)$$

kde I_L je amplituda proudu i_L cívky. Porovnáním rovnic (33.43) a (33.44) vidíme, že pro čistě induktivní zátěž je $\varphi = +90^\circ$. Také vidíme, že mezi amplitudou napětí a amplitudou proudu platí vztah

$$U_L = I_L X_L \quad (\text{cívka}). \quad (33.45)$$

Ačkoli jsme tento vztah našli pro konkrétní obvod z obr. 33.10a, lze ho použít pro jakoukoli cívku v obvodu střídavého proudu.

Porovnáním rov. (33.38) a (33.43) nebo pohledem na obr. 33.10b shledáme, že fáze veličin i_L a u_L jsou navzájem posunuty o 90° . V tomto případě je však i_L zpožděn za u_L . To znamená, že sledujeme-li průběh proudu i_L a napětí u_L v obvodu z obr. 33.10a, zjistíme, že i_L dosáhne svého maxima o čtvrtinu periody později než u_L .

Z fázorového diagramu v obr. 33.10c je to také zřejmé. Fázor I_L má fázové zpoždění oproti fázoru U_L o úhel 90° . Přesvědčte se, že obr. 33.10c znázorňuje situaci popsanou rov. (33.38) a (33.43).

RADY A NÁMĚTY

Bod 33.1: Předbíhání a zpoždění v obvodech se střídavými proudy

Tab. 33.2 uvádí přehled vztahů mezi proudem i a napětím u pro každý ze tří typů uvažovaných obvodových prvků. Přiloží-li se na ně napětí, je proud ve fázi s napětím na rezistoru, proud předbíhá před napětím na kondenzátoru a je zpožděn za napětím na cívce.

Fázi φ i fázový posun $\Delta\varphi$ vyjadřujeme obvykle v obloukové míře v radiánech nebo ve stupních. Někdy je však názornější vyjádření pomocí času $t = \varphi/\omega$, resp. $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$. Říkáme: „Proud i napětí nabývají maxima současně“, „Proud předbíhá před napětím“ apod.

PŘÍKLAD 33.4

(a) V obr. 33.9a je $C = 15,0 \mu\text{F}$, $\mathcal{E} = U_C = 36,0 \text{ V}$ a kmitočet budičho napětí je $f_b = 60,0 \text{ Hz}$. Jaká je amplituda proudu I_C ?

ŘEŠENÍ: Hledanou amplitudu dostaneme z rov. (33.37) (tj. $U_C = I_C X_C$), vypočteme-li nejprve kapacitní reaktanci X_C . Z rov. (33.34), kde $\omega_b = 2\pi f_b$, plyne

$$X_C = \frac{1}{2\pi f_b C} = \frac{1}{2\pi(60,0 \text{ Hz})(15,0 \cdot 10^{-6} \text{ F})} = 177 \Omega.$$

Potom z rov. (33.37)

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = \frac{(36,0 \text{ V})}{(177 \Omega)} = 0,203 \text{ A.} \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Nechť v obr. 33.10a je $L = 230 \text{ mH}$, $\mathcal{E} = U_L = 36,0 \text{ V}$ a $f_b = 60,0 \text{ Hz}$. Jaká je amplituda proudu I_L ?

ŘEŠENÍ: Amplitudu můžeme získat z rov. (33.45) ($I_L = U_L/X_L$) tak, že nejprve vypočteme induktivní reaktanci X_L . Z rov. (33.42), kde položíme $\omega_b = 2\pi f_b$, dostaneme

$$X_L = 2\pi f_b L = 2\pi(60,0 \text{ Hz})(230 \cdot 10^{-3} \text{ H}) = 86,7 \Omega.$$

Tabulka 33.2 Vztahy mezi amplitudou a fází pro střídavé proudy a napětí

OBVODOVÝ PRVEK	SYMBOL	REZISTANCE NEBO REAKTANCE*	FÁZE PROUDU	FÁZOVÝ POSUN φ	VZTAH MEZI AMPLITUDAMI
Rezistor	R	R	ve fázi s u_R	0°	$U_R = I_R R$
Kondenzátor	C	$X_C = 1/(\omega_b C)$	předbíhá u_C o 90°	-90°	$U_C = I_C X_C$
Cívka	L	$X_L = \omega_b L$	zpožděna za u_L o 90°	$+90^\circ$	$U_L = I_L X_L$

* Někdy se pro kapacitní reaktanci užívá název **kapacitance** a pro induktivní reaktanci název **induktance**.

Potom z rov. (33.45)

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} = \frac{(36,0 \text{ V})}{(86,7 \Omega)} = 0,415 \text{ A. (Odpověď)}$$

(c) Napište výraz pro časově proměnný proud i_L v obvodu podle (b).

ŘEŠENÍ: Rov. (33.44) je obecným řešením pro i_L . Pro vyčtený proud $I_L = 0,415 \text{ A}$ a pro

$$\omega_b = 2\pi f_b = 120\pi \text{ s}^{-1}$$

dostaneme při $\varphi = 90^\circ = \pi/2$ rad pro tento čistě induktivní obvod

$$\begin{aligned} i_L &= I_L \sin(\omega_b t - \varphi) = \\ &= (0,415 \text{ A}) \sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (\text{Odpověď}) \end{aligned}$$

KONTROLA 5: Jestliže zvýšíme budící kmitočet f_b v obvodu (a) podle obr. 33.9a, (b) podle obr. 33.10a, amplituda proudu I v obvodu vzroste, klesne, nebo zůstane stejná?

33.9 SÉRIOVÝ OBVOD RLC

Nyní jsme připraveni vyšetřit situaci, kdy připojíme zdroj harmonického emn

$$e = \mathcal{E} \sin \omega_b t \quad (\text{přiložené emn}) \quad (33.46)$$

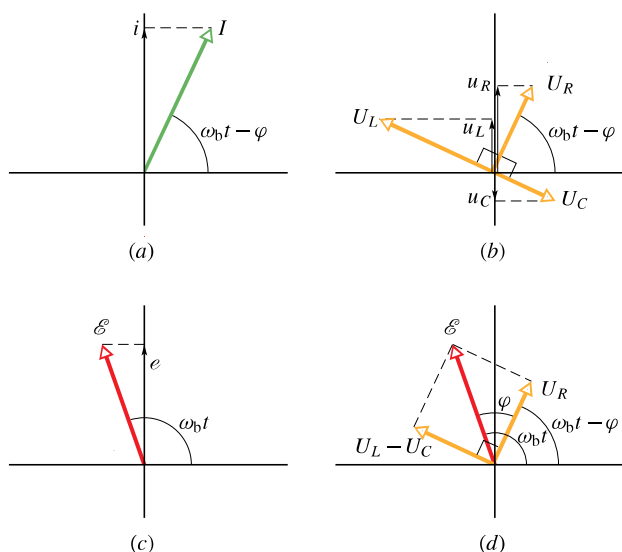
k sériovému obvodu RLC podle obr. 33.7. Protože R , L a C jsou zapojeny v sérii, protéká tentýž proud

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi) \quad (33.47)$$

všemi třemi prvky. Chceme nalézt amplitudu I proudu a fázový posun φ proudu i vůči e .

Řešení se zjednoduší použitím fázorových diagramů. Začneme s obr. 33.11a, který ukazuje fázor představující proud z rov. (33.47) v libovolném čase t . Délka fázoru je

amplituda I , projekce fázoru na svislou osu je okamžitý proud i v čase t a úhel pootočení fázoru je fáze $(\omega_b t - \varphi)$ proudu v čase t .



Obr. 33.11 (a) Fázor harmonického proudu v buzeném obvodu RLC na obr. 33.7 v čase t . V obrázku je vyznačena amplituda I , okamžitá hodnota i a fáze $(\omega_b t - \varphi)$. (b) Fázory napětí na cívce, rezistoru a kondenzátoru, vztažené k fázoru proudu v (a). (c) Fázor harmonického emn, které budí proud podle (a). (d) Fázor emn je roven vektorovému součtu tří fázorů napětí podle (b). Fázory U_L a U_C jsou sečteny do výsledného fázoru $(U_L - U_C)$.

Obr. 33.11b ukazuje fázory napětí na R , L a C ve stejném okamžiku t . Každý fázor je vztažen k fázoru proudu I z obr. 33.11a podle pravidel uvedených v tab. 33.2:

Rezistor: Napětí a proud jsou ve fázi, takže fázor napětí U_R má stejný směr jako fázor I .

Kondenzátor: Proud předbíhá napětí o 90° , takže fázor napětí U_C je zpožděn o 90° za fázorem I .

Cívka: Proud je zpožděn za napětím o 90° , takže naopak fázor napětí U_L předbíhá o 90° před fázorem I .

Obr. 33.11b také ukazuje okamžité hodnoty napětí u_R , u_C a u_L na prvcích R , C a L v čase t . Tato napětí jsou projekce odpovídajících fázorů na svislou osu.

Obr. 33.11c ukazuje fázor představující přiložené emn z rov. (33.46). Délka fázoru je amplituda \mathcal{E} , projekce fázoru na svislou osu je okamžitá hodnota emn v čase t a úhel pootočení fázoru je fáze $\omega_b t$ emn v čase t .

Smyčkové pravidlo říká, že v libovolném okamžiku je součet napětí u_R , u_C a u_L roven přiloženému emn e :

$$e = u_R + u_C + u_L. \quad (33.48)$$

V libovolném okamžiku t je projekce emn v obr. 33.11c tedy rovna součtu projekcí u_R , u_C a u_L v obr. 33.11b. Protože fázory rotují se stejnou úhlovou rychlostí, platí tato rovnice v každém okamžiku. To znamená, že fázor \mathcal{E} v obr. 33.11c musí být roven vektorovému součtu tří fázorů napětí U_R , U_C a U_L v obr. 33.11b.

Uvedené vektorové skládání fázorů můžeme zjednodušit nejprve využitím té skutečnosti, že fázory U_C a U_L mají opačné směry. Lze je proto nahradit jediným fázorem $U_L - U_C$, jak je ukázáno v obr. 33.11d. Vektorový součet všech tří napěťových fázorů z obr. 33.11b nalezneme jako výslednici dvou fázorů U_R a $(U_L - U_C)$ v obr. 33.11d. Tento výsledek je roven fázoru \mathcal{E} , jak je naznačeno.

Oba trojúhelníky v obr. 33.11d jsou pravoúhlé. Použitím Pythagorovy věty dostaneme vztah

$$\mathcal{E}^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2. \quad (33.49)$$

Z tab. 33.2 dosadíme za amplitudy napětí na jednotlivých prvcích, takže

$$\mathcal{E}^2 = (IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2 \quad (33.50)$$

a z toho po úpravě dostaneme

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (33.51)$$

Jmenovatel v rov. (33.51) má význam celkového odporu sériového obvodu RLC a nazývá se **impedance** obvodu pro budící úhlovou frekvenci ω_b :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (\text{definice impedance}). \quad (33.52)$$

Rov. (33.51) potom můžeme psát ve tvaru

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z}. \quad (33.53)$$

Dosadíme-li za X_C a X_L z rov. (33.34) a (33.42), můžeme rov. (33.51) zapsat ve tvaru

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}} \quad (\text{amplituda proudu}). \quad (33.54)$$

Tím jsme dosáhli poloviny našeho záměru: odvodili jsme výraz pro amplitudu I proudu. Hodnota I závisí na rozdílu $(\omega_b L - 1/\omega_b C)$ v rov. (33.54) neboli na rozdílu $X_L - X_C$ v rov. (33.51). Nezáleží však na tom, která z obou veličin je větší, neboť počítáme druhou mocninu jejich rozdílu.

V tomto článku jsme se zabývali **ustáleným harmonickým proudem**. Ten se vyskytuje v obvodu až po určité době od připojení zdroje emn. Ihned po připojení obvodu k emn jím protéká po krátkou dobu **přechodný proud**. Doba jeho trvání (dříve, než nastane ustálený stav) je určena časovými konstantami $\tau_L = L/R$ a $\tau_C = RC$; ty jsou úměrné době, potřebné pro „plné zapojení“ induktivních a kapacitních prvků. Přechodný proud může být velký a může například zničit elektromotor při rozběhu, nemá-li vinutí přiměřeně navržené.

Fázový posun

Ještě potřebujeme stanovit hodnotu fázového posunu φ . Z pravoúhlého trojúhelníku fázorů v obr. 33.11d a podle údajů tab. 33.2 můžeme psát

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{IX_L - IX_C}{IR}, \quad (33.55)$$

což dává

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (\text{fázový posun}). \quad (33.56)$$

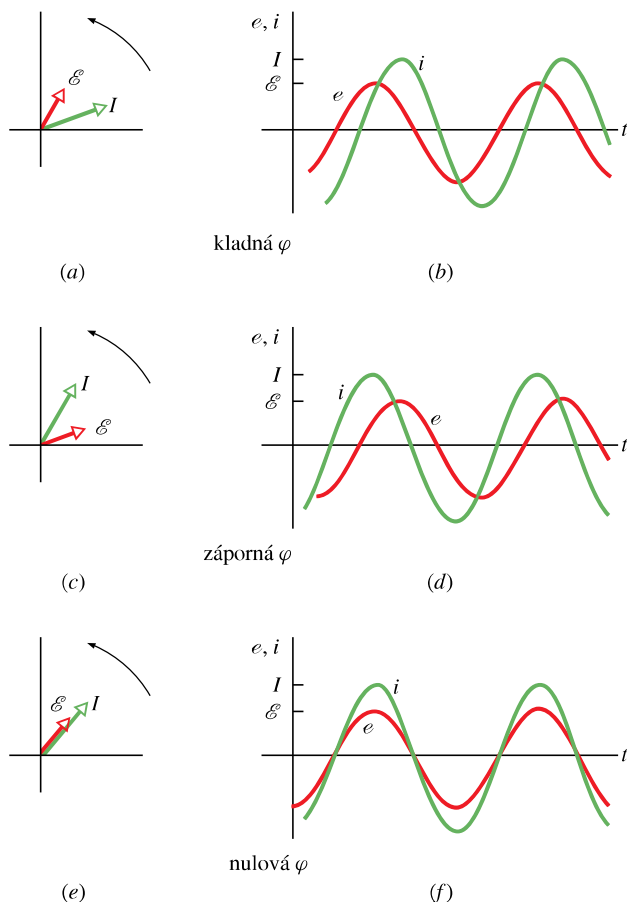
Znaménko rozdílu $(X_L - X_C)$ nemělo vliv na *amplitudu* proudu i . Z rov. (33.56) však vidíme, že toto znaménko určuje *fázový posun* proudu vůči napětí. Jsou tři možnosti:

Je-li $X_L > X_C$, obvod má **induktivní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun φ pro takový obvod kladný, což znamená, že fázor \mathcal{E} rotuje *před* fázorem I (obr. 33.12a). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12b.

Je-li $X_C > X_L$, obvod má **kapacitní charakter**. Podle rov. (33.56) je fázový posun pro takový obvod záporný, což znamená, že fázor \mathcal{E} rotuje *za* fázorem I (obr. 33.12c). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12d.

Je-li $X_C = X_L$, obvod je v **rezonanci**; tento termín vysvětlíme dále. Rov. (33.56) říká, že v takovém obvodu je $\varphi = 0^\circ$, což znamená, že fázory \mathcal{E} a I rotují společně (na téže vektorové přímce) (obr. 33.12e). Příklad závislosti e a i na čase je na obr. 33.12f.

Jako ilustraci uvažujme dva krajní případy obvodů: V *čistě induktivním obvodu* podle obr. 33.10a, kde je reaktance X_L nenulová a $X_C = R = 0$, rov. (33.56) dává



Obr. 33.12 Fázorové diagramy a časový průběh harmonických emn a proudů pro buzený obvod RLC na obr. 33.7. Pro (a, b) je fázový posun φ kladný, pro (c, d) je záporný a pro (e, f) je nulový.

$\varphi = +90^\circ$ (nejvyšší hodnota φ) v souladu s obr. 33.10c. V čistě kapacitním obvodu podle obr. 33.9a, kde je reaktance X_C nenulová a $X_L = R = 0$, rov. (33.56) dává $\varphi = -90^\circ$ (nejnižší hodnota φ) v souladu s obr. 33.9c.

Rezonance

Rov. (33.54) udává amplitudu proudu I v obvodu RLC jako funkci budící úhlové frekvence ω_b vnějšího harmonického zdroje emn. Pro zadaný odpor R je tato amplituda největší, jestliže je veličina $(\omega_b L - 1/(\omega_b C))$ ve jmenovateli nulová, tedy jestliže

$$\omega_b L = \frac{1}{\omega_b C},$$

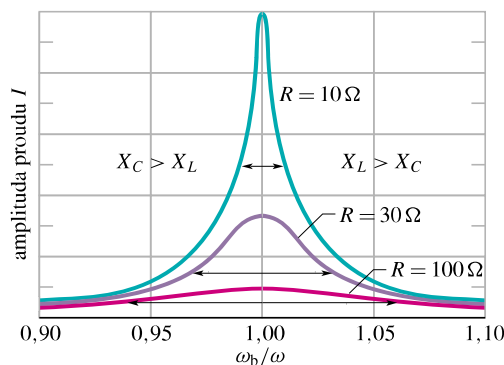
odkud

$$\omega_b = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{maximum } I). \quad (33.57)$$

Tato frekvence, kterou nazýváme **rezonanční frekvence** kmitavého sériového obvodu RLC , je tedy rovna vlastní úhlové frekvenci (netlumených) kmitů v obvodu LC . To znamená, že v obvodu RLC nastane **rezonance** a amplituda I proudu dosáhne maxima, je-li

$$\omega_b = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{rezonanční frekvence}). \quad (33.58)$$

Rezonanční frekvence je určena hodnotami L a C . Co se stane, když měníme R ? Obr. 33.13 ukazuje tři **rezonanční křivky** proudu pro harmonicky buzené kmitů v obvodu RLC , které se liší pouze hodnotou R . Každá křivka dosahuje maxima amplitudy proudu při rezonanční frekvenci $\omega_b = \omega$, avšak toto maximum klesá s rostoucím R . (Maximum I je vždy rovno \mathcal{E}/R ; k důkazu postačí kombinovat rov. (33.52) a (33.53)). Také šířka křivek narůstá s rostoucím R (šířka je definována jako rozdíl kmitočtů při proudu rovném polovině maximální hodnoty I , obr. 33.13).



Obr. 33.13 Rezonanční křivky buzeného obvodu RLC na obr. 33.7 pro $L = 100 \mu\text{H}$, $C = 100 \text{ pF}$ a tři hodnoty R . Amplituda I harmonického proudu závisí na tom, jak blízko je budící úhlová frekvence ω_b k vlastní úhlové frekvenci ω . Vodorovná šipka u každé křivky udává její šířku na poloviční hodnotě maxima proudu, což je měřítkem strmosti rezonanční křivky. Nalevo od $\omega_b/\omega = 1$ je $X_C > X_L$ a obvod má kapacitní charakter. Napravo od $\omega_b/\omega = 1$ je $X_L > X_C$ a obvod má induktivní charakter.

Rezonančním křivkám z obr. 33.13 můžeme dát fyzikální význam tím, že budeme uvažovat, jak se reaktance X_L a X_C změní, zvyšujeme-li postupně budící úhlovou frekvenci ω_b , přičemž začneme z hodnot mnohem menších, než je vlastní frekvence ω . Pro malé hodnoty ω_b je reaktance $X_L = \omega_b L$ malá a reaktance $X_C = 1/(\omega_b C)$ je velká. Obvod má tedy kapacitní charakter a převládá velká reaktance X_C , která udržuje v obvodu malý proud.

Zvyšujeme-li ω_b , reaktance X_C stále převažuje, ale klesá, zatímco X_L se zvyšuje. S poklesem X_C klesá i impedance, takže proud narůstá, jak vidíme na levé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Když rostoucí X_L a klesající X_C dosáhnou stejných hodnot, proud je největší a obvod je v rezonanci při $\omega_b = \omega$.

Zvyšujeme-li dále ω_b , převládne narůstající reaktance X_L nad klesající reaktancí X_C . Impedance tedy narůstá v důsledku zvýšení X_L a proud klesá, jak je zřejmé v pravé části rezonanční křivky v obr. 33.13. Stručně shrnuto: pro úhlové frekvence menší než ω převažuje kapacitní reaktance, pro úhlové frekvence větší než ω převažuje induktivní reaktance a rezonance nastává právě pro frekvenci ω , kdy celková reaktance je nulová.

PŘÍKLAD 33.5

V obr. 33.7 je $R = 160 \Omega$, $C = 15,0 \mu\text{F}$, $L = 230 \text{ mH}$, $f_b = 60,0 \text{ Hz}$ a $\mathcal{E} = 36,0 \text{ V}$. (Až na R jsou hodnoty stejné jako v př. 33.4.)

(a) Jak velká je amplituda proudu I ?

ŘEŠENÍ: Amplitudu proudu můžeme vypočítat z rovnice (33.53) ($I = \mathcal{E}/Z$), stanovíme-li nejprve impedanci Z obvodu z rov. (33.52). Z př. 33.4a víme, že kapacitní reaktance X_C pro kondenzátor (a tedy pro obvod) je 177Ω , a z př. 33.4b víme, že induktivní reaktance X_L cívky je $86,7 \Omega$. Z rov. (33.52) dostaneme

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \\ &= \sqrt{(160 \Omega)^2 + (86,7 \Omega - 177 \Omega)^2} = \\ &= 184 \Omega. \end{aligned}$$

Potom vypočteme

$$I = \frac{\mathcal{E}}{Z} = \frac{(36,0 \text{ V})}{(184 \Omega)} = 0,196 \text{ A}. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Jaký je fázový posun φ ?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.56) je

$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{(86,7 \Omega) - (177 \Omega)}{(160 \Omega)} = -0,564,$$

odtud

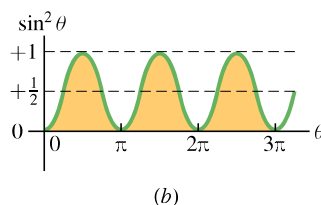
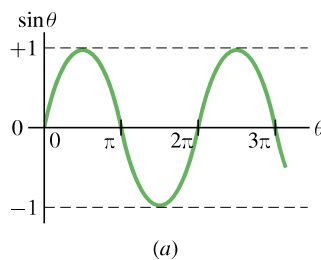
$$\varphi = -29,4^\circ = -0,513 \text{ rad}. \quad (\text{Odpověď})$$

Fázový posun je záporný, protože výsledná zátěž má kapacitní charakter, tj. $X_C > X_L$.

(1) 50Ω , 100Ω ; (2) 100Ω , 50Ω ; (3) 50Ω , 50Ω . (a) Pro každý z obvodů rozhodněte, jestli proud předbíhá, nebo je zpožděn vzhledem k připojenému emn, nebo jestli jsou obě veličiny ve fázi. (b) Je některý z obvodů v rezonanci?

33.10 VÝKON V OBVODECH SE STŘÍDAVÝM PROUDEM

Do obvodu RLC (obr. 33.7) dodává energii generátor střídavého napětí. Část energie, kterou dodává, je uložena v elektrickém poli kondenzátoru, část v magnetickém poli cívky a část se disipuje v rezistoru. V ustáleném stavu, který předpokládáme, zůstává časová střední hodnota energie uložené v kondenzátoru a v cívce konstantní. Elektromagnetická energie se přenáší jen od generátoru k rezistoru a v něm se disipuje.



Obr. 33.14 (a) Závislost $\sin \theta$ na θ . Střední hodnota za dobu jedné periody je nulová. (b) Závislost $\sin^2 \theta$ na θ . Střední hodnota za dobu jedné periody je $\frac{1}{2}$.

Rychlost, se kterou je energie disipována v rezistoru, tj. *okamžitý výkon*, lze vyjádřit pomocí rov. (27.22) a (33.26) vztahem

$$P = i^2 R = I^2 R \sin^2(\omega_b t - \varphi). \quad (33.59)$$

Střední výkon disipovaný v rezistoru je časovou střední hodnotou výrazu (33.59). Ačkoli střední hodnota za dobu jedné periody je pro funkci $\sin \theta$ nulová, je střední hodnota $\sin^2 \theta$ rovna $\frac{1}{2}$ (obr. 33.14). (Povšimněte si v obr. 33.14b, jak vystínované části křivky, které leží nad vodorovnou

KONTROLA 6: Mějme tři dvojice kapacitní a induktivní reaktance pro tři harmonicky buzené obvody RLC :

přímkou označenou $+\frac{1}{2}$, přesně vyplňují prázdná místa pod touto čarou.) Z rov. (33.59) plyne výraz pro střední výkon

$$\bar{P} = \frac{I^2 R}{2} = \left(\frac{I}{\sqrt{2}}\right)^2 R. \quad (33.60)$$

Veličina $I/\sqrt{2}$ se nazývá **efektivní hodnota** proudu i , a pokud nebude uvedeno jinak, použijeme pro její označení index „ef“. Tedy

$$I_{\text{ef}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \quad (\text{efektivní proud}). \quad (33.61)$$

Rov. (33.60) můžeme přepsat do tvaru

$$\bar{P} = I_{\text{ef}}^2 R \quad (\text{střední výkon}). \quad (33.62)$$

(Připomněme, že $U_{\text{stř}} = 0$ a $I_{\text{stř}} = 0!$) Rov. (33.62) se formálně podobá rov. (27.22) $P = i^2 R$. Zavedení efektivních hodnot proto umožňuje, abychom střední hodnoty ztrát ve střídavých obvodech (tj. střední výkony) v ustáleném stavu vyjádřili formálně stejným vztahem jako pro stejnosměrné proudy.

Pro střídavé proudy můžeme také definovat efektivní hodnoty napětí i emn:

$$U_{\text{ef}} = \frac{U}{\sqrt{2}} \quad \text{a} \quad \mathcal{E}_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{2}} \quad (33.63)$$

(efektivní napětí a emn).

Přístroje na měření střídavých veličin, jako např. ampérmetry a voltmetry, jsou obvykle cejchovány v efektivních hodnotách. Pokud tedy voltmetr na měření střídavých napětí ukazuje v elektrické zásuvce 230 V, je to



V září 1988, po 72 letech hry za denního světla, instaloval klub Chicago Cubs reflektory pro hru při umělém osvětlení. Celkem 540 halogenových svítidel po 1 500 W osvětlilo hrací plochu. Avšak první hra za umělého osvětlení byla pro bouřku přerušena. Fanoušci si to vysvětlili po svém — považovali to za znamení, aby Cubs zůstali při hře za denního světla.

efektivní napětí. Maximální hodnota napětí v zásuvce je pak $\sqrt{2}(230 \text{ V})$, tj. 325 voltů.

Protože součinitel úměrnosti $1/\sqrt{2}$ v rov. (33.61) a (33.63) je stejný pro všechny tři proměnné, můžeme rov. (33.53) a (33.51) psát ve tvaru

$$I_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{Z} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (33.64)$$

Zápisu pomocí efektivních hodnot budeme dávat přednost.

Vztah $I_{\text{ef}} = \mathcal{E}_{\text{ef}}/Z$ můžeme použít k přepisu rovnice (33.62) do jiného užitečného ekvivalentního vyjádření. Píšeme

$$\bar{P} = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}}{Z} I_{\text{ef}} R = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \frac{R}{Z}. \quad (33.65)$$

Z obr. 33.11d, tab. 33.2 a z rov. (33.53) však plyne, že podíl R/Z je roven kosinu fázového posunu φ :

$$\cos \varphi = \frac{U_R}{\mathcal{E}} = \frac{IR}{IZ} = \frac{R}{Z}. \quad (33.66)$$

Rov. (33.65) pak zní

$$\bar{P} = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi \quad (\text{střední výkon}) \quad (33.67)$$

a činitel $\cos \varphi$ v ní se nazývá **účinník**. Protože $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$, nezávisí rov. (33.67) na znaménku fázového posunu φ .

Aby se do odporové zátěže libovolného obvodu RLC přenašel maximální výkon, musí se účinník co nejvíce blížit jedné: $\cos \varphi \rightarrow 1$. To je ekvivalentní požadavku, aby



11. listopadu 1965 v 17:17 h způsobilo vadné relé v energetické soustavě poblíž Niagarských vodopádů odpojení spínače na přenosovém vedení. Proud se samočinně přepojil do ostatních vedení, ta se tím však přetížila a automaticky odpojila ze soustavy. V několika minutách se zhroutila energetická soustava a do tmy se ponořila většina New Yorku, Nové Anglie a Ontaria.

fázový posun φ byl co nejbližší nule. Pokud má například obvod induktivní charakter, lze induktivní reaktanci snížit přidáním kapacity do obvodu a tak zmenšit fázový posun a zvýšit účinník v rov. (33.67). Protože spotřebiče mají mnohem častěji induktivní charakter než kapacitní, umísťují elektrárenské společnosti na místě spotřeby kondenzátory a v rozvodnách, kterými je přenášen velký výkon, různé kompenzátory účinníku.

KONTROLA 7: (a) Proud v harmonicky buzeném sériovém obvodu RLC předbíhá emn. Je nutno zvětšit, nebo zmenšit kapacitu, aby se zvýšil výkon dodávaný do rezistoru? (b) Posune tato změna rezonanční úhlovou frekvenci obvodu blíže k úhlové frekvenci emn, nebo ji naopak oddálí?

PŘÍKLAD 33.6

Sériový obvod RLC , buzený zdrojem s $\mathcal{E}_{ef} = 120 \text{ V}$ při kmitočtu $f_b = 60,0 \text{ Hz}$, sestává z rezistoru s $R = 200 \Omega$, cívky s $X_L = 80,0 \Omega$ a kondenzátoru s $X_C = 150 \Omega$.

(a) Jaký je účinník $\cos \varphi$ a fázový posun φ v tomto obvodu?

ŘEŠENÍ: Účinník můžeme vypočítat z rov. (33.66) ($\cos \varphi = R/Z$) tak, že nejprve stanovíme impedanci Z . Dosazením do rov. (33.52) dostaneme

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &= \sqrt{(200 \Omega)^2 + (80,0 \Omega - 150 \Omega)^2} = \\ &= 211,9 \Omega. \end{aligned}$$

Z rov. (33.66) potom vypočteme

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{(200 \Omega)}{(211,90 \Omega)} = 0,944. \quad (\text{Odpověď})$$

Odtud plyne, že

$$\varphi = 19,3^\circ \quad \text{nebo} \quad \varphi = -19,3^\circ.$$

První řešení nevyhovuje úloze, neboť při $X_C > X_L$ má obvod kapacitní charakter a fázový posun φ proto musí být záporný. Druhé řešení úloze vyhovuje, tedy

$$\varphi = -19,3^\circ. \quad (\text{Odpověď})$$

(Namísto uvedeného postupu jsme mohli dosadit známé údaje do rov. (33.56) a dostali bychom správný výsledek jako jediné řešení.)

(b) S jakým středním výkonem \bar{P} se elektromagnetická energie disipuje v rezistoru?

ŘEŠENÍ: \bar{P} vypočteme pomocí rov. (33.67), jestliže nejprve určíme I_{ef} . Z rov. (33.64) máme

$$I_{ef} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{Z} = \frac{(120 \text{ V})}{(211,9 \Omega)} = 0,5663 \text{ A}.$$

Dosazením této a dalších hodnot do rov. (33.67) vypočteme

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \mathcal{E}_{ef} I_{ef} \cos \varphi = (120 \text{ V})(0,5663 \text{ A})(0,944) = \\ &= 64,2 \text{ W}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jaká změna ΔC kapacity je potřeba, aby \bar{P} byl maximální za předpokladu, že se ostatní parametry obvodu nezmění?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.34) ($X_C = 1/(\omega_b C)$) vypočteme původní kapacitu

$$C = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60,0 \text{ Hz})(150 \Omega)} = 17,7 \mu\text{F}.$$

Výkon \bar{P} je nejvyšší, je-li obvod v rezonanci, tj. když jsou si reaktance rovny: $X_C = X_L$. Rov. (33.34) pro $X_C = X_L = 80 \Omega$ dává kapacitu potřebnou pro rezonanci

$$C' = \frac{1}{2\pi f_b X_C} = \frac{1}{2\pi(60,0 \text{ Hz})(80 \Omega)} = 33,2 \mu\text{F}.$$

Požadovaná změna kapacity tedy bude

$$\begin{aligned} \Delta C &= C' - C = 33,2 \mu\text{F} - 17,7 \mu\text{F} = \\ &= 15,5 \mu\text{F}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Jaký bude střední výkon \bar{P} při takto změněné kapacitě?

ŘEŠENÍ: Po změně je $X_C = X_L$. Potom z rov. (33.52) a (33.66) platí $Z = R$ a $\cos \varphi = 1$. Efektivní proud dostaneme z rov. (33.64)

$$I_{ef} = \frac{\mathcal{E}_{ef}}{Z} = \frac{(120 \text{ V})}{(200 \Omega)} = 0,600 \text{ A}$$

a střední výkon je

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \mathcal{E}_{ef} I_{ef} \cos \varphi = (120 \text{ V})(0,600 \text{ A})(1,0) = \\ &= 72,0 \text{ W}. \end{aligned} \quad (\text{Odpověď})$$

33.11 TRANSFORMÁTORY

Požadavky na přenos energie

Je-li střídavý zdroj zatížen pouze rezistorem, je fázový posun φ nulový, a proto účinník v rov. (33.67) je roven jedné

($\cos 0^\circ = 1$). Přiložené efektivní emn \mathcal{E} je rovno efektivnímu napětí U na zátěži. To znamená, že při efektivním proudu I je dodaný výkon, který je ztracený v zátěži, roven

$$\overline{P} = \mathcal{E}I = IU. \quad (33.68)$$

(V tomto článku použijeme v praxi běžný zápis efektivních hodnot, kdy se index $_{ef}$ vynechává. V elektrotechnice se všechny v čase harmonicky proměnné proudy a napětí běžně popisují svými efektivními hodnotami. Udávají je i měřicí přístroje.) Z rov. (33.68) je vidět, že k dodání předepsaného výkonu máme širokou možnost volby od velkého proudu I a relativně malého napětí U k malému proudu a vysokému napětí, ale vždy tak, aby měl součin proudu a napětí požadovanou velikost.

V soustavách, které rozvádějí elektrickou energii, je žádoucí z důvodů bezpečnosti a účinného návrhu zařízení pracovat s relativně nízkými napětími na straně výroby (v elektrárnách) a u spotřebitelů (v domácnostech a v továrnách). Nechceme samozřejmě, aby televizor nebo dětský vláček byl napájen z rozvodné sítě napětím 22 kV. Na druhé straně uvidíme, že při přenosu elektrické energie z elektrárny ke spotřebitelům jsou výhodné co nejnižší proudy (a proto co nejvyšší napětí), aby se minimalizovaly ztráty I^2R Joulovým teplem v přenosových vedeních.

Jako příklad uvažujme 735 kV vedení používané k přenosu elektrické energie z vodní elektrárny La Grande 2 v Quebecu do 1 000 km vzdáleného Montrealu. Předpokládejme, že proud je 500 A a účinník je blízký jedné. Potom podle rov. (33.67) elektrárna dodává energii se středním výkonem

$$\mathcal{E}I = (7,35 \cdot 10^5 \text{ V})(500 \text{ A}) = 368 \text{ MW}.$$

Odpor na kilometr vedení je asi $0,220 \Omega$, a tedy celkový odpor při délce 1 000 km je 220Ω . Ztrátový výkon v odporu vedení je

$$I^2R = (500 \text{ A})^2(220 \Omega) = 55,0 \text{ MW},$$

což je téměř 15 % přenášeného výkonu.

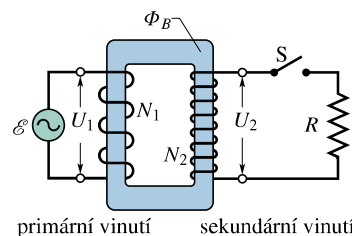
Představme si, co by se stalo, kdyby se zdvojnásobil proud a na polovinu snížilo napětí. Výkon dodávaný elektrárnou by zůstal 368 MW jako v předchozím příkladě, avšak ztrátový výkon by nyní byl

$$I^2R = (1\,000 \text{ A})^2(220 \Omega) = 220 \text{ MW},$$

což je téměř 60 % dodávaného výkonu. Odtud můžeme vyvodit obecné pravidlo pro přenos energie: k přenosu je třeba použít co nejmenší proud, a tedy co nejvyšší napětí.

Transformátor

Požadavek vysoké účinnosti při přenosu energie vede k použití vysokého napětí; to je ale v základním rozporu s bezpečností práce při výrobě i spotřebě elektřiny. Potřebujeme proto zařízení, kterým bychom mohli napětí v obvodech zvýšit (pro přenos) a snížit (pro spotřebu), přičemž by součin proudu a napětí zůstal konstantní. Tímto zařízením je **transformátor**. Transformátor nemá žádné pohyblivé části, využívá jevu elektromagnetické indukce. Žádné jednoduché analogické zařízení, které by totéž umožňovalo se stejnosměrným proudem, neexistuje.



Obr. 33.15 Transformátor sestává ze dvou cívek navinutých na společném železném jádru. Generátor střídavého proudu dodává proud do levé cívky (primární vinutí). Je-li spínač S sepnut, je cívka napravo (sekundární vinutí) připojena k odporové zátěži R .

Transformátor (obr. 33.15) se skládá ze dvou cívek navinutých na železném jádru; nejsou s ním vodičově spojeny. Za provozu je primární vinutí s N_1 závitů připojeno ke generátoru střídavého napětí, jehož emn je dáno rov. (33.25). Sekundární vinutí s N_2 závitů je připojeno k zatěžovacímu rezistoru R pomocí spínače S . Předpokládejme nejprve, že rezistor je odpojen. Potom sekundární cívkou neprotéká žádný proud. Dále budeme předpokládat, že odpor primárního i sekundárního vinutí je zanedbatelný, stejně jako ztráty v důsledku magnetické hystereze v železném jádru. Vhodně navržené transformátory velkého výkonu mají ztráty pod 1 %, takže tyto předpoklady jsou oprávněné.

Za těchto předpokladů má primární vinutí pouze indukčnost (obr. 33.10a) a chová se jako cívka. Proto je malý primární proud (tzv. magnetizační proud I_{mag}) zpožděn za primárním napětím o 90° ; účinník primárního vinutí ($\cos \varphi$ v rov. (33.67)) je nulový, a tedy generátor do transformátoru nedodává žádný výkon.

Malý střídavý primární proud vytváří v železném jádru střídavý magnetický indukční tok Φ_B , a protože je na jádru navinuto i sekundární vinutí, zasahuje tento tok i jeho závitů. Z Faradayova indukčního zákona (rov. (31.6)) plyne, že emn indukované v jednom závitě e_{zav} je stejné jak pro primární, tak pro sekundární vinutí. Dále napětí u_1 je rovno emn indukovanému v primárním vinutí a napětí u_2 je rovno

emn na sekundárním vinutí. Můžeme proto psát

$$e_{z\acute{a}v} = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{u_1}{N_1} = \frac{u_2}{N_2}, \quad (33.69)$$

odkud pro efektivní hodnoty napětí plyne

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (\text{transformace napětí}). \quad (33.70)$$

Transformátor, u kterého je $N_2 > N_1$, nazýváme *zvyšovací*, protože zvyšuje primární napětí U_1 na vyšší napětí U_2 . Transformátor s $N_2 < N_1$ nazýváme *snižovací*.

Až dosud jsme uvažovali spínač S rozepnutý; generátor nedodával do obvodu žádnou energii. Nyní sepneme spínač S a připojíme tím k sekundárnímu vinutí odporovou zátěž R . (Obecně může zátěž obsahovat také indukční a kapacitní prvky, ale zde budeme uvažovat pouze rezistor R .) Shledáme, že se nyní energie *přenáš* z generátoru do zátěže. Podívejme se, proč.

Po sepnutí spínače S dojde k několika jevům.

(1) Sekundárním obvodem začne protékat střídavý proud I_2 , který způsobí v odporové zátěži ztráty $I_2^2 R = U_2^2/R$.

(2) Sekundární proud vytvoří střídavý magnetický tok v železném jádru a ten indukuje (podle Faradayova indukčního zákona a Lenzova zákona) v primárním vinutí emn opačně orientované.

(3) Napětí U_1 na primárním vinutí se však v důsledku napětí indukovaného proudem I_2 nemůže změnit, neboť musí být stále rovno emn generátoru. Sepnutí spínače to nemůže ovlivnit.

(4) Aby generátor udržel napětí U_1 , musí (navíc k magnetizačnímu proudu) primárním vinutím procházet takový střídavý proud I_1 , jehož velikost a počáteční fáze jsou právě tak velké, aby emn indukované tímto proudem v primárním vinutí přesně zrušilo emn indukované v něm sekundárním proudem I_2 . Protože primární proud I_1 už není posunut vůči primárnímu napětí U_1 přesně o 90° (jako tomu bylo u magnetizačního proudu), přivádí proud I_1 do primárního vinutí energii.

Nalezneme nyní vzájemný vztah mezi I_2 a I_1 . Namísto analýzy detailů složitého procesu použijeme pouze zákon zachování energie. Přitom stále předpokládáme, že zátěž je čistě odporová. Výkon přiváděný z generátoru na primární vinutí je $I_1 U_1$. Výkon přenášený z primárního vinutí do sekundárního vinutí (obě cívky jsou spřaženy magnetickým polem) je $I_2 U_2$. Protože předpokládáme, že se žádná energie během přenosu neztratí, plyne ze zákona zachování energie

$$I_1 U_1 = I_2 U_2.$$

Dosadíme-li za U_2 z rov. (33.70), dostaneme

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{transformace proudu}). \quad (33.71)$$

Tato rovnice vyjadřuje, že proud I_2 v sekundárním vinutí může být větší, menší, nebo stejný ve srovnání s proudem I_1 v primárním vinutí, a to v závislosti na poměru počtu závitů N_1/N_2 .

Impedanční přizpůsobení

Proud I_1 se v primární cívce objevil proto, že jsme do sekundárního obvodu zapojili zátěž R . Abychom vypočetli I_1 , dosadíme $I_2 = U_2/R$ do rov. (33.71) a pak ještě za U_2 z rov. (33.70). Dostaneme tak

$$I_1 = \frac{1}{R} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 U_1. \quad (33.72)$$

Tuto rovnici můžeme zapsat ve tvaru $I_1 = U_1/R'$, kde jsme zavedli „transformovaný odpor“ R' vztahem

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R. \quad (33.73)$$

Na primární straně totiž protéká proud I_1 při napětí U_1 , jako by byl generátor připojen k rezistoru s odporem R' . Ze strany generátoru se tedy zapojení transformátor + zátěž R jeví tak, jako by byla v primárním obvodu zapojena zátěž R' .

Rov. (33.73) ukazuje, že transformátor může plnit ještě jinou funkci. Jak již víme (úloha 24 v kap. 28), maximální přenos výkonu ze zdroje emn do odporové zátěže nastává, jsou-li odpory zdroje a zátěže stejně velké. Totéž platí pro střídavé obvody s tím rozdílem, že *impedance* generátoru (namísto pouhého odporu) musí být přizpůsobena zátěži. Často se stává — např. když chceme připojit reproduktor k zesilovači — že tato podmínka není ani zdaleka splněna, protože zesilovač má vysokou impedanci a reproduktor naopak velmi nízkou. Obě impedance můžeme přizpůsobit vzájemným propojením pomocí transformátoru s vhodným převodním poměrem závitů N_1/N_2 .

PŘÍKLAD 33.7

Rozvodný transformátor je napájen primárním napětím $U_1 = 22 \text{ kV}$ a dodává energii do okolních domů při napětí $U_2 = 230 \text{ V}$ (obě veličiny jsou efektivní hodnoty). Předpokládejme ideální snižovací transformátor, čistě odporovou zátěž a účinník roven jedné.

(a) Jaký je poměr závitů transformátoru N_1/N_2 ?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.70) máme

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{(22 \cdot 10^3 \text{ V})}{(230 \text{ V})} = 95,65 \doteq 96. \quad (\text{Odpověď})$$

(b) Střední výkon spotřebičů v domech napájených z transformátoru je 78 kW. Jaká je efektivní hodnota proudu na primárním a sekundárním vinutí transformátoru?

ŘEŠENÍ: Z rov. (33.67) dostaneme (při $\cos \varphi = 1$ a $U_1 = \mathcal{E}$ pro transformátor připojený ke zdroji emn)

$$I_1 = \frac{\bar{P}}{U_1} = \frac{(78 \cdot 10^3 \text{ W})}{(22 \cdot 10^3 \text{ V})} = 3,545 \text{ A} \doteq 3,5 \text{ A} \quad (\text{Odpověď})$$

a

$$I_2 = \frac{\bar{P}}{U_2} = \frac{(78 \cdot 10^3 \text{ W})}{(230 \text{ V})} = 339 \text{ A}. \quad (\text{Odpověď})$$

(c) Jaká je odporová zátěž v sekundárním obvodu?

ŘEŠENÍ: V sekundárním obvodu je

$$R = \frac{U_2}{I_2} = \frac{(230 \text{ V})}{(339 \text{ A})} = 0,678 \Omega \doteq 0,68 \Omega. \quad (\text{Odpověď})$$

(d) Jaký je „transformovaný odpor“ v primárním obvodu? (Tj. jak je primární obvod zatížen?)

ŘEŠENÍ: Pro primární obvod vypočteme

$$R' = \frac{U_1}{I_1} = \frac{(22 \cdot 10^3 \text{ V})}{(3,545 \text{ A})} = 6206 \Omega \doteq 6,2 \text{ k}\Omega, \quad (\text{Odpověď})$$

nebo s použitím rov. (33.73)

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R = (95,65)^2 (0,1846 \Omega) = 6203 \Omega = 6,2 \text{ k}\Omega. \quad (\text{Odpověď})$$

KONTROLA 8: Zdroj harmonického emn má menší vnitřní odpor, než je odpor připojené zátěže. Abychom zvětšili přenos výkonu z generátoru do zátěže, vložíme mezi obě zařízení transformátor k přizpůsobení impedance. Použijeme zvyšovací, nebo snižovací transformátor?

PŘEHLED & SHRUTÍ

Přenos energie v obvodu LC

V kmitavém obvodu LC se energie periodicky přelévá mezi elektrickým polem kondenzátoru a magnetickým polem cívky. Okamžitá hodnota obou forem energie je

$$E_{\text{el}} = \frac{q^2}{2C} \quad \text{a} \quad E_{\text{mg}} = \frac{Li^2}{2}, \quad (33.1, 33.2)$$

kde $q = Q(t)$ je náboj na kondenzátoru a $i = I(t)$ je proud procházející cívku v čase t . Celková energie $E = E_{\text{el}} + E_{\text{mg}}$ zůstává konstantní.

Kmity v obvodu LC

Zákon zachování energie vede ke vztahu

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{kmity obvodu LC}), \quad (33.11)$$

což je diferenciální rovnice netlumených kmitů LC (bez odporu). Řešením rov. (33.11) je

$$q(t) = Q \cos(\omega t + \varphi) \quad (\text{časový průběh náboje}), \quad (33.12)$$

kde Q je *amplituda náboje* (největší náboj na kondenzátoru) a úhlová frekvence ω netlumených kmitů je

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{obvod LC}). \quad (33.4)$$

Fázový posun φ v rov. (33.12) je určen počátečními podmínkami obvodu (v čase $t = 0$).

Proud i v soustavě je

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\omega Q \sin(\omega t + \varphi) \quad (\text{časový průběh proudu}), \quad (33.13)$$

kde ωQ je *amplituda proudu I*.

Tlumené kmity v obvodu RLC

V reálném obvodu LC dochází vždy k disipaci energie a kmity jsou proto tlumené. K disipaci energie dochází na prvku s odporem R . Diferenciální rovnice tlumených kmitů má tvar

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \quad (\text{obvod RLC}). \quad (33.20)$$

Její řešení je

$$q = Q e^{-Rt/(2L)} \cos(\omega' t + \varphi), \quad (33.21)$$

kde

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}. \quad (33.22)$$

Střídavé proudy, vynucené kmity

V sériovém obvodu RLC můžeme vybudit *vynucené kmity s budicí úhlovou frekvencí ω_b* prostřednictvím vnějšího zdroje harmonického emn

$$e = \mathcal{E} \sin \omega_b t. \quad (33.25)$$

Proud buzený v obvodu přiloženým emn je

$$i = I \sin(\omega_b t - \varphi), \quad (33.26)$$

kde φ je fázový posun proudu i vůči e .

Rezonance

Amplituda proudu I v sériovém obvodu RLC buzeného harmonickým emn je největší ($I = \mathcal{E}/R$), jestliže je budící úhlová frekvence ω_b rovna vlastní úhlové frekvenci ω (netlumeného) obvodu LC . Pak $X_C = X_L$, $\varphi = 0$ a proud je ve fázi s emn.

Jednotlivé prvky obvodu

Harmonické napětí na rezistoru má amplitudu $U_R = IR$; proud je ve fázi s napětím. Pro kondenzátor platí $U_C = IX_C$, kde $X_C = 1/(\omega_b C)$ je kapacitní reaktance; proud předbíhá před napětím o 90° . Pro cívku platí $U_L = IX_L$, kde $X_L = \omega_b L$ je induktivní reaktance; proud je zpožděn za napětím o 90° .

Sériový obvod RLC

Pro sériový obvod RLC s vnějším emn podle rov. (33.25) a s proudem podle rov. (33.26) platí

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega_b L - 1/\omega_b C)^2}} \quad \text{(amplituda proudu)} \quad (33.51, 33.54)$$

a

$$\text{tg } \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \quad \text{(fázový posun)}. \quad (33.56)$$

Impedance Z obvodu je

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad \text{(impedance)}. \quad (33.52)$$

Potom rov. (33.51) můžeme zapsat vztahem $I = \mathcal{E}/Z$.

Výkon v obvodech se střídavým proudem

V sériovém obvodu RLC je střední výkon generátoru \bar{P} roven výkonu disipovanému v rezistoru:

$$\bar{P} = I_{\text{ef}}^2 R = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}} \cos \varphi \quad \text{(střední výkon)}. \quad (33.62, 33.67)$$

Index ef znamená *efektivní hodnotu*. Mezi efektivními a maximálními hodnotami platí vztahy $I_{\text{ef}} = I/\sqrt{2}$, $U_{\text{ef}} = U/\sqrt{2}$, $\mathcal{E}_{\text{ef}} = \mathcal{E}/\sqrt{2}$. Činitel $\cos \varphi$ se nazývá *účinnost*.

Transformátory

Transformátor se skládá ze železného jádra, na kterém je navinuto primární vinutí s N_1 závitů a sekundární vinutí s N_2 závitů. Jestliže primární cívku připojujeme ke zdroji střídavého proudu, pro napětí na primárním a sekundárním vinutí platí

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad \text{(transformace napětí)}, \quad (33.70)$$

a mezi proudy platí vztah

$$I_2 = I_1 \frac{N_1}{N_2} \quad \text{(transformace proudů)}. \quad (33.71)$$

Je-li sekundární vinutí zatíženo odporem R , je situace v obvodu stejná, jako kdyby byl generátor zatížen „transformovaným odporem“ R' o velikosti

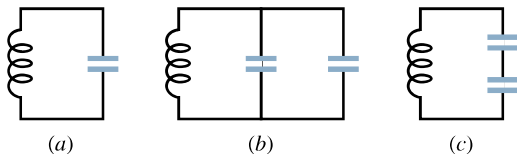
$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R. \quad (33.73)$$

OTÁZKY

1. Nabitý kondenzátor a cívku vodivě spojíme v čase $t = 0$. Vyjádřete v násobcích periody T vzniklých kmitů nejkratší dobu, za jakou dosáhne maximum (a) energie v magnetickém poli E_{mg} , (b) magnetický tok v cívce, (c) di/dt , (d) emn v cívce.

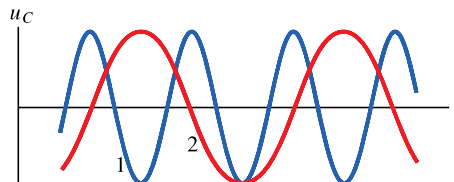
2. Jaká musí být hodnota počáteční fáze φ v rov. (33.12), aby v $t = 0$ nastal stav podle obr. 33.1 (a), (c), (e) a (g)?

3. Obr. 33.16 ukazuje tři kmitavé obvody LC se stejnými cívkami a kondenzátory. Uspořádejte obvody v sestupném pořadí podle doby, potřebné k úplnému vybití kondenzátoru během oscilací.



Obr. 33.16 Otázka 3

4. Obr. 33.17 ukazuje závislost napětí u_C na kondenzátoru pro LC obvody 1 a 2, které mají stejně velké kapacity a stejný maximální náboj Q . Stanovte, jsou-li hodnoty (a) indukčnosti L a (b) maximálního proudu I v obvodu 1 větší, menší, nebo rovny hodnotám těchto veličin v obvodu 2.



Obr. 33.17 Otázka 4

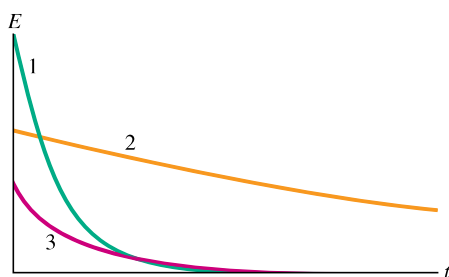
5. Náboje na kondenzátorech tří kmitavých obvodů LC se mění podle vztahů: (1) $q = 2 \cos 4t$; (2) $q = 4 \cos t$; (3) $q = 3 \cos 4t$ (kde q je v coulombech a t v sekundách). Seřadte obvody v se-

stupném pořadí (a) podle amplitudy proudu a (b) podle periody kmitů.

6. Obvod LC kmitá s maximálním nábojem Q . Co se stane (a) s amplitudou proudu I , (b) s největší hodnotou E_{mg} energie magnetického pole — zvětší se, zmenší, nebo zůstane stejná?

7. Klesá náboj na kondenzátoru v tlumeném obvodu RLC rychleji, pomaleji, nebo stejně rychle jako energie?

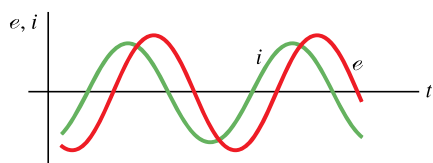
8. Obr. 33.18 ukazuje závislost střední hodnoty energie na čase pro tři tlumené kmitavé sériové obvody RLC se stejným počátečním nábojem Q_0 . Seřaďte obvody sestupně podle jejich (a) kapacity C , (b) hodnoty L/R .



Obr. 33.18 Otázka 8

9. Hodnoty počátečních fází φ pro čtyři harmonicky buzené sériové obvody RLC jsou (1) -15° , (2) $+35^\circ$, (3) $\pi/3$ rad, (4) $-\pi/6$ rad. (a) Ve kterém obvodu je zátěž kapacitního charakteru? (b) Ve kterém obvodu střídavé emn předbíhá proud?

10. Obr. 33.19 ukazuje proud i a budící emn pro sériový obvod RLC . (a) Předbíhá proud emn, nebo je za ním zpožděn? (b) Má zátěž obvodu kapacitní, nebo induktivní charakter? (c) Je úhlová frekvence emn větší, nebo menší než vlastní úhlová frekvence obvodu?



Obr. 33.19 Otázky 10 a 15

11. Následující tabulka udává pro tři sériové obvody RLC amplitudu \mathcal{E} budícího emn a hodnoty R , L a C . Bez písemných výpočtů stanovte sestupně pořadí obvodů podle (a) amplitudy

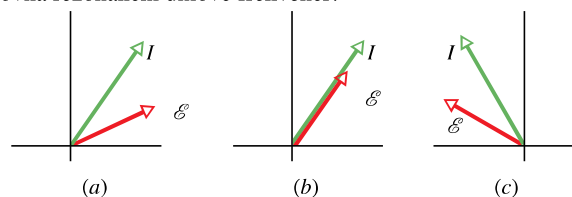
proudu I při rezonanci a (b) úhlové frekvence při rezonanci.

OBVOD	$\frac{\mathcal{E}}{\text{V}}$	$\frac{R}{\Omega}$	$\frac{L}{\text{mH}}$	$\frac{C}{\mu\text{F}}$
1	25	5,0	200	10
2	60	12	100	5,0
3	80	10	300	10

12. Předpokládejme, že pro konkrétní budící úhlovou frekvenci předbíhá v sériovém RLC obvodu emn před proudem. Nyní poněkud snížíte budící úhlovou frekvenci. Jak se změní (a) počáteční fáze a (b) amplituda proudu: vzroste, sníží se, nebo zůstane stejná?

13. Budící úhlová frekvence v jistém sériovém obvodu RLC je menší než vlastní úhlová frekvence obvodu. (a) Je počáteční fáze φ kladná, záporná, nebo nulová? Předbíhá proud, nebo je zpožděn vzhledem k emn?

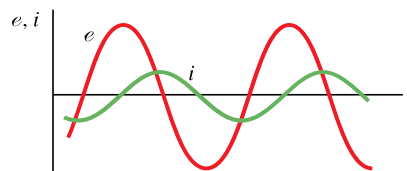
14. Obr. 33.20 ukazuje tři situace podobné stavům z obr. 33.12. Pro který stav je budící úhlová frekvence větší, menší, nebo rovná rezonanční úhlové frekvenci?



Obr. 33.20 Otázka 14

15. Obr. 33.19 znázorňuje proud i a budící emn e v sériovém obvodu RLC . Pokud poněkud zvýšíme (a) L , (b) C , (c) budící úhlovou frekvenci emn, určete, (1) zda se vzhledem ke křivce emn křivka proudu posune vlevo, nebo vpravo a (2) zda se amplituda křivky proudu zvýší, nebo sníží.

16. Obr. 33.21 ukazuje časový průběh proudu i a budícího emn e pro sériový obvod RLC . (a) Je počáteční fáze kladná, nebo záporná? (b) Abychom zvýšili výkon přenesený do odporové zátěže, je třeba L zvětšit, nebo zmenšit? (c) Má se při stejném L zvětšit, nebo zmenšit hodnota C ?



Obr. 33.21 Otázka 16

CVIČENÍ & ÚLOHY

ODST. 33.2 Kvalitativní rozbor kmitů LC

- 1C.** Jaká je kapacita kmitavého obvodu LC , má-li kondenzátor maximální náboj $1,60 \mu\text{C}$ a energii $140 \mu\text{J}$?
- 2C.** Cívka s indukčností $1,50 \text{ mH}$, zapojená v kmitavém obvodu LC , akumuluje maximální energii $10,0 \mu\text{J}$. Jaký je maximální proud?
- 3C.** V kmitavém obvodu LC je $L = 1,10 \text{ mH}$ a $C = 4,00 \mu\text{F}$. Maximální náboj na kondenzátoru je $3,00 \mu\text{C}$. Vypočtete maximální proud v obvodu.
- 4C.** Kmitavý obvod LC se skládá z cívky $75,0 \text{ mH}$ a kondenzátoru $3,60 \mu\text{F}$. Je-li maximální náboj na kondenzátoru $2,90 \mu\text{C}$, (a) jaká je celková energie v obvodu, (b) jaký je maximální proud?
- 5C.** V kmitavém obvodu LC se celková energie elektrického pole v kondenzátoru změní během $1,50 \mu\text{s}$ na energii magnetického pole. (a) Jaká je perioda kmitů T ? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Jak dlouho po dosažení maxima energie magnetického pole dosáhne obvod opět tohoto maxima?
- 6Ú.** Frekvence kmitů obvodu LC je 200 kHz . V čase $t = 0$ je na elektrodě A kondenzátoru maximální kladný náboj. V jakých okamžicích $t > 0$ bude (a) elektroda A mít opět maximální kladný náboj, (b) druhá elektroda mít maximální kladný náboj, (c) cívka mít maximální energii?

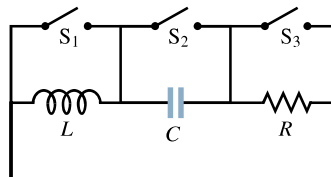
ODST. 33.3 Elektro-mechanická analogie

- 7C.** Těleso hmotnosti $0,50 \text{ kg}$ kmitá na pružině, jejíž síla pružnosti při výchylce $2,0 \text{ mm}$ z rovnovážné polohy má velikost $8,0 \text{ N}$. (a) Jaká je úhlová frekvence kmitů? (b) Jaká je perioda kmitů? (c) Jaká je kapacita odpovídajícího obvodu LC pro $L = 5,0 \text{ H}$?
- 8Ú.** Energie v kmitavém obvodu LC s $L = 1,25 \text{ H}$ je $5,7 \mu\text{J}$. Maximální náboj na kondenzátoru je $175 \mu\text{C}$. Stanovte u odpovídajícího mechanického oscilátoru (a) hmotnost, (b) tuhost pružiny, (c) největší výchylku, (d) největší rychlost.

ODST. 33.4 Kmitý LC kvantitativně

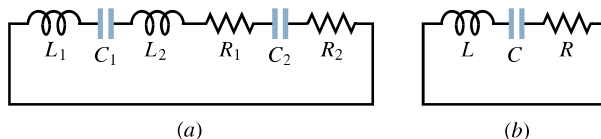
- 9C.** V některých generátorech elektronické hudby se používají oscilátory LC . Jak velká indukčnost musí být použita spolu s kondenzátorem $6,7 \mu\text{F}$ k získání frekvence komorního a (440 Hz)?
- 10C.** Jakou kapacitu musíte připojit k cívce $1,30 \text{ mH}$, abyste vytvořili oscilátor rezonující na $3,50 \text{ kHz}$?
- 11C.** V obvodu LC s $L = 50 \text{ mH}$ a $C = 4,0 \mu\text{F}$ je počáteční proud maximální. Jak dlouho potrvá, než se kondenzátor nabije poprvé na maximální napětí?
- 12C.** Uvažujte obvod podle obr.33.22. Se spínačem S_1 sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou

konstantu τ_C (viz čl.28.8). Se spínačem S_2 sepnutým a dalšími dvěma rozpojenými má obvod časovou konstantu τ_L (viz čl.31.9). Se spínačem S_3 sepnutým a zbývajících rozpojenými kmitá obvod s periodou T . Dokažte, že $T = 2\pi\sqrt{\tau_C\tau_L}$.



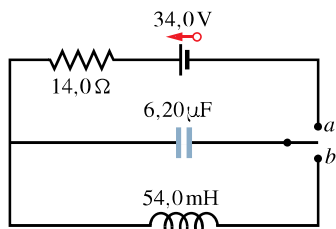
Obr.33.22 Cvičení 12

- 13C.** S použitím smyčkového pravidla odvoďte diferenciální rovnici (33.11) pro obvod LC .
- 14C.** Jednoduchá smyčka se skládá z několika cívek (L_1, L_2, \dots), několika kondenzátorů (C_1, C_2, \dots) a několika rezistorů (R_1, R_2, \dots) zapojených v sérii (obr.33.23a). Dokažte, že bez ohledu na pořadí těchto obvodových prvků ve smyčce je chování obvodu stejné jako chování jednoduchého obvodu LC v obr.33.23b. (Tip: Použijte smyčkové pravidlo a cvič. 56 v kap.31.)



Obr.33.23 Cvičení 14

- 15Ú.** V kmitavém obvodu LC složeném z kondenzátoru $1,0 \text{ nF}$ a cívky $3,0 \text{ mH}$ je maximální napětí $3,0 \text{ V}$. (a) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (b) Jaký je maximální proud v obvodu? (c) Jaká je maximální energie magnetického pole cívky?
- 16Ú.** Kmitavý obvod LC má indukčnost $3,00 \text{ mH}$ a kapacitu $10,0 \mu\text{F}$. Vypočtete jeho (a) úhlovou frekvenci, (b) periodu kmitů. (c) V čase $t = 0$ je kondenzátor nabit nábojem $200 \mu\text{C}$ a proud je nulový. Nakreslete (přibližně) průběh náboje na kondenzátoru jako funkci času.
- 17Ú.** V kmitavém obvodu LC s kapacitou $C = 4,00 \mu\text{F}$ je maximální napětí na kondenzátoru během oscilací $1,50 \text{ V}$ a maximální proud je $50,0 \text{ mA}$. (a) Jaká je indukčnost L ? (b) Jaká je frekvence kmitů? (c) Za jakou dobu dosáhne náboj na kondenzátoru maximální hodnotu (z nenabitého stavu)?
- 18Ú.** V obvodu na obr.33.24 byl přepínač po dlouhou dobu v poloze a . Náhle je přepojen do polohy b . (a) Vypočtete frekvenci kmitů proudu. (b) Jaká je jejich amplituda?
- 19Ú.** Mějme cívku 10 mH a dva kondenzátory o kapacitách $5,0 \mu\text{F}$ a $2,0 \mu\text{F}$. Vypište všechny rezonanční kmitočty, které můžeme generovat spojením těchto prvků v různých kombinacích.



Obr. 33.24 Úloha 18

20Ú. Obvod LC rezonuje na frekvenci 10,4 kHz. (a) Jaká je indukčnost v obvodu, je-li kapacita $340\ \mu\text{F}$? (b) Jaká je celková energie v obvodu, je-li maximální proud $7,20\ \text{mA}$? (c) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru?

21Ú. (a) V kmitavém obvodu LC vyjádřete pomocí maximálního náboje na kondenzátoru velikost náboje v okamžiku, kdy energie elektrického pole je rovna 50,0 % energie magnetického pole. (b) Jaký zlomek periody musí uplynout od okamžiku, kdy je kondenzátor plně nabit, do splnění podmínky (a)?

22Ú. V kmitavém obvodu LC je v jistém okamžiku 75,0 % celkové energie akumulováno v magnetickém poli cívky. (a) Pomocí maximálního náboje Q vyjádřete náboj na kondenzátoru v tomto okamžiku. (b) Vyjádřete pomocí maximálního proudu v cívce velikost proudu v tomto okamžiku.

23Ú. Cívka je připojena ke kondenzátoru, jehož kapacitu lze plynule měnit otočným knoflíkem. Chceme, aby se frekvence kmitů LC měnila lineárně s úhlem natočení knoflíku v rozmezí $2 \cdot 10^5\ \text{Hz}$ až $4 \cdot 10^5\ \text{Hz}$ při otočení o 180° . Sestrojte graf závislosti požadované kapacity C na úhlu natočení knoflíku, je-li $L = 1,0\ \text{mH}$.

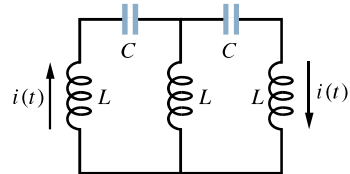
24Ú. Proměnný kondenzátor s rozsahem kapacity $10\ \text{pF}$ až $365\ \text{pF}$ tvoří s cívkou kmitavý obvod LC s proměnnou frekvencí k ladění radiopřijímače. (a) Jaký je poměr nejvyššího a nejnižšího kmitočtu, které můžeme získat tímto obvodem? (b) Mají-li být takovým obvodem získány kmitočty od $0,54\ \text{MHz}$ do $1,60\ \text{MHz}$, je poměr vypočtený v (a) příliš vysoký. Požadovaného poměru kmitočtů lze dosáhnout připojením paralelního kondenzátoru. Jak velkou kapacitu musíme přidat a jakou indukčnost použít, abychom získali požadovaný rozsah kmitočtů?

25Ú. V kmitavém obvodu LC je $L = 25,0\ \text{mH}$ a $C = 7,80\ \mu\text{F}$. V čase $t = 0$ je proud $9,20\ \text{mA}$, náboj na kondenzátoru je $3,80\ \mu\text{C}$ a kondenzátor se nabíjí. (a) Jaká je celková energie v obvodu? (b) Jaký je maximální náboj na kondenzátoru? (c) Jaký je maximální proud? (d) Jaká je hodnota φ , je-li náboj na kondenzátoru dán vztahem $q = Q \cos(\omega t + \varphi)$? (e) Při stejném zadání předpokládejte, že se kondenzátor vybíjí. Jaká je v takovém případě hodnota φ ?

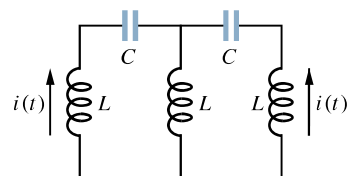
26Ú. V kmitavém obvodu LC je $L = 3,00\ \text{mH}$ a $C = 2,70\ \mu\text{F}$. V čase $t = 0$ je náboj na kondenzátoru nulový a proud je $2,00\ \text{A}$. (a) Jaký největší náboj se objeví na kondenzátoru? (b) Ve kterém okamžiku (vyjádřeno pomocí periody T) narůstá elektrická energie na kondenzátoru největší rychlostí?

27Ú. Tři stejné cívky L a dva stejné kondenzátory C tvoří dvě

smyčky podle obr. 33.25. (a) Předpokládejte, že proudy tečou podle obr. 33.25a. Jaký je proud v prostřední cívce? Napište odpovídající rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny tehdy, když proud kmitá s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{LC}$. (b) Předpokládejte, že proudy jsou orientovány podle obr. 33.25b. Jaký proud nyní teče prostřední cívkou? Napište rovnice pomocí smyčkového pravidla a ukažte, že jsou splněny, jestliže proud kmitá s úhlovou frekvencí $\omega = 1/\sqrt{3LC}$. (Protože obvody mohou kmitat na dvou různých frekvencích, nemůžeme je nahradit jediným obvodem LC .)



(a)



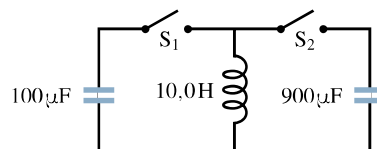
(b)

Obr. 33.25 Úloha 27

28Ú. Sériový obvod s indukčností L_1 a kapacitou C_1 kmitá s úhlovou frekvencí ω . Druhý sériový obvod s indukčností L_2 a kapacitou C_2 kmitá se stejnou úhlovou frekvencí. Vyjádřete úhlovou frekvenci kmitů obvodu obsahujícího všechny čtyři prvky v sérii. (Odpor obvodu zanedbejte.)

29Ú. V kmitavém obvodu LC s $C = 64,0\ \mu\text{F}$ je proud jako funkce času dán vztahem $i(t) = 1,60 \sin(2500t + 0,680)$, kde t je v sekundách, i v ampérech a fáze v radiánech. (a) Kdy poprvé (pro $t > 0$) dosáhne proud svého maxima? Jaká je (b) indukčnost, (c) celková energie obvodu?

30Ú*. V obr. 33.26 je ve výchozím stavu kondenzátor $900\ \mu\text{F}$ nabit na $100\ \text{V}$ a kondenzátor $100\ \mu\text{F}$ je vybit. Popište detailně, jak lze nabít kondenzátor $100\ \mu\text{F}$ na napětí $300\ \text{V}$ manipulací s přepínači S_1 a S_2 .



Obr. 33.26 Úloha 30

ODST. 33.5 Tlumené kmitý v obvodu RLC

31C. Jaký odpor R musíme zapojit do série s indukčností $L = 220\ \text{mH}$ a kapacitou $C = 12,0\ \mu\text{F}$, aby maximální ná-

boj na kondenzátoru klesl na 99,0 % původní hodnoty během 50,0 period? (Předpokládejte $\omega' \doteq \omega$.)

32C. Uvažujte tlumený obvod RLC . (a) Ukažte, že člen vyjadřující tlumení $e^{-Rt/(2L)}$, který obsahuje L , ale ne C , lze přepsat do více symetrického tvaru, který zahrnuje L i C , ve tvaru $e^{-\pi R\sqrt{C/L}(t/T)}$, kde T je perioda kmitů (při zanedbání odporu). (b) S použitím (a) ukažte, že jednotka pro $\sqrt{L/C}$ v SI je ohm. (c) S použitím (a) ukažte, že podmínka pro to, aby ztráty energie za periodu byly malé, je $R \ll \sqrt{L/C}$.

33Ú. V kmitavém sériovém obvodu RLC určete dobu potřebnou k tomu, aby maximální energie kondenzátoru během oscilací poklesla na polovinu počáteční hodnoty. Předpokládejte $q = Q$ v čase $t = 0$.

34Ú. Obvod s jednou smyčkou se skládá z rezistoru $7,20 \Omega$, cívky $12,0 \text{ H}$ a kondenzátoru $3,20 \mu\text{F}$. Na počátku měl kondenzátor náboj $6,20 \mu\text{C}$ a proud byl nulový. Vypočítejte náboj na kondenzátoru po N úplných periodách později pro $N = 5, 10$ a 100 .

35Ú. V čase $t = 0$ není na kondenzátoru obvodu RLC žádný náboj, avšak cívkou protéká proud I . (a) Vyjádřete počáteční fázi φ v rov. (33.21) pro tento obvod. (b) Napište výraz pro náboj q na kondenzátoru jako funkci času t pomocí amplitudy proudu a úhlové frekvence ω' .

36Ú. (a) Přímým dosazením rov. (33.21) do rov. (33.20) dokažte, že $\omega' = \sqrt{(1/LC) - (R/2L)^2}$. (b) O kolik se změní frekvence kmitů, jestliže se odpor zvýší z 0 na 100Ω v obvodu, v němž je $L = 4,40 \text{ H}$ a $C = 7,30 \mu\text{F}$?

37Ú*. Dokažte, že v kmitavém obvodu RLC je relativní úbytek energie $\Delta E/E$ za jednu periodu přibližně roven $2\pi R/(\omega L)$. Veličina $\omega L/R$ se nazývá *činitel jakosti* Q obvodu (nezaměňovat s nábojem). Obvody s velkou hodnotou Q mají malý odpor a nízké poměrné ztráty energie za periodu $2\pi/Q$.

ODST. 33.8 Tři jednoduché obvody

38C. Kondenzátor $1,50 \mu\text{F}$ je připojen podle obr. 33.9a ke generátoru střídavého napětí s $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$. Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) $1,00 \text{ kHz}$, (b) $8,00 \text{ kHz}$?

39C. Cívka $50,0 \text{ mH}$ je připojena podle obr. 33.10a ke generátoru střídavého napětí s $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$. Jaká je amplituda výsledného střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) $1,00 \text{ kHz}$, (b) $8,00 \text{ kHz}$?

40C. Rezistor $50,0 \Omega$ je připojen podle obr. 33.8a ke generátoru střídavého napětí s $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$. Jaká je amplituda střídavého proudu, je-li frekvence emn (a) $1,00 \text{ kHz}$, (b) $8,00 \text{ kHz}$?

41C. Cívka s indukčností $L = 45,0 \text{ mH}$ má induktivní reaktanci $X_L = 1,30 \text{ k}\Omega$. (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká je kapacita kondenzátoru se stejnou reaktancí při stejné frekvenci? (c) Jak velké budou reaktance cívky a kondenzátoru, jestliže se frekvence zdvojnásobí?

42C. Kondenzátor $1,50 \mu\text{F}$ má reaktanci $12,0 \Omega$. (a) Při jaké frekvenci? (b) Jaká bude jeho reaktance, jestliže frekvenci zdvojnásobíme?

43C. (a) Při jaké frekvenci by měly cívka $6,0 \text{ mH}$ a kondenzátor $10 \mu\text{F}$ stejnou reaktanci a (b) jak velká by byla? (c) Dokažte, že tato frekvence by byla frekvencí vlastních kmitů obvodu se zadanými hodnotami L a C .

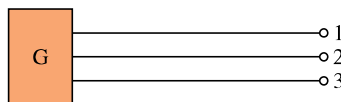
44Ú. Generátor emn $e = \mathcal{E} \sin \omega_b t$, kde $\mathcal{E} = 25,0 \text{ V}$ a $\omega_b = 377 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, je připojen k cívce o indukčnosti $12,7 \text{ H}$. (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru v okamžiku, když je proud právě maximální? (c) Jaký je proud v okamžiku, když je emn generátoru rovno $-12,5 \text{ V}$ a dále klesá?

45Ú. Generátor z úlohy 44 je připojen ke kondenzátoru $4,15 \mu\text{F}$. (a) Jaká je maximální hodnota proudu? (b) Jaké je emn generátoru, je-li proud právě maximální? (c) Je-li emn generátoru $-12,5 \text{ V}$ a roste, jaký je proud?

46Ú. Generátor má emn $e = \mathcal{E} \sin(\omega_b t - \pi/4)$, kde $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$ a $\omega_b = 350 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Proud v připojeném obvodu je $i(t) = I \sin(\omega_b t - 3\pi/4)$, kde $I = 620 \text{ mA}$. (a) Kdy dosáhne emn generátoru pro $t > 0$ poprvé maxima? (b) Kdy dosáhne proud generátoru pro $t > 0$ poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru další prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota kapacity, indukčnosti, nebo odporu z otázky (c)?

47Ú. Generátor má emn $e = \mathcal{E} \sin(\omega_b t - \pi/4)$, kde $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$ a $\omega_b = 350 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Proud je dán vztahem $i(t) = I \sin(\omega_b t + \pi/4)$, kde $I = 620 \text{ mA}$. (a) V jakém čase po $t = 0$ nabude emn generátoru poprvé maxima? (b) Kdy pro $t > 0$ nabude proud poprvé maxima? (c) Obvod obsahuje kromě generátoru ještě jeden prvek. Je to kondenzátor, cívka, nebo rezistor? Zdůvodněte svou odpověď. (d) Jaká je hodnota příslušné kapacity, indukčnosti, nebo odporu?

48Ú. Třífázový generátor G je zdrojem energie, která je přenášena pomocí tří vodičů podle obr. 33.27. Jejich napětí vůči zemi jsou $u_1 = U \sin \omega_b t$, $u_2 = U \sin(\omega_b t - 120^\circ)$ a $u_3 = U \sin(\omega_b t - 240^\circ)$. Některá zařízení většího výkonu (např. motory) mají tři svorky a jsou navrženy tak, že se připojí přímo ke všem třem vodičům. Ukažte, že napětí mezi dvěma libovolnými vodiči (a) kmitá harmonicky s časem s úhlovou frekvencí ω_b , (b) má amplitudu $U\sqrt{3}$.



třívodičové přenosové vedení

Obr. 33.27 Úloha 48

ODST. 33.9 Sériový obvod RLC

49C. (a) Nalezněte Z , φ a I pro zadání z př. 33.5, jestliže odstraníme kondenzátor z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete ve vhodném měřítku pro tento nový stav fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

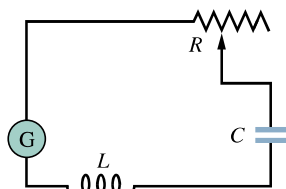
50C. (a) Stanovte Z , φ a I pro zadání z př. 33.5, odstraníme-li cívku z obvodu a nezměníme ostatní parametry. (b) Nakreslete

pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram podobný obr. 33.11d.

51C. (a) Nalezněte Z , φ a I pro zadání př. 33.5 s $C = 70,0 \mu\text{F}$, jestliže se ostatní parametry nezměnily. (b) Nakreslete pro tento nový stav ve vhodném měřítku fázorový diagram, podobný obr. 33.11d, a oba diagramy porovnejte.

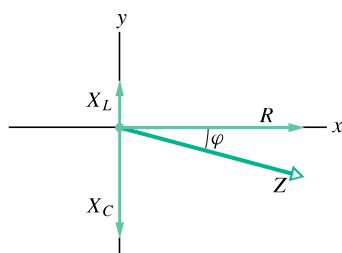
52C. Zdroj s proměnným kmitočtem je spojen v sérii s cívkou $L = 2,50 \text{ mH}$ a s kondenzátorem $C = 3,00 \mu\text{F}$. Při jakém kmitočtu zdroje bude v obvodu největší amplituda proudu?

53Ú. V obr. 33.28 je generátor s proměnným kmitočtem zapojen v sérii s proměnným odporem R , kondenzátorem $C = 5,50 \mu\text{F}$ a cívkou s indukčností L . Při $R = 100 \Omega$ je amplituda proudu při kmitočtech 1,30 kHz a 1,50 kHz poloviční ve srovnání s maximálním proudem v obvodu. (a) Jaká je hodnota L ? (b) Při jakých kmitočtech je proud roven polovině maximální hodnoty, zvětší-li se R ?



Obr. 33.28 Úloha 53

54Ú. Provedte konstrukci diagramu podle obr. 33.29. Nakreslete (1) vektor v kladném směru osy y o velikosti X_L , (2) vektor v záporném směru osy y o velikosti X_C , (3) vektor v kladném směru osy x o velikosti R a najděte jejich výslednici. Přesvědčte se výpočtem, že impedance Z obvodu RLC je rovna velikosti této výslednice a fázové posunutí φ je rovno úhlu, který svírá tato výslednice s kladným směrem osy x . Jaký charakter (induktivní, nebo kapacitní) má obvod, kterému odpovídá obr. 33.29?



Obr. 33.29 Úloha 54

55Ú. Může být amplituda napětí na cívce větší než amplituda emn generátoru v obvodu RLC ? Uvažujte obvod RLC s $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$, $R = 10 \Omega$, $L = 1,0 \text{ H}$ a $C = 1,0 \mu\text{F}$. Vypočítejte amplitudu napětí na cívce při rezonanci.

56Ú. Cívka s indukčností 88 mH o neznámé rezistanci a kondenzátor $0,94 \mu\text{F}$ jsou spojeny v sérii se střídavým emn o kmitočtu 930 Hz. Jaká je rezistance cívky, je-li fázový posun mezi přiloženým napětím a proudem 75° ?

57Ú. Jaké je napětí na (a) generátoru, (b) rezistoru, (c) kondenzátoru a (d) cívce, je-li okamžitá hodnota emn v př. 33.5

maximální? (e) Součtem těchto okamžitých hodnot vzatých s příslušným znaménkem ověřte, že splňují smyčkové pravidlo.

58Ú. Generátor střídavého proudu s $\mathcal{E} = 220 \text{ V}$, pracující s kmitočtem 400 Hz, vyvolá kmity v sériovém obvodu RLC , který má $R = 220 \Omega$, $L = 150 \text{ mH}$ a $C = 24,0 \mu\text{F}$. Stanovte (a) kapacitní reaktanci X_C , (b) impedanci Z , (c) amplitudu proudu I . Druhý kondenzátor o stejné kapacitě je pak připojen v sérii s ostatními prvky. Určete, jestli hodnoty (d) X_C , (e) Z a (f) I vzrostou, poklesnou, nebo zůstanou stejné.

59Ú. Obvod RLC podle obr. 33.7 má $R = 5,00 \Omega$, $C = 20,0 \mu\text{F}$, $L = 1,00 \text{ H}$ a $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$. (a) Při jaké úhlové frekvenci ω_b bude mít amplituda proudu maximální hodnotu? (b) Jaká hodnota to bude? (c) Při jakých dvou úhlových frekvencích ω_{b1} a ω_{b2} bude amplituda proudu rovna polovině této maximální hodnoty? (d) Jaká je poměrná pološířka $(\omega_{b1} - \omega_{b2})/\omega$ rezonanční křivky tohoto obvodu?

60Ú. V jistém sériovém obvodu RLC je maximální emn generátoru 125 V a maximální proud je 3,20 A. Pokud proud předbíhá emn o 0,982 rad, jaká je (a) impedance a (b) odpor obvodu? (c) Je obvod kapacitního, nebo induktivního charakteru?

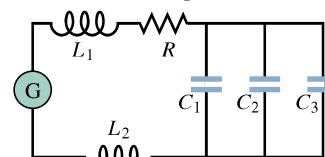
61Ú. Sériový obvod RLC má rezonanční frekvenci 6,00 kHz. Je-li napájen při 8,00 kHz, má impedanci 1,00 k Ω a počáteční fázi 45° . Jaké jsou hodnoty (a) R , (b) L , (c) C pro tento obvod?

62Ú. V sériovém obvodu RLC je při kmitočtu 50,0 Hz maximální napětí na cívce rovno dvojnásobku maximálního napětí na rezistoru a také dvojnásobku maximálního napětí na kondenzátoru. (a) Jaký je fázový posun mezi proudem a emn generátoru? (b) Jaký by musel být odpor obvodu, aby byl maximální proud 300 mA, má-li emn generátoru amplitudu 30,0 V?

63Ú. Obvod z př. 33.5 není v rezonanci. (a) Podle čeho to poznáte? (b) Jaký kondenzátor je třeba přidat ke stávajícímu, aby se obvod dostal do rezonance? (c) Jaká bude potom amplituda proudu?

64Ú. Generátor je zapojen v sérii s cívkou o indukčností $L = 2,00 \text{ mH}$ a kondenzátorem o kapacitě C . Kapacitu C máte vytvořit pomocí kondenzátorů s kapacitami $C_1 = 4,00 \mu\text{F}$ a $C_2 = 6,00 \mu\text{F}$ použitých buď jednotlivě, nebo v kombinaci. Jaké rezonanční kmitočty může mít obvod v závislosti na hodnotě C ?

65Ú. Na obr. 33.30 je generátor s proměnnou frekvencí kmitů připojen k rezistoru s $R = 100 \Omega$, k cívkám s $L_1 = 1,70 \text{ mH}$ a $L_2 = 2,30 \text{ mH}$ a ke kondenzátorům s $C_1 = 4,00 \mu\text{F}$, $C_2 = 2,50 \mu\text{F}$ a $C_3 = 3,50 \mu\text{F}$. (a) Jaká je rezonanční frekvence obvodu? (Tip: Viz úlohu 56 v kap. 31.) Jak se změní rezonanční



Obr. 33.30 Úloha 65

kmitočet, jestliže se (b) zvětší hodnota R , (c) zvětší hodnota L_1 , (d) odstraní kondenzátor C_3 z obvodu?

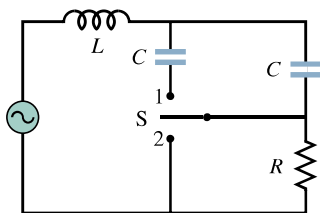
66Ú. Sériový obvod RLC s prvky R_1, L_1, C_1 má stejnou rezonanční frekvenci jako druhý obvod s prvky R_2, L_2, C_2 . Nyní spojte oba obvody do série. Dokažte, že nově vzniklý obvod má opět stejnou rezonanční frekvenci jako každý z obou obvodů samostatně.

67Ú. Dokažte, že poměrná pološířka rezonanční křivky (viz úlohu 59d) je dána vztahem

$$\frac{\Delta\omega_b}{\omega} = \sqrt{\frac{3C}{L}}R,$$

kde ω je úhlová frekvence při rezonanci a $\Delta\omega_b$ šířka rezonanční křivky při poloviční amplitudě. Povšimněte si, že $\Delta\omega_b/\omega$ narůstá s R , jak ukazuje obr. 33.13. Použijte tento vzorec ke kontrole odpovědi k úloze 59d.

68Ú*. Generátor na obr. 33.31 dodává střídavé napětí 230 V při 50,0 Hz. Při rozpojeném přepínači (jako na obrázku) předbíhá proud emn generátoru o $20,0^\circ$. S přepínačem v poloze 1 je proud zpožděn za emn generátoru o $10,0^\circ$. Když je přepínač v poloze 2, je proud 2,00 A. Určete hodnoty R, L a C .



Obr. 33.31 Úloha 68

ODST. 33.10 Výkon v obvodech se střídavým proudem

69C. Jaká je maximální hodnota střídavého napětí, jehož efektivní hodnota je 100 V?

70C. Voltmetr s velkou impedancí je postupně připojen k cívce, kondenzátoru a rezistoru sériového obvodu RLC , který je zapojen k emn 100 V (efektivních). Ve všech případech na voltmetru odečteme stejné napětí. Jaká je tato odečtená hodnota?

71C. (a) Rozeberte zadání z úlohy 44c. Dodává, nebo odebírá generátor energii z obvodu? (b) Opakujte výpočet pro podmínky z úlohy 45c.

72C. Jak velký stejnosměrný proud musí procházet daným rezistorem, aby měl stejný tepelný výkon jako střídavý proud s maximální hodnotou 2,60 A?

73C. Pro obvody ve cvič. 39, 40, 49 a 50 vypočítejte střední ztrátový výkon.

74C. Dokažte, že střední výkon dodávaný do obvodu v obr. 33.7 lze vyjádřit také vztahem $\bar{P} = (\mathcal{E}_{ef})^2 R/Z^2$. Ukažte, že tento výraz pro střední výkon dává správné výsledky pro čistě odporový obvod, pro obvod RLC při rezonanci a pro čistě kapacitní a čistě induktivní obvod.

75C. Elektrický motor připojený ke 230 V a 50,0 Hz koná (mechanickou) práci s výstupním výkonem 74,6 W. Jaký je jeho odpor, protéká-li motorem efektivní proud 0,650 A?

76C. Klimatizační zařízení, připojené k síti o napětí $U_{ef} = 120$ V, je ekvivalentní sériovému zapojení odporu 12,0 Ω a induktivní reaktance 1,30 Ω . (a) Vypočítejte impedanci klimatizačního zařízení. (b) Vypočítejte střední výkon do něj dodávaný.

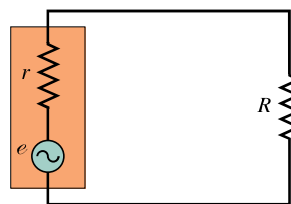
77C. Elektrický motor při zatížení má rezistanci 32,0 Ω a induktivní reaktanci 45,0 Ω . Efektivní napětí střídavého zdroje je 420 V. Vypočítejte efektivní proud tekoucí motorem.

78Ú. Namísto grafického zdůvodnění v obr. 33.14b dokažte výpočtem, že časová střední hodnota výrazu $\sin^2(\omega t - \varphi)$ přes celistvý počet půlperiod je rovna 1/2.

79Ú. Pro harmonicky buzený sériový obvod RLC dokažte, že po jedné celé periodě T se energie uložená (a) v kondenzátoru, (b) v cívce nezměnila. Dokažte, že v průběhu periody (c) zdroj emn dodá energii $(\frac{1}{2}T)\mathcal{E}I \cos \varphi$, (d) v rezistoru se disipuje energie $(\frac{1}{2}T)RI^2$. (e) Ukažte, že energie nalezené v (c) a (d) jsou stejně velké.

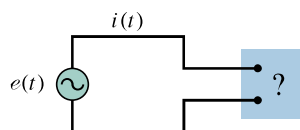
80Ú. V sériovém kmitavém obvodu RLC je $R = 16,0 \Omega$, $C = 31,2 \mu\text{F}$, $L = 9,20 \text{ mH}$ a $e = \mathcal{E} \sin \omega_b t$ s $\mathcal{E} = 45,0$ V a $\omega_b = 3\,000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. V čase $t = 0,442 \text{ ms}$ určete okamžitý výkon (a) dodávaný generátorem, (b) dodávaný do kondenzátoru, (c) dodávaný do cívky, (d) disipovaný v rezistoru. (e) Jaký je význam záporné hodnoty pro kterýkoli z výsledků (a), (b) a (c)? (f) Ukažte, že součet výsledků (b), (c) a (d) je roven výsledku (a).

81Ú. Pro obvod z obr. 33.32 ukažte, že střední výkon, s nímž je energie disipována v rezistoru R , je největší, je-li R roven vnitřnímu odporu r generátoru střídavého proudu. (Až doposud jsme mlčky předpokládali ideální generátory, tj. $r = 0$.)



Obr. 33.32 Úlohy 81 a 90

82Ú. Obr. 33.33 ukazuje střídavý generátor připojený dvojicí svorek k „černé skříňce“. Ve skříňce je obvod RLC skládající se třeba i z více smyček, jejichž propojení však neznáme. Měření z vnějšku skříňky ukáže, že $e(t) = (75,0 \text{ V}) \sin \omega_b t$ a $i(t) = (1,20 \text{ A}) \sin(\omega_b t + 42,0^\circ)$. (a) Jaký je účinník? (b) Předbíhá proud v obvodu, nebo je zpožděn vzhledem k emn? (c) Má obvod ve skříňce induktivní, nebo kapacitní charakter? (d) Je obvod

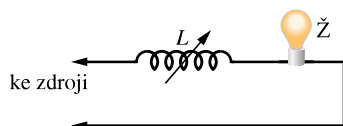


Obr. 33.33 Úloha 82

ve skříňce v rezonanci? (e) Musí být ve skříňce kondenzátor? Cívka? Rezistor? (f) Jaký je střední výkon, dodávaný do skříňky z generátoru? (g) Proč nepotřebujeme znát úhlovou frekvenci obvodu ω_b , k odpovědi na některé uvedené otázky?

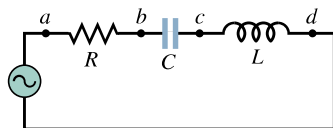
83Ú. V obvodu RLC na obr. 33.7 zvolme $R = 5,00 \Omega$, $L = 60,0 \text{ mH}$, $f_b = 50,0 \text{ Hz}$ a $\mathcal{E} = 30,0 \text{ V}$. Pro jakou velikost kapacity bude střední ztrátový výkon v rezistoru (a) největší, (b) nejmenší? (c) Jaké je maximum a minimum ztrátového výkonu? Jaké jsou odpovídající (d) fázové posuny a (e) účinníky?

84Ú. Před zavedením tyristorů se jako typický „stmívač“ pro jevištní reflektory používala cívka s proměnnou indukčností od 0 do L_{\max} zapojená v sérii se žárovkami reflektorů podle obr. 33.34. Napájecí napětí je 230 V, 50 Hz; žárovka nese údaj 230 V, 1000 W. (a) Jakou hodnotu L_{\max} musí mít cívka, aby mohla zeslabit reflektor až na jednu pětinu plného výkonu? (Odpor vlákna sice s rostoucí teplotou a tedy i s dodávaným výkonem roste, ale tuto závislost neuvažujte a berte odpor jako konstantní.) (b) Mohli bychom místo cívky použít reostat (proměnný odpor) nastavitelný od 0 do R_{\max} ? Jestliže ano, jakou hodnotu R_{\max} bychom potřebovali? Proč se reostat nepoužívá?



Obr. 33.34 Úloha 84

85Ú. V obr. 33.35 je $R = 15,0 \Omega$, $C = 4,70 \mu\text{F}$ a $L = 25,0 \text{ mH}$. Generátor dodává napětí 75,0 V při kmitočtu 550 Hz. (a) Vypočtete efektivní proud. (b) Stanovte efektivní napětí U_{ab} , U_{bc} , U_{cd} , U_{bd} , U_{ad} . (c) Jaká je střední hodnota ztrátového výkonu v každém ze tří prvků?



Obr. 33.35 Úloha 85

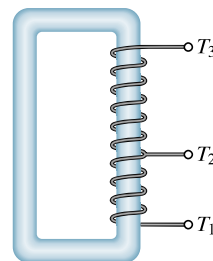
ODST. 33.11 Transformátory

86C. Generátor s výstupním napětím 100 V je připojen k primárnímu vinutí transformátoru s 50 závitů. Jaké je napětí na sekundárním vinutí, které má 500 závitů?

87C. Primární vinutí transformátoru má 500 závitů a sekundární vinutí 10 závitů. (a) Jaké je napětí U_2 , je-li sekundární obvod rozpojený a je-li primární napětí $U_1 = 120 \text{ V}$? (b) Jaký poteče proud v primárním a v sekundárním vinutí, je-li sekundární vinutí připojeno k odporové zátěži 15Ω ?

88C. Obr. 33.36 ukazuje tzv. *autotransformátor*. Ten je tvořen jedinou cívkou (navinutou na železném jádře) se třemi vývody T_i . Mezi vývody T_1 a T_2 je 200 závitů a mezi vývody T_2 a T_3 je 800 závitů. Libovolné dva vývody můžeme považovat za „primární svorky“ a jiné dva vývody za „sekundární svorky“.

Vypište všechny poměry, se kterými můžeme primární napětí transformovat na sekundární.



Obr. 33.36 Cvičení 88

89Ú. Generátor střídavého proudu o výkonu 250 kW dodává energii do odporové zátěže ve vzdálené továrně prostřednictvím dvou vodičů přenosového vedení. Každý z nich má odpor $0,30 \Omega$. V továrně je použit snižovací transformátor poskytující napětí mnohem nižší, bezpečně a pro použití v továrně vhodnější. Vypočtete pokles napětí na vedení a ztrátový výkon ve vedení, je-li efektivní hodnota emn generátoru (a) $U = 80 \text{ kV}$, (b) $U = 8,0 \text{ kV}$ a (c) $U = 0,80 \text{ kV}$. Vyhodnoťte vhodnost každé volby.

90Ú. Nechtě zvyrazněný obdélník vlevo v obr. 33.32 představuje výstup zesilovače s vysokou impedancí 1000Ω a místo rezistoru je cívka reproduktoru s nízkou impedancí 10Ω . Pro přenos maximálního výkonu do zátěže R musí být, jak víme z kap. 28, úlohy 24, $R = r$, což zde není splněno. Jak však víme, můžeme použít transformátor i k „transformaci“ odporů. Načrtněte mezi zesilovač a reproduktor v obr. 33.32 primární a sekundární vinutí transformátoru tak, abychom přizpůsobili impedance. Jaký musí být poměr počtu jeho závitů?

PRO POČÍTAČ

91Ú. Kondenzátor $45,0 \mu\text{F}$ a rezistor 200Ω jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí $U_z = 100 \text{ V}$. Frekvenci f zdroje lze měnit od 0 do 100 Hz. (a) Napište rovnici pro reaktanci kondenzátoru X_C . (b) Znázorněte v grafu současně rezistanci R , reaktanci kondenzátoru X_C a impedanci Z v závislosti na kmitočtu f v rozsahu $0 < f < 100 \text{ Hz}$. (c) Z grafu určete hodnotu f , při které $X_C = R$.

92Ú. Pro zadání z úlohy 91 znázorněte současně napětí U_C na kondenzátoru, napětí U_R na rezistoru a (konstantní) napětí U_z zdroje v závislosti na f v rozsahu $0 < f < 100 \text{ Hz}$. (b) Z grafu určete hodnotu f , při které $U_C = U_R$. (c) Jaká je hodnota U_R při této frekvenci? (d) Určete hodnotu f , při které $U_R = 0,50U_z$. (e) Jaké je U_C při této frekvenci? (f) Určete hodnotu f , při které $U_C = 0,50U_z$. (g) Jaká je hodnota U_R při této frekvenci?

93Ú. Cívka $40,0 \text{ mH}$ a rezistor 200Ω jsou spojeny v sérii se zdrojem střídavého napětí $U_z = 100 \text{ V}$. Frekvenci zdroje lze měnit od 0 do 2500 Hz. (a) Napište vztah pro induktivní reaktanci X_L . (b) Znázorněte současně odpor R , induktivní reaktanci X_L a impedanci Z v závislosti na f v rozsahu $0 < f < 2500 \text{ Hz}$. (c) Z grafů určete hodnotu f , při které $X_L = R$.

94Ú. Pro zadání z úlohy 93 znázorníte současně napětí U_L na cívce, napětí U_R na rezistoru a (konstantní) napětí U_z zdroje v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 2\,500$ Hz. (b) Z grafu určete frekvenci f , při které je $U_L = U_R$. (c) Jaké je napětí U_R při této frekvenci? (d) Určete frekvenci f , při které $U_R = U_z/3$. (e) Jaké je napětí U_L při této frekvenci? (f) Určete frekvenci f , při které $U_L = U_z/3$. (g) Jaké je napětí U_R při této frekvenci?

95Ú. Cívka $150,0$ mH, kondenzátor $45,0\ \mu\text{F}$ a rezistor $90,0\ \Omega$ jsou zapojeny v sérii ke zdroji střídavého napětí $U_z = 100$ V. Frekvenci zdroje f lze měnit od 0 do $1\,000$ Hz. (a) Vyneste do grafu současně kapacitní reaktanci X_C a induktivní reaktanci X_L v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 200$ Hz. (b) Z grafu určete hodnotu f , při které $X_C = X_L$. (c) Vyneste impedanci Z obvodu v závislosti na frekvenci f v rozsahu $0 < f < 188$ Hz a z grafu stanovte frekvenci f , při které je impedance Z minimální.

65. $(n_1C_1 + n_2C_2 + n_3C_3)/(n_1 + n_2 + n_3)$. 67. (a) $-5,0$ kJ; (b) $2,0$ kJ; (c) $5,0$ kJ. 69. (a) $0,375$ mol; (b) 1090 J; (c) $0,714$. 71. (a) $p_f = 14$ atm; (b) $T_f = 620$ K. 79. $0,63$. 81. (a) Jednoatomový; (b) $2,7 \cdot 10^4$ K; (c) $4,5 \cdot 10^4$ mol; (d) $3,4$ kJ, 340 kJ; (e) $0,01$. 83. 5 m³. 85. (a) Hodnoty v pořadí Q , ΔE_{int} , W : děj 1 \rightarrow 2: 3740 J, 3740 J, 0 ; děj 2 \rightarrow 3: 0 , -1810 J, 1810 J; děj 3 \rightarrow 1: -3220 J, -1930 J, -1290 J; celý cyklus: 520 J, 0 , 520 J; (b) $V_2 = 0,0246$ m³, $p_2 = 2p_1$, $V_3 = 0,0373$ m³, $p_3 = p_1 = 1,01 \cdot 10^5$ Pa.

Kapitola 21

KONTROLY 1. (a), (b), (c). 2. Menší. 3. (c), (b), (a). 4. (a), (d), (c), (b). 5. (b).

OTÁZKY 1. Nemění se. 3. B , A , C , D . 5. Je stejná. 7. (a) Zůstává konstantní; (b) roste; (c) klesá. 9. (a) Zůstává konstantní; (b) roste; (c) klesá. 11. (a) 0 ; (b) $1/4$; (c) $1/2$.

CVIČENÍ A ÚLOHY 1. $14,4$ J·K⁻¹. 3. (a) $9,22 \cdot 10^3$ J; (b) $23,1$ J·K⁻¹; (c) 0 . 5. $5,79 \cdot 10^4$ J; 173 J·K⁻¹. 7. (a) $14,6$ J·K⁻¹; (b) $30,2$ J·K⁻¹. 9. (a) $57,0$ °C; (b) $-22,1$ J·K⁻¹; (c) $+24,9$ J·K⁻¹; (d) $+2,8$ J·K⁻¹. 13. (a) 320 K; (b) 0 ; (c) $+1,72$ J·K⁻¹. 15. $0,75$ J·K⁻¹. 17. (a) -943 J·K⁻¹; (b) $+943$ J·K⁻¹; (c) ano. 19. (a) $3p_0V_0$; (b) $6RT_0$, $(3/2)R \ln 2$; (c) obě změny jsou nulové. 21. 31 %; 16 kJ. 23. (a) $23,6$ %; (b) $1,49 \cdot 10^4$ J. 25. $-7,2$ °C; $67,8$ °C. 27. (a) $1,47 \cdot 10^3$ J; (b) $-5,54 \cdot 10^2$ J; (c) $9,18 \cdot 10^2$ J; (d) $62,4$ %. 29. (a) 2270 J; (b) 14800 J; (c) $15,4$ %; (d) $75,0$ %, je větší. 31. (a) 78 %; (b) 81 kg·s⁻¹. 33. (a) $p_2 = 3p_1$, $V_2 = nRT_1/p_1$; $p_4 = p_1/4^{\gamma}$, $T_4 = T_1/4^{(\gamma-1)}$; $p_3 = 3p_1/4^{\gamma}$, $T_3 = 3T_1/4^{(\gamma-1)}$; (b) $1 - 1/4^{(\gamma-1)}$. 35. (a) 21 J. 37. 440 W. 39. 186 W. 41. $\{1 - (T_2/T_1)\}/\{1 - (T_4/T_3)\}$. 45. (a) $W = N!/(n_1!n_2!n_3!)$; (b) $\{(N/2)!(N/2)!/\{(N/3)!(N/3)!(N/3)!\}$; (c) $4,2 \cdot 10^{16}$.

Kapitola 22

KONTROLY 1. C a D se přitahují; B a D se přitahují. 2. (a) Doleva; (b) doleva; (c) doleva. 3. (a) (1), (3), (2); (b) menší. 4. $-15e$ (celkový náboj $-30e$ se rovnoměrně rozdělí na obě koule).

OTÁZKY 1. Ne, platí pouze pro bodové náboje, tělesa, která lze za bodové náboje považovat (např. ve velkých vzdálenostech) a pro rovnoměrně nabitě kulové vrstvy (včetně plných koulí). 3. (a) a (b). 5. Dvě možnosti: jedna vlevo od částic, druhá mezi protony. 7. $6Q^2/(4\pi\epsilon_0d^2)$, doleva. 9. (a) Stejně; (b) menší; (c) vyruší se; (d) nevyruší se; (e) kladný směr osy y ; (f) záporný směr osy y ; (g) kladný směr osy x ; (h) záporný směr osy x . 11. (a) A , B a D ; (b) všechny čtyři; (c) spojit A a D ; rozpojit je; pak spojit jednu z nich s B . (Existují ještě dvě další řešení.) 13. (a) Může být, ale nemusí; (b) musí být. 15. Stejná. 17. D .

CVIČENÍ A ÚLOHY 1. $0,50$ C. 3. $2,81$ N na každý

náboj. 5. (a) $4,9 \cdot 10^{-7}$ kg; (b) $7,1 \cdot 10^{-11}$ C. 7. $3F/8$. 9. (a) $1,60$ N; (b) $2,77$ N. 11. (a) $Q_1 = 9Q_2$; (b) $Q_1 = -25Q_2$. 13. Buď $-1,00$ μ C a $+3,00$ μ C, nebo $+1,00$ μ C a $-3,00$ μ C. 15. (a) 36 N, -10° od osy x ; (b) $x = -8,3$ cm, $y = +2,7$ cm. 17. (a) $5,7 \cdot 10^{13}$ C, ne; (b) $6,0 \cdot 10^5$ kg. 19. (a) $Q_1 = -2\sqrt{2}Q_2$; (b) ne. 21. $3,1$ cm. 23. $2,89 \cdot 10^{-9}$ N. 25. $-1,32 \cdot 10^{13}$ C. 27. (a) $3,2 \cdot 10^{-19}$ C; (b) dvojmocné. 29. (a) $8,99 \cdot 10^{-19}$ N; (b) 625 . 31. $5,1$ m pod elektronem. 33. $1,3$ d. 35. (a) 0 ; (b) $1,9 \cdot 10^{-9}$ N. 37. 10^{18} N. 39. (a) ^9B ; (b) ^{13}N ; (c) ^{12}C . 41. (a) $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2} \alpha(1 - \alpha)$; (c) $0,5$; (d) $0,15$ a $0,85$.

Kapitola 23

KONTROLY 1. (a) Doprava; (b) doleva; (c) doleva; (d) doprava (p a e mají náboj o stejné velikosti, p je vzdálenější). 2. Všechny stejné. 3. (a) V kladném směru osy y ; (b) v kladném směru osy x ; (c) v záporném směru osy y . 4. (a) Vlevo; (b) vlevo; (c) klesat. 5. (a) Všechny stejné; (b) stejné (1) a (3), potom stejné (2) a (4).

OTÁZKY 1. (a) V kladném směru osy x ; (b) dolů a doprava; (c) v bodě A . 3. Jsou dva takové body: jeden vlevo od částic, druhý mezi protony. 5. (a) Ano; (b) směrem k náboji; (c) ne (vektory intenzity nemají stejný směr); (d) vyruší se; (e) zesílí se; (f) v záporném směru osy y . 7. (a) (3), pak (1) a (2) stejné (nula); (b) všechny stejné; (c) stejné (1) a (2), pak (3). 9. (a) Doprava; (b) velikost rychlosti protonu p^+ a mionu μ^- stoupá, pionu π^+ klesá, neutronu n se nemění. 11. (a), (b), (c). 13. (a) (4), (3), (1), (2); (b) (3), pak (1) a (4) stejný, pak (2).

CVIČENÍ A ÚLOHY 1. (a) $6,4 \cdot 10^{-18}$ N; (b) 20 N·C⁻¹. 3. Na obrázku doprava. 7. 56 pC. 9. $3,07 \cdot 10^{21}$ N·C⁻¹, radiálně směrem od jádra. 13. (a) $Q/(8\pi\epsilon_0d^2)$, doleva; $3Q/(\pi\epsilon_0d^2)$, doprava; $7Q/16(\pi\epsilon_0d^2)$, doleva. 15. 0 . 17. 9 h 30 min. 19. $E = (Q/\pi\epsilon_0a^2)$, podél osy souměrnosti směrem od trojúhelníku. 21. $7,4Q/(4\pi\epsilon_0d^2)$, leží v prvním kvadrantu a svírá s osou x úhel 28° . 23. $6,88 \cdot 10^{-28}$ C·m. 25. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(p/r^3)$, antiparalelně s p . 29. $R/\sqrt{2}$. 31. $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}(4Q/\pi R^2)$, ve směru rostoucího y . 37. (a) $0,10$ μ C; (b) $1,3 \cdot 10^{17}$; (c) $5,0 \cdot 10^{-6}$. 39. $3,51 \cdot 10^{15}$ m·s⁻². 41. $6,6 \cdot 10^{-15}$ N. 43. $2,03 \cdot 10^{-7}$ N·C⁻¹, svisle vzhůru. 45. (a) $-0,029$ C; (b) koule by se vlivem odpuzivých sil roztrhla. 47. (a) $1,92 \cdot 10^{12}$ m·s⁻²; (b) $1,96 \cdot 10^5$ m·s⁻¹. 49. (a) $9,04 \cdot 10^{-16}$ kg; (b) 120 . 51. $1,64 \cdot 10^{-19}$ C (asi o 3 % vyšší). 53. (a) $0,245$ N, ve směru osy $+x$, ve čtvrtém kvadrantu, svírá s osou x úhel $11,3^\circ$; (b) $x = 108$ m, $y = -21,6$ m. 55. 27 μ m. 57. (a) Ano; (b) na horní desku, $2,73$ cm. 59. (a) 0 ; (b) $8,5 \cdot 10^{-22}$ N·m; (c) 0 . 61. $(1/2\pi)\sqrt{pE/I}$. 63. (a) $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2Qd^{-2}\alpha(1 + \alpha^2)^{-3/2}$; (c) $\alpha = 0,707$; (d) $\alpha = 0,21$ a $\alpha = 1,9$.

Kapitola 24

- KONTROLY** 1. (a) $+ES$; (b) $-ES$; (c) 0; (d) 0.
 2. (a) (2); (b) (3); (c) (1). 3. (a) Stejný; (b) stejný;
 (c) stejný. 4. (a) $+50Q$; (b) $-150Q$. 5. 3 a 4 stejně,
 potom 2, 1.
OTÁZKY 1. (a) $8\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$; (b) 0. 3. (a) Všechny
 stejné (nula); (b) všechny stejné. 5. $+13Q/\epsilon_0$.
 7. Všechny stejné. 9. Všechny stejné. 11. 2σ , σ ,
 3σ nebo 3σ , σ , 2σ . 13. (a) Všechny stejné ($E = 0$);
 (b) všechny stejné. 15. (a) Stejně ($E = 0$); (b) klesá;
 (c) klesá (k nule); (d) stejné.
CVIČENÍ A ÚLOHY 1. (a) $693\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$; (b) $693\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$;
 (c) $347\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$; (d) $347\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$; (e) $575\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.
 3. (a) 0; (b) $-3,92\text{ N}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{C}^{-1}$; (c) 0; (d) 0 pro každé
 pole. 5. (a) Obklopuje $2Q$ a $-2Q$ nebo všechny
 čtyři náboje; (b) obklopuje $2Q$ a Q ; (c) není možné.
 7. $2,0\cdot 10^{-5}\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$. 9. $Q/(6\epsilon_0)$. 11. (a) $-\pi R^2 E$;
 (b) $\pi R^2 E$. 13. $-4,2\cdot 10^{10}\text{ C}$. 15. 0 pro každou
 ze tří stěn, které se dotýkají Q , $Q/(24\epsilon_0)$ pro ostatní
 stěny. 17. $2,0\mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$. 19. (a) $4,5\cdot 10^{-7}\text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$;
 (b) $5,1\cdot 10^{-4}\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. 21. (a) $-3,0\cdot 10^{-6}\text{ C}$; (b) $+1,3\cdot 10^{-5}\text{ C}$.
 23. (a) $0,32\mu\text{C}$; (b) $0,14\mu\text{C}$. 27. (a) $E = Q/(2\pi\epsilon_0 Lr)$,
 směřuje radiálně dovnitř; (b) $-Q$ na vnitřní i vnější
 stěně; (c) $E = Q/(2\pi\epsilon_0 Lr)$, směřuje radiálně ven.
 29. $3,6\text{ nC}$. 31. (b) $Q/(2\epsilon_0 r)$. 33. (a) $5,3\cdot 10^7\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$;
 (b) $60\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$. 35. $5,0\text{ nC}\cdot\text{m}^{-2}$. 37. $0,44\text{ mm}$.
 39. (a) $4,9\cdot 10^{-22}\text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$; (b) dolů. 41. (a) Qx/ϵ_0 ;
 (b) $Qd/(2\epsilon_0)$, nezávislá na x . 43. (a) $-750\text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$;
 (b) $-6,64\text{ nC}$. 45. (a) $4,0\cdot 10^6\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$; (b) 0. 47. (a) 0;
 (b) $Q_a/(4\pi\epsilon_0 r^2)$; (c) $(Q_a + Q_b)/(4\pi\epsilon_0 r^2)$; (d) vnitřní stěna
 vnější koule: 0, vnější stěna vnitřní koule: Q_a , vnitřní stěna
 vnější koule: $-Q_a$, vnější stěna vnější koule: $Q_a + Q_b$.
 51. (a) $-Q$; (b) $+Q$; (c) $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ radiálně směrem
 ven; (d) $E = 0$; (e) $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ radiálně směrem
 ven; (f) 0; (g) $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$, radiálně směrem ven;
 (h) ano, náboj se indukuje; (i) ne; (j) ano; (k) ne; (l) ne.
 53. (a) $E = Qr/(4\pi\epsilon_0 a^3)$; (b) $E = Q/(4\pi\epsilon_0 r^2)$; (c) 0;
 (d) 0; (e) na vnitřní $-Q$, na vnější 0. 55. $Q/(2\pi a^2)$.
 59. $\alpha = 0,80$.

Kapitola 25

- KONTROLY** 1. (a) Zápornou; (b) roste. 2. (a) Kladnou;
 (b) vyšší. 3. (a) Doprava; (b) (1), (2), (3), (5); kladná;
 (4), záporná; (c) (3), pak (1), (2) a (5) stejně, pak (4).
 4. Všechny stejně. 5. A, C (nula), B. 6. (a) (2), pak (1)
 a (3) stejně; (b) (3); (c) bude se zrychlovat směrem doleva.
 7. Blíž (polovina z $9,23\text{ fm}$).
OTÁZKY 1. (a) S vyšším; (b) kladná; (c) záporná;
 (d) všechny stejně. 3. (a) (1) a (2); (b) pro žádnou; (c) ne;
 (d) (1) a (2) ano, (3) a (4) ne. 5. (b), pak (a), (c) a (d)
 stejná. 7. (a) Záporná; (b) nulová. 9. (a) (1), pak
 (2) a (3) stejně; (b) 3. 11. Vlevo. 13. (a), (b), (c).
 15. (a) (3), (2), (1); (b) nula. 17. (a) Kladná; (b) kladná;
 (c) záporná; (d) všechny stejně. 19. (a) Ne; (b) ano.

21. Ne (body na průsečnici by měly dvě rozdílné hodnoty
 potenciálu). 23. (a)–(b) všechny stejně; (c) (C), (B), (A);
 (d) všechny stejně.

- CVIČENÍ A ÚLOHY** 1. $1,2\text{ GeV}$. 3. (a) Klesne
 o $3,0\cdot 10^{10}\text{ J}$; (b) $7,7\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$; (c) $9,0\cdot 10^4\text{ kg}$. 5. $2,90\text{ kV}$.
 9. $8,8\text{ mm}$. 11. (a) $136\text{ MV}\cdot\text{m}^{-1}$; (b) $8,82\text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$.
 13. (b) Protože jsme bod s $\varphi = 0$ zvolili jinde;
 (c) $Q/(8\pi\epsilon_0 R)$; (d) rozdíly potenciálů jsou nezávislé
 na volbě bodu $\varphi = 0$. 15. (a) -4500 V ;
 (b) -4500 V . 17. 843 V . 19. $2,8\cdot 10^5$. 21. $x = d/4$
 a $x = -d/2$. 23. Žádný. 25. (a) $3,3\text{ nC}$;
 (b) $12\text{ nC}\cdot\text{m}^{-2}$. 27. $6,4\cdot 10^8\text{ V}$. 29. 190 MV .
 31. (a) $-4,8\text{ nm}$; (b) $8,1\text{ nm}$; (c) ne. 33. $16,3\mu\text{V}$.
 35. (a) $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln(L/2 + \sqrt{L^2/4 + d^2})/d$; (b) 0.
 37. (a) $-\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0 R}$; (b) $-\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0} (z^2 + R^2)^{-1/2}$. 39. $0,113\sigma R/\epsilon_0$.
 41. $Q/(4\pi\epsilon_0 L) \cdot \ln(1 + L/d)$. 43. $670\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$.
 45. $p/(2\pi\epsilon_0 r^3)$. 47. $39\text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$, ve směru $-x$.
 49. (b) $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Qz(z^2 + R^2)^{-3/2}$. 51. (a) $c(\sqrt{L^2 + y^2} -$
 $-y)/(4\pi\epsilon_0)$; (b) $E = c/(4\pi\epsilon_0)(1 - y/\sqrt{L^2 + y^2})$;
 (c) pro výpočet $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ neznáme $\varphi(P'_2)$ v bodech P'_2 mimo
 osu y poblíž P_2 . 53. (a) $2,5\text{ MV}$; (b) $5,1\text{ J}$; (c) $6,9\text{ J}$.
 55. $-1,9\text{ J}$. 57. (a) $0,484\text{ MeV}$; (b) 0. 59. $2,1\text{ d}$.
 61. 0. 63. (a) $27,2\text{ V}$; (b) $-27,2\text{ eV}$; (c) $13,6\text{ eV}$;
 (d) $13,6\text{ eV}$. 65. $1,8\cdot 10^{-10}\text{ J}$. 67. $1,48\cdot 10^7\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.
 69. $Q_0 Q/(4\pi\epsilon_0 E_k)$. 71. $0,32\text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. 73. $1,6\cdot 10^{-9}\text{ m}$.
 77. (a) $\varphi_1 = \varphi_2$; (b) $Q_1 = Q/3$, $Q_2 = 2Q/3$; (c) 2.
 79. (a) $-0,12\text{ V}$; (b) $1,8\cdot 10^{-8}\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$, radiálně směrem
 dovnitř. 81. (a) $12000\text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$; (b) 1800 V ; (c) $5,8\text{ cm}$.
 83. (c) $4,24\text{ V}$.

Kapitola 26

- KONTROLY** 1. (a) Nezmění se; (b) nezmění se.
 2. (a) Klesá; (b) roste; (c) klesá. 3. (a) U , $Q/2$;
 (b) $U/2$, Q . 4. (a) $Q_0 = Q_1 + Q_3$; (b) stejný (C_3 a C_4
 jsou v sérii). 5. (a) Stejná; (b)–(d) roste; (e) stejná (při
 stejné vzdálenosti desek je stejný také rozdíl potenciálů).
 6. (a) Stejná; (b) klesá; (c) roste.
OTÁZKY 1. a, 2; b, 1; c, 3. 3. (a) Vzroste;
 (b) nezmění se. 5. (a) Paralelním; (b) sériově.
 7. (a) $C/3$; (b) $3C$; (c) paralelním. 9. (a) Stejně;
 (b) menší. 11. (a)–(d) menší. 13. (a) (2); (b) (3);
 (c) (1). 15. Zvětšit vzdálenost desek d , ale také jejich
 plochu S tak, aby poměr S/d zůstal konstantní.
CVIČENÍ A ÚLOHY 1. $7,5\text{ pC}$. 3. $3,0\text{ mC}$.
 5. (a) 140 pF ; (b) 17 nC . 7. (a) $84,5\text{ pF}$; (b) 191 cm^2 .
 9. (a) 11 cm^2 ; (b) 11 pF ; (c) $1,2\text{ V}$. 13. (b) $4,6\cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$.
 15. $7,33\mu\text{F}$. 17. 315 mC . 19. (a) $10,0\mu\text{F}$;
 (b) $Q_2 = 0,800\text{ mC}$, $Q_1 = 1,20\text{ mC}$; (c) 200 V pro
 oba. 21. (a) $d/3$; (b) $3d$. 25. (a) Pět v sérii; (b) tři
 skupiny jako v (a) a zapojit je paralelně (jsou i jiné
 možnosti). 27. 43 pF . 29. (a) 50 V ; (b) $5,0\cdot 10^{-5}\text{ C}$;
 (c) $1,5\cdot 10^{-4}\text{ C}$. 31. (a) $Q_1 = 9,0\mu\text{C}$, $Q_2 = 16\mu\text{C}$,
 $Q_3 = 9,0\mu\text{C}$, $Q_4 = 16\mu\text{C}$; (b) $Q_1 = 8,4\mu\text{C}$,

$Q_2 = 17 \mu\text{C}$, $Q_3 = 11 \mu\text{C}$, $Q_4 = 14 \mu\text{C}$. **33.** 99,6 nJ.
35. 72 F. **37.** O 4,9%. **39.** 0,27 J. **41.** $0,11 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$.
43. (a) 2,0 J. **45.** (a) $Q_1 = 0,21 \text{ mC}$, $Q_2 = 0,11 \text{ mC}$,
 $Q_3 = 0,32 \text{ mC}$; (b) $U_1 = U_2 = 21 \text{ V}$, $U_3 = 79 \text{ V}$;
(c) $E_{p,1} = 2,2 \text{ mJ}$, $E_{p,2} = 1,1 \text{ mJ}$, $E_{p,3} = 13 \text{ mJ}$.
47. (a) $Q_1 = Q_2 = 0,33 \text{ mC}$, $Q_3 = 0,40 \text{ mC}$;
(b) $U_1 = 33 \text{ V}$, $U_2 = 67 \text{ V}$, $U_3 = 100 \text{ V}$; (c) $E_{p,1} = 5,6 \text{ mJ}$,
 $E_{p,2} = 11 \text{ mJ}$, $E_{p,3} = 20 \text{ mJ}$. **53.** Pyrex. **55.** (a) 6,2 cm;
(b) 280 pF. **57.** 0,63 m². **59.** (a) 2,85 m³; (b) $1,01\cdot 10^4$.
61. (a) $\varepsilon_0 S/(d-b)$; (b) $d/(d-b)$; (c) $-q^2 b/(2\varepsilon_0 S)$, vtahovány
dovnitř. **65.** $\frac{\varepsilon_0 S}{4d} \left(\varepsilon_{r,1} + \frac{2\varepsilon_{r,2}\varepsilon_{r,3}}{\varepsilon_{r,2} + \varepsilon_{r,3}} \right)$. **67.** (a) 13,4 pF;
(b) 1,15 nC; (c) $1,13\cdot 10^4 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$; (d) $4,33\cdot 10^3 \text{ N}\cdot\text{C}^{-1}$.
69. (a) 7,1; (b) $0,77 \mu\text{C}$. **71.** (a) 0,606; (b) 0,394.

Kapitola 27

KONTROLY **1.** 8 A, doprava. **2.** (a)–(c) doprava.
3. (a), (c) stejný proud; (b) menší. **4.** Součástka 2.
5. (a) a (b) stejné, dále (d), pak (c).
OTÁZKY **1.** a, b, c stejný, potom d nulový. **3.** (b), (a),
(c). **5.** A, B, C stejný, potom A + B, B + C stejný, potom
A + B + C. **7.** (a)–(c) 1 a 2 stejné, potom 3. **9.** C, A,
B. **11.** (b), (a), (c). **13.** (a) Vodiče 1, 4, polovodiče 2, 3;
(b) 2 a 3; (c) všechny čtyři.
CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** $1,25\cdot 10^{15}$. **3.** $6,7 \mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$.
5. Typ CW14. **7.** (a) $2,4\cdot 10^{-5} \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$;
(b) $1,8\cdot 10^{-15} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. **9.** 0,67 A, směrem k záporné
elektrodě. **11.** (a) $0,654 \mu\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$; (b) 83,4 mA.
13. 13,5 min. **15.** (a) $J_0 S/3$; (b) $2J_0 S/3$.
17. $2,0\cdot 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$. **19.** 100 V. **21.** (a) 1,53 kA;
(b) $54,1 \text{ MA}\cdot\text{m}^{-2}$; (c) $10,6\cdot 10^{-8} \Omega\cdot\text{m}$, platina.
23. (a) 253 °C; (b) ano. **25.** (a) 0,38 mV; (b) nižší;
(c) 3 min 58 s. **27.** 54 Ω. **29.** 3,0. **31.** (a) 1,3 mΩ;
(b) 4,6 mm. **33.** (a) 6,0 mA; (b) $1,59\cdot 10^{-8} \text{ V}$; (c) 21,2 nΩ.
35. 2 000 K. **37.** (a) Měď $5,32\cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$, hliník
 $3,27\cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$; (b) měď $1,01 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$, hliník $0,495 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$.
39. 0,40 Ω. **41.** (a) $R = \rho L/(\pi ab)$. **43.** 14 kC.
45. 11,1 Ω. **47.** (a) 3,8 kW; (b) 33 Kč. **49.** 0,135 W.
51. (a) 1,69 A; (b) $2,15 \text{ MA}\cdot\text{m}^{-2}$; (c) $36,3 \text{ mV}\cdot\text{m}^{-1}$;
(d) 2,09 W. **53.** (a) $1,3\cdot 10^5 \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$; (b) 94 mV.
55. (a) 126 Kč (30 dnů); (b) 529 Ω; (c) 0,435 A.
57. 660 W. **59.** (a) $3,1\cdot 10^{11}$; (b) $25 \mu\text{A}$; (c) 1 300 W;
25 MW. **61.** $27 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. **63.** (a) 120 Ω; (b) 107 Ω;
(c) $5,3\cdot 10^{-3} / \text{C}^\circ$; (d) $5,9\cdot 10^{-3} / \text{C}^\circ$; (e) 276 Ω.

Kapitola 28

KONTROLY **1.** (a) Doprava; (b) všude stejný;
(c) bod B, potom stejný v bodech a, c; (d) bod B, potom
stejný v bodech a, c. **2.** (a) Stejný; (b) R_1 , R_2 , R_3 .
3. (a) Menší; (b) větší; (c) stejné. **4.** (a) $U/2$, I ; (b) U ,
 $I/2$. **5.** (a) 1, 2, 4, 3; (b) 4, potom stejný 1 a 2, potom 3.
OTÁZKY **1.** (3), (4), (1), (2). **3.** (a) Ne; (b) ano;
(c) stejné (protože všechny obvody jsou stejné).
5. Paralelně, R_2 , R_1 , sériově. **7.** (a) Stejný; (b) větší.
9. (a) Zmenší; (b) zmenší; (c) zvětší. **11.** C_1 , 15 V;

C_2 , 35 V; C_3 , 20 V; C_4 , 20 V; C_5 , 30 V. **13.** $60 \mu\text{C}$.
15. c, b, a. **17.** (a) Stejný; (b) (1), (3), (2). **19.** (1), (3)
a (4) stejné (8 V na každém rezistoru), potom (2), (5) (4 V na
každém rezistoru).

CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** (a) 4 800 Kč; (b) 1,40 Kč.
3. 11 kJ. **5.** (a) Proti směru otáčení hodinových ručiček;
(b) baterie 1; (c) B. **7.** (a) 80 J; (b) 67 J; (c) 13 J se
přemění v teplo uvnitř baterie. **9.** (a) 14 V; (b) 100 W;
(c) 600 W; (d) 10 V, 100 W. **11.** (a) 50 V; (b) 48 V;
(c) B je připojen k zápornému pólu. **13.** 2,5 V.
15. (a) 6,9 km; (b) 20 Ω. **17.** 8,0 Ω. **19.** 10^{-6} .
21. Kabel. **23.** (a) 1 000 Ω; (b) 300 mV; (c) $2,3\cdot 10^{-3}$.
25. (a) 3,41 A nebo 0,586 A; (b) 0,293 V nebo 1,71 V.
27. 5,56 A. **29.** 4,0 Ω a 12 Ω. **31.** 4,50 Ω.
33. 0,00 A, 2,00 A, 2,40 A, 2,86 A, 3,00 A, 3,60 A,
3,75 A, 3,94 A. **35.** $U = \varphi_d - \varphi_c = +0,25 \text{ V}$.
37. Sedm. **39.** (a) 2,50 Ω; (b) 3,13 Ω. **41.** Devět,
např. sériově zapojit tři paralelní trojice anebo paralelně
zapojit tři sériové trojice. **43.** (a) Levá větev: 0,67 A
dolů, prostřední větev: 0,33 A nahoru, pravá větev: 0,33 A
nahoru; (b) 3,3 V. **47.** (a) 120 Ω; (b) $I_1 = 51 \text{ mA}$,
 $I_2 = I_3 = 19 \text{ mA}$, $I_4 = 13 \text{ mA}$. **49.** (a) 19,5 Ω;
(b) 0; (c) ∞; (d) 82,3 W, 57,6 W. **51.** (a) Měď 1,11 A,
hliník 0,893 A; (b) 126 m. **53.** (a) 13,5 kΩ; (b) 1 500 Ω;
(c) 167 Ω; (d) 1 480 Ω. **55.** (a) 0,45 A. **57.** -0,9%.
59. (a) 12,5 V; (b) 50 A. **65.** (a) $0,41\tau_C$; (b) $1,1\tau_C$.
67. $4,6\tau_C$. **69.** (a) $0,955 \mu\text{C}\cdot\text{s}^{-1}$; (b) $1,08 \mu\text{W}$;
(c) $2,74 \mu\text{W}$; (d) $3,82 \mu\text{W}$. **71.** 2,35 MΩ. **73.** 0,72 MΩ.
75. 24,8 Ω až 14,9 kΩ. **77.** (a) Pro $t = 0$ je $I_1 = 1,1 \text{ mA}$,
 $I_2 = I_3 = 0,55 \text{ mA}$, pro $t \rightarrow \infty$ je $I_1 = I_2 = 0,82 \text{ mA}$,
 $I_3 = 0$; (c) pro $t = 0$ je $U_2 = 400 \text{ V}$, pro $t \rightarrow \infty$ je
 $U_2 = 600 \text{ V}$; (d) t je větší než několik časových konstant
obvodu ($\tau_C = 7,1 \text{ s}$). **79.** (a) $U_s = -IR + \mathcal{E}$;
(b) 13,6 V; (c) 0,060 Ω. **81.** (a) 6,4 V; (b) 3,6 W;
(c) 17 W; (d) -5,6 W; (e) bod a.

Kapitola 29

KONTROLY **1.** (a): +z; (b): -x; (c): $F_B = 0$.
2. (a) (2), poté stejně (1) a (3) (nula); (b) (4). **3.** (a) +z
a -z stejně, poté +y a -y stejně a pak +x a -x stejně
(nula); (b) +y. **4.** (a) Elektron; (b) po směru hodinových
ručiček. **5.** -y. **6.** (a) Všechny stejně; (b) nejdřív (1)
a (4) stejně, pak (2) a (3) stejně.
OTÁZKY **1.** (a) Všechny stejně; (b) (1) a (2) (náboj je
záporný). **3.** (a): Ne, \mathbf{v} a \mathbf{F}_B musí být kolmé; (b): ano; (c):
ne, \mathbf{B} a \mathbf{F}_B musí být kolmé. **5.** (a) F_E ; (b) F_B . **7.** (a) Na
pravém křídle; (b) k pravé. **9.** (a) Záporný; (b) rovná v_0 ;
(c) rovná T_0 ; (d) půlkružnice. **11.** (a) \mathbf{B}_1 ; (b) \mathbf{B}_1 : od nás;
 \mathbf{B}_2 : k nám; (c) menší. **13.** Všechny. **15.** Všechny stejně.
17. (a) Kladná; (b) (α) a (β) stejně, pak (γ) (nulová).
CVIČENÍ A ÚLOHY **1.** $\text{kg}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$. **3.** (a) $9,56\cdot 10^{-14} \text{ N}$,
0; (b) $0,267^\circ$. **5.** (a) Na východ; (b) $6,28\cdot 10^{14} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$;
(c) 2,98 mm. **7.** 0,75 kT. **9.** (a) $3,4\cdot 10^{-4} \text{ T}$,
horizontálně a doleva vzhledem k \mathbf{v}_0 ; (b) ano,

pokud je rychlost stejná jako rychlost elektronu.

11. $(-11,4\mathbf{i} - 6,00\mathbf{j} + 4,80\mathbf{k}) \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$. 13. $680 \text{ kV}\cdot\text{m}^{-1}$.
 17. (b) $2,84\cdot 10^{-3}$. 19. (a) $1,11\cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$;
 (b) $0,316 \text{ mm}$. 21. (a) $0,34 \text{ mm}$; (b) $2,6 \text{ keV}$.
 23. (a) $2,05\cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; (b) $467 \mu\text{T}$; (c) $13,1 \text{ MHz}$;
 (d) $76,3 \text{ ns}$. 25. (a) $2,60\cdot 10^6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; (b) $0,109 \mu\text{s}$;
 (c) $0,140 \text{ MeV}$; (d) 70 kV . 29. (a) $1,0 \text{ MeV}$;
 (b) $0,5 \text{ MeV}$. 31. $R_d = \sqrt{2}R_p$; $R_\alpha = R_p$.
 33. (a) $B\sqrt{mQ/2U}\Delta x$; (b) $8,2 \text{ mm}$. 37. (a) $-Q$;
 (b) $\pi m/(QB)$. 39. $B_{\min} = \sqrt{mU/(2ed^2)}$. 41. (a) 22 cm ;
 (b) 21 MHz . 43. Neutron se pohybuje po dráze tečné
 k té původní, proton opisuje kružnici o poloměru
 25 cm . 45. $28,2 \text{ N}$, horizontálně směrem na západ.
 47. $20,1 \text{ N}$. 49. $Bltd/m$, směrem od generátoru.
 51. $-0,35 \text{ kN}$. 53. $0,10 \text{ T}$ pod úhlem 31° od vertikály.
 55. $4,3\cdot 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}$, y je záporné. 59. $QvrB/2$.
 61. (a) 540Ω , sériově; (b) $2,52 \Omega$, paralelně.
 63. (a) $12,7 \text{ A}$; (b) $0,0805 \text{ N}\cdot\text{m}$. 65. (a) $0,184 \text{ A}\cdot\text{m}^2$;
 (b) $1,45 \text{ N}\cdot\text{m}$. 67. (a) 20 min ; (b) $5,9\cdot 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$.
 69. (a) $(8,0\cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m})(-1,2\mathbf{i} - 0,90\mathbf{j} + 1,0\mathbf{k})$;
 (b) $-6,0\cdot 10^{-4} \text{ J}$.

Kapitola 30

KONTROLY 1. (a), (c), (b). 2. (b), (c), (a). 3. d ,
 pak a a c stejně, pak b (nula). 4. (d), (a), pak (b) a (c)
 stejně (nula).

OTÁZKY 1. (c), (d), pak (a) a (b) stejně. 3. Ve 2.
 a 4. 5. (a), (b), (c). 7. (b), (d), (c), (a) (nula).
 9. (a) (1): $+x$; (2): $-y$; (b) (1): $+y$; (2): $+x$. 11. Vypne
 se do oblouku. 13. c a d stejně, pak b , a . 15. (d),
 poté stejně (a) a (e), pak (b), (c). 17. 0 (skalární součin
 je nula).

CVIČENÍ A ÚLOHY 1. $32,1 \text{ A}$. 3. (a) $3,3 \mu\text{T}$;
 (b) ano. 5. (a) $(0,24\mathbf{i}) \text{ nT}$; (b) 0; (c) $(-43\mathbf{k}) \text{ pT}$;
 (d) $(0,14\mathbf{k}) \text{ nT}$. 7. (a) 16 A ; (b) od západu k východu.
 9. 0. 11. (a) 0; (b) $\mu_0 I/(4R)$, od nás; (c) stejně
 jako v (b). 13. $\mu_0 I\theta(1/b - 1/a)/4\pi$, k nám.
 15. (a) $1,0 \text{ mT}$, k nám; (b) $0,80 \text{ mT}$, k nám. 25. $200 \mu\text{T}$,
 od nás. 27. (a) Přesně mezi nimi musí být $B = 0$;
 (b) 30 A . 29. $4,3 \text{ A}$, k nám. 35. $0,338\mu_0 I^2/a$,
 směrem do středu čtverce. 37. (b) Doprava.
 39. (b) $2,3 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. 41. $+5\mu_0 I$. 47. (a) $\mu_0 Ir/(2\pi c^2)$;
 (b) $\mu_0 I/(2\pi r)$; (c) $\frac{\mu_0 I(a^2-r^2)}{2\pi r(a^2-b^2)}$; (d) 0. 49. $3I/8$,
 od nás. 53. $0,30 \text{ mT}$. 55. 108 m . 61. $0,272 \text{ A}$.
 63. (a) 4; (b) $1/2$. 65. (a) $2,4 \text{ A}\cdot\text{m}^2$; (b) 46 cm .
 67. (a) $\mu_0 I(1/a + 1/b)/4$, od nás; (b) $\frac{1}{2}(\pi a^2 + \pi b^2)I$, od nás.
 69. (a) $79 \mu\text{T}$; (b) $1,1\cdot 10^{-6} \text{ N}\cdot\text{m}$. 71. (b) $(0,060\mathbf{j}) \text{ A}\cdot\text{m}^2$;
 (c) $(9,6\cdot 10^{-11}\mathbf{j}) \text{ T}$, $(-4,8\cdot 10^{-11}\mathbf{j}) \text{ T}$. 73. (a) B ze součtu:
 $7,069\cdot 10^{-5} \text{ T}$; $\mu_0 In = 5,027\cdot 10^{-5} \text{ T}$; rozdíl je 40% ; (b) B
 ze součtu: $1,043\cdot 10^{-4} \text{ T}$; $\mu_0 In = 1,005\cdot 10^{-4} \text{ T}$; rozdíl je
 4% ; (c) B ze součtu: $2,506\cdot 10^{-4} \text{ T}$; $\mu_0 In = 2,513\cdot 10^{-4} \text{ T}$;
 rozdíl $0,3\%$. 75. (a) $\mathbf{B} = (\mu_0/2\pi)[I_1/(x-a) + I_2/x]\mathbf{j}$;
 (b) $\mathbf{B} = (\mu_0/2\pi)(I_1/a)(1 + b/2)\mathbf{j}$.

Kapitola 31

KONTROLY 1. b , pak d a e stejně, pak a a c stejně
 (nulové). 2. (a) a (b) stejný, pak (c) (nulový). 3. c a d
 stejné, pak a a b stejné. 4. b : Od nás; c : od nás; d : k nám;
 e : k nám. 5. (d) a (e). 6. (a) (2), (3), (1) (nulový);
 (b) (2), (3), (1). 7. a a b stejná, pak c .

OTÁZKY 1. (a) Všechny stejně (nulové); (b) všechny
 stejné (různé od nuly); (c) (3), pak (1) a (2) stejně (nulové).
 3. K nám. 5. (a) Od nás; (b) proti směru otáčení
 hodinových ručiček; (c) větší. 7. (a) Doleva; (b) doprava.
 9. c , a , b . 11. (a) 1, 3, 2; (b) 1 a 3 stejný, pak 2.
 13. (a), pak (b) a (c) stejně. 15. (a) Větší; (b) stejný;
 (c) stejný; (d) stejný (nulový). 17. a , 2; b , 4; c , 1; d , 3.

CVIČENÍ A ÚLOHY 1. $57 \mu\text{Wb}$. 3. $1,5 \text{ mV}$.
 5. (a) $0,40 \text{ V}$; (b) 20 A . 7. (a) 31 mV ; (b) zprava doleva.
 9. (b) 58 mA . 11. $1,2 \text{ mV}$. 13. $1,15 \mu\text{Wb}$. 15. 51 mV ,
 po směru otáčení hodinových ručiček, díváme-li se
 ve směru \mathbf{B} . 17. (a) $1,26\cdot 10^{-4} \text{ T}$, 0, $-1,26\cdot 10^{-4} \text{ T}$;
 (b) $5,04\cdot 10^{-8} \text{ V}$. 19. (b) Ne. 21. $15,5 \mu\text{C}$.
 23. (a) $24 \mu\text{V}$; (b) od c do b . 25. (b) Uspořádání
 musí být takové, aby platilo $Nab = (5/2\pi)$ (v m^2).
 27. (a) $0,598 \mu\text{V}$; (b) proti směru hodinových
 ručiček. 29. (a) $\mu_0 Ia(2r + b)/[2\pi(2r - b)]$;
 (b) $2\mu_0 Iabv/[\pi R(4r^2 - b^2)]$. 31. $S^2 B^2/(R\Delta t)$.
 33. (a) $48,1 \text{ mV}$; (b) $2,67 \text{ mA}$; (c) $0,128 \text{ mW}$.
 35. $v_m = mgR/(B^2 L^2)$. 37. 268 W . 39. (a) $240 \mu\text{V}$;
 (b) $0,600 \text{ mA}$; (c) $0,144 \mu\text{W}$; (d) $2,88\cdot 10^{-8} \text{ N}$; (e) stejně jako
 v (c). 41. (1): $-1,07 \text{ mV}$; (2): $-2,40 \text{ mV}$; (3): $1,33 \text{ mV}$.
 43. a : $4,4\cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, doprava; b : 0; c : $4,4\cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
 doleva. 45. $0,10 \mu\text{Wb}$. 47. (a) 800; (b) $2,5\cdot 10^{-6} \text{ H}$.
 49. (a) $\mu_0 I/d$; (b) $\pi\mu_0 R^2/d$. 51. (a) Klesá; (b) $0,68 \text{ mH}$.
 53. (a) $0,10 \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$; (b) $1,3 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$. 55. (a) 16 kV ;
 (b) $3,1 \text{ kV}$; (c) 23 kV . 57. (b) Změna magnetického
 pole jedné cívky nesmí indukovat proud v druhé;
 (c) $1/L_p = \sum_{j=1}^N (1/L_j)$. 59. $6,91\tau_L$. 61. $1,54 \text{ s}$.
 63. (a) $8,45 \text{ ns}$; (b) $7,37 \text{ mA}$. 65. $(42 + 20t) \text{ V}$.
 67. $12,0 \text{ A}\cdot\text{s}^{-1}$. 69. (a) $I_1 = I_2 = 3,33 \text{ A}$; (b) $I_1 = 4,55 \text{ A}$,
 $I_2 = 2,73 \text{ A}$; (c) $I_1 = 0$, $I_2 = 1,82 \text{ A}$; (d) $I_1 = I_2 = 0$.
 71. $\mathcal{E}L_1/R(L_1 + L_2)$. 73. (a) $I(1 - e^{-Rt/L})$.
 75. $1,23\tau_L$. 77. (a) 240 W ; (b) 150 W ; (c) 390 W .
 79. (a) $97,9 \text{ H}$; (b) $0,196 \text{ mJ}$. 81. (a) $10,5 \text{ mJ}$; (b) $14,1 \text{ mJ}$.
 83. (a) $34,2 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$; (b) $49,4 \text{ mJ}$. 85. $1,5\cdot 10^8 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$.
 87. $(\mu_0 I/2\pi) \ln(b/a)$. 89. (a) $1,3 \text{ mT}$; (b) $0,63 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$.
 91. (a) $1,0 \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$; (b) $4,8\cdot 10^{-15} \text{ J}\cdot\text{m}^{-3}$. 93. (a) $1,67 \text{ mH}$;
 (b) $6,00 \text{ mWb}$. 95. 13 H . 99. Magnetické pole je
 nenulové pouze v průřezu solenoidu 1.

Kapitola 32

KONTROLY 1. (d), (b), (c), (a) (nula). 2. (a) 2; (b) 1.
 3. (a) Od něho; (b) od něho; (c) menší. 4. (a) K němu;
 (b) k němu; (c) menší. 5. a , c , b , d (nula). 6. b , c , d
 stejně, potom a .

OTÁZKY 1. (a) a , c , f ; (b) tyč gh . 3. Dodat.
 5. (a) Všechny dolů; (b) (1) nahoru, (2) dolů, (3) nula.

7. (a) (1) Nahoru, (2) nahoru, (3) dolů; (b) (1) dolů, (2) nahoru, (3) nula. 9. (a) Doprava; (b) doleva.
 11. (a) Snižuje; (b) snižuje. 13. (a) a a b (stejně), c , d ; (b), (c) podél žádné z nich (deska není rotačně symetrická, takže \mathbf{B} není tečné ani ke kruhové smyčce). 15. $1/4$.
CVIČENÍ A ÚLOHY 1. (b) Je záporné; (c) ne, plocha není uzavřená. Na otevřeném konci blízko magnetu by byl kladný tok. 3. $47\ \mu\text{Wb}$, dovnitř. 5. $55\ \mu\text{T}$.
 7. (a) $600\ \text{mA}$; (b) ano; (c) ne. 9. (a) $B = 31,0\ \mu\text{T}$, $\varphi = 0^\circ$; (b) $B = 55,9\ \mu\text{T}$, $\varphi = 73,9^\circ$; (c) $B = 62,0\ \mu\text{T}$, $\varphi = 90^\circ$. 11. $4,6 \cdot 10^{-24}\ \text{J}$. 13. (a) $5,3 \cdot 10^{11}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$; (b) $20\ \text{mT}$; (c) 660 . 15. (a) 7; (b) 7; (c) $3\hbar$, 0; (d) $3e\hbar/(2m)$, 0; (e) $3,5\hbar$; (f) 8. 17. (b) Ve směru vektoru momentu hybnosti. 19. $\Delta\mu = e^2 r^2 B / (4m)$.
 21. $20,8\ \text{mJ} \cdot \text{T}^{-1}$. 23. Ano. 25. (a) 4 K; (b) 1 K. 29. (a) $3,0\ \mu\text{T}$; (b) $5,6 \cdot 10^{-10}\ \text{eV}$.
 31. (a) $8,9\ \text{A} \cdot \text{m}^2$; (b) $13\ \text{N} \cdot \text{m}$. 35. (a) $0,14\ \text{A}$; (b) $79\ \mu\text{C}$. 37. $2,4 \cdot 10^{13}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. 39. (a) $3,4\ \text{pT}$.
 41. $7,5 \cdot 10^5\ \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$. 43. $7,2 \cdot 10^{12}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.
 45. (a) $2,1 \cdot 10^{-8}\ \text{A}$, dolů; (b) ve směru otáčení hodinových ručiček. 47. (a) $0,63\ \mu\text{T}$; (b) $2,3 \cdot 10^{12}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.
 49. (a) $2,0\ \text{A}$; (b) $2,3 \cdot 10^{11}\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$; (c) $0,50\ \text{A}$; (d) $0,63\ \mu\text{T} \cdot \text{m}$. 51. (a) $7,60\ \mu\text{A}$; (b) $859\ \text{kV} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$; (c) $3,39\ \text{mm}$; (d) $5,16\ \text{pT}$.

Kapitola 33

- KONTROLY** 1. (a) $T/2$; (b) T ; (c) $T/2$; (d) $T/4$.
 2. (a) $5\ \text{V}$; (b) $150\ \mu\text{J}$. 3. (a) 1; (b) 2. 4. (a) D , C , S , B , A ; (b) 1: A , 2: B , 3: S , 4: C ; 5: D ; (c) A .
 5. (a) Vzroste; (b) klesne. 6. (a) (1): zpožďuje se; (2): předbíhá; (3): ve fázi; (b) (3) ($\omega_b = \omega$, když $X_L = X_C$).
 7. (a) Zvětšit (obvod má kapacitní charakter; pro přiblížení k rezonanci, tj. pro maximální $P_{\text{stř}}$ je třeba zvětšit C neboli zmenšit X_C); (b) blíže. 8. Zvyšovací.

- OTÁZKY** 1. (a) $T/4$; (b) $T/4$; (c) $T/2$, viz obr. 33.2; (d) $T/2$, viz rov. (31.40). 3. (b), (a), (c). 5. (a) (3), (1), (2); (b) (2), pak (1) a (3) stejné. 7. Pomaleji. 9. (a) (1) a (4); (b) (2) a (3). 11. (a) 3, potom 1 a 2 stejná; (b) 2, 1, 3. 13. (a) Záporná; (b) předbíhá. 15. (a)–(c) Vpravo a zvýší se.

- CVIČENÍ A ÚLOHY** 1. $9,14\ \text{nF}$. 3. $45,2\ \text{mA}$.
 5. (a) $6,00\ \mu\text{s}$; (b) $167\ \text{kHz}$; (c) $3,00\ \mu\text{s}$. 7. (a) $89\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$; (b) $70\ \text{ms}$; (c) $25\ \mu\text{F}$. 9. $38\ \mu\text{H}$. 11. $7,0 \cdot 10^{-4}\ \text{s}$.
 15. (a) $3,0\ \text{nC}$; (b) $1,7\ \text{mA}$; (c) $4,5\ \text{nJ}$. 17. (a) $3,60\ \text{mH}$; (b) $1,33\ \text{kHz}$; (c) $0,188\ \text{ms}$. 19. $600\ \text{Hz}$, $710\ \text{Hz}$, $1\ 100\ \text{Hz}$, $1\ 300\ \text{Hz}$. 21. (a) $Q/\sqrt{3}$; (b) $0,152$.
 25. (a) $1,98\ \mu\text{J}$; (b) $5,56\ \mu\text{C}$; (c) $12,6\ \text{mA}$; (d) $-46,9^\circ$; (e) $+46,9^\circ$. 27. (a) 0; (b) $2i(t)$. 29. (a) $356\ \mu\text{s}$; (b) $2,50\ \text{mH}$; (c) $3,20\ \text{mJ}$. 31. $8,66\ \text{m}\Omega$. 33. $(L/R) \ln 2$.
 35. (a) $\pi/2\ \text{rad}$; (b) $q = (I/\omega')e^{-Rt/(2L)} \sin \omega't$.
 39. (a) $0,095\ 5\ \text{A}$; (b) $0,011\ 9\ \text{A}$. 41. (a) $4,60\ \text{kHz}$; (b) $26,6\ \text{nF}$; (c) $X_L = 2,60\ \text{k}\Omega$, $X_C = 0,650\ \text{k}\Omega$.
 43. (a) $0,65\ \text{kHz}$; (b) $24\ \Omega$. 45. (a) $39,1\ \text{mA}$; (b) 0; (c) $33,9\ \text{mA}$. 47. (a) $6,73\ \text{ms}$; (b) $2,24\ \text{ms}$;

- (c) kondenzátor; (d) $59,0\ \mu\text{F}$. 49. (a) $X_C = 0$, $X_L = 86,7\ \Omega$, $Z = 182\ \Omega$, $I = 198\ \text{mA}$, $\varphi = 28,5^\circ$.
 51. (a) $X_C = 37,9\ \Omega$, $X_L = 86,7\ \Omega$, $Z = 167\ \Omega$, $I = 216\ \text{mA}$, $\varphi = 17,1^\circ$. 53. (a) $2,35\ \text{mH}$; (b) vzdalují se od $1,40\ \text{kHz}$. 55. Ano, $1\ 000\ \text{V}$.
 57. (a) $36,0\ \text{V}$; (b) $27,3\ \text{V}$; (c) $17,0\ \text{V}$; (d) $-8,34\ \text{V}$.
 59. (a) $224\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$; (b) $6,00\ \text{A}$; (c) $228\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $219\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$; (d) $0,040$. 61. (a) $707\ \Omega$; (b) $32,2\ \text{mH}$; (c) $21,9\ \text{nF}$.
 63. (a) Rezonance při $f = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 85,7\ \text{Hz}$; (b) $15,6\ \mu\text{F}$; (c) $225\ \text{mA}$. 65. (a) $796\ \text{Hz}$; (b) beze změny; (c) zmenší se; (d) zvětší se. 69. $141\ \text{V}$. 71. (a) Odebírá; (b) dodává. 73. 0 , $9,00\ \text{W}$, $3,14\ \text{W}$, $1,82\ \text{W}$. 75. $177\ \Omega$.
 77. $7,61\ \text{A}$. 83. (a) $169\ \mu\text{F}$; (b) 0; (c) $90,0\ \text{W}$, 0; (d) 0° , 90° ; (e) 1, 0. 85. (a) $2,59\ \text{A}$; (b) $38,8\ \text{V}$, $159\ \text{V}$, $224\ \text{V}$, $64,2\ \text{V}$, $75,0\ \text{V}$; (c) $100\ \text{W}$ v R , 0 v L a C . 87. (a) $2,4\ \text{V}$; (b) $3,2\ \text{mA}$, $0,16\ \text{A}$. 89. (a) $1,9\ \text{V}$, $5,9\ \text{W}$; (b) $19\ \text{V}$, $590\ \text{W}$; (c) $0,19\ \text{kV}$, $59\ \text{kW}$. 91. (a) $X_C = [(2\pi)(45 \cdot 10^{-6}\ \text{F})f]^{-1}$; (c) $17,7\ \text{Hz}$. 93. (a) $X_L = (2\pi)(40 \cdot 10^{-3}\ \text{H})f$; (c) $796\ \text{Hz}$.
 95. (b) $61\ \text{Hz}$; (c) $61\ \text{Hz}$ a $90\ \Omega$.

Kapitola 34

- KONTROLY** 1. (a) (Podle obr. 34.5.) Na pravé straně obdélníku má \mathbf{E} směr záporné osy y , na levé straně má $\mathbf{E} + d\mathbf{E}$ stejný směr a větší velikost. (b) \mathbf{E} směřuje dolů. Na pravé straně má \mathbf{B} směr záporné osy z , na levé straně má $\mathbf{B} + d\mathbf{B}$ stejný směr a větší velikost. 2. Má směr kladné osy x . 3. (a) Zůstává stejný; (b) zmenší se. 4. a , d , b , c (nula). 5. (a). 6. (a) Ano; (b) ne.

- OTÁZKY** 1. (a) Ve směru kladné osy z ; (b) ve směru osy x . 3. (a) Zůstane konstatní; (b) bude růst; (c) bude klesat. 5. Obě 20° po směru otáčení hodinových ručiček od osy y . 7. Dvě. 9. b , 30° ; c , 60° ; d , 60° ; e , 30° ; f , 60° . 11. d , b , a , c . 13. (a) b ; (b) modrá; (c) c . 15. 1,5.

- CVIČENÍ A ÚLOHY** 1. (a) $4,7 \cdot 10^{-3}\ \text{Hz}$; (b) 3 min 32 s.
 3. (a) $4,5 \cdot 10^{24}\ \text{Hz}$; (b) $1,0 \cdot 10^4\ \text{km}$ neboli $1,6$ poloměru Země. 7. (a) Poroste; (b) změřit celkové rozdíly mezi zdánlivou dobou zatmění a dobou pozorovanou z A ; změřit poloměr zemské dráhy.
 9. $5,0 \cdot 10^{-21}\ \text{H}$; nereálně malá indukčnost. 11. $1,07\ \text{pT}$.
 17. $4,8 \cdot 10^{-29}\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$. 19. $4,51 \cdot 10^{-10}$. 21. $89\ \text{cm}$.
 23. $1,2\ \text{MW} \cdot \text{m}^{-2}$. 25. $820\ \text{m}$. 27. $1,03\ \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$; $3,43\ \mu\text{T}$. 29. (a) $1,4 \cdot 10^{-22}\ \text{W}$; (b) $1,1 \cdot 10^{15}\ \text{W}$.
 31. (a) $87\ \text{mV} \cdot \text{m}^{-1}$; (b) $0,30\ \text{nT}$; (c) $13\ \text{kW}$.
 33. $3,3 \cdot 10^{-8}\ \text{Pa}$. 35. (a) $4,7 \cdot 10^{-6}\ \text{Pa}$; (b) $2,1 \cdot 10^{10}$ krát menší. 37. $5,9 \cdot 10^{-8}\ \text{Pa}$. 39. (a) $3,97\ \text{GW} \cdot \text{m}^{-2}$; (b) $13,2\ \text{Pa}$; (c) $1,67 \cdot 10^{-11}\ \text{N}$; (d) $3,14 \cdot 10^3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
 41. $I(2 - \alpha)/c$. 43. $p_{\perp} \cos^2 \theta$. 45. $1,9\ \text{mm} \cdot \text{s}^{-1}$.
 47. (b) $580\ \text{nm}$. 49. (a) $1,9\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$; (b) $1,7 \cdot 10^{-11}\ \text{Pa}$.
 51. $1/8$. 53. $3,1\ \%$. 55. 20° nebo 70° . 57. $19\ \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$.
 59. (a) 2 destičky; (b) 5 destiček. 61. 180° . 63. $1,26$.
 65. $1,07\ \text{m}$. 69. (a) 0; (b) 20° ; (c) rovněž 0 a 20° .
 73. $1,41$. 75. $1,22$. 77. $182\ \text{cm}$. 79. (a) Ne; (b) ano;