<table>
<tr><td colspan="4">Slezská univerzita v Opavě – Fyzikální ústav</td></tr>
<tr><td colspan="4">Fyzikální praktikum I – Mechanika a molekulová fyzika</td></tr>
<tr><td>Jméno:</td><td>Ročník, obor:</td><td>Vyučující:</td><td>Datum měření:</td></tr>
<tr><td>Spolupracující:</td><td colspan="2" rowspan="2">Název úlohy:
Tíhové zrychlení, měření tíhového zrychlení pomocí kyvadla</td><td>Datum odevzdání:</td></tr>
<tr><td>Číslo úlohy:</td><td>Hodnocení:</td></tr>
</table>

Teoretický úvod:

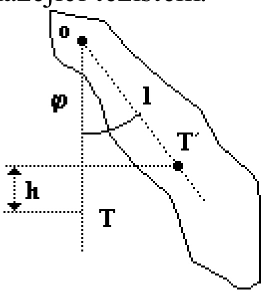
Volně (tj. s nulovým počátečním zrychlením) puštěné těleso v tíhovém poli Země v případě, že odpor vzduchu neuvažujeme, vykonává pohyb s **tíhovým zrychlením *g***. Tíhové zrychlení je vektorovým součtem **gravitačního zrychlení a_g** tělesa a jeho odstředivého zrychlení a_n, způsobeného rotací Země (a_n je u nás asi 400x menší než a_g). *Pojmy gravitační a tíhové zrychlení je třeba rozlišovat.*

V praxi – např. při našem měření – na pohybující se tělesa působí ještě odpor vzduchu (síla odporu vzduchu, působící proti pohybu, se dá spočítat užitím Stokesova zákona). Naštěstí pro vhodně zvolená tělesa je ovlivnění v podstatě zanedbatelné (např. pro ocelovou kuličku při povrchu Země padající k zemi vyjde, že síla odporu vzduchu je více než 1000x menší než tíha kuličky).

Jinak řečeno, tíhové zrychlení je zrychlení volného pádu ve vakuu (vzpomeňme na realizaci Torricelliho pokusu). Z výše uvedeného vyplývá, že velikost (i směr) tíhového zrychlení se mění se zeměpisnou šířkou a nadmořskou výškou. Rozměr tíhového zrychlení v soustavě SI je m s^{-2}.

Mezi jednoduché, ale současně velmi přesné metody pro zjištění velikosti tíhového zrychlení patří měření pomocí kyvadel.

Fyzickým kyvadlem (obr.1) nazýváme každé tuhé těleso libovolného tvaru volně otáčivé kolem vodorovné pevné osy neprocházející těžištěm.



Obr. 1: Fyzické kyvadlo *(převzato z http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/206-fyzicke-kyvadlo)*

Těleso je ve stabilní poloze, je-li těžiště v nejnižší poloze, tj. leží-li na svislici protínající svislou osu. Je-li φ okamžitá úhlová výchylka těžiště z rovnovážné polohy, *mg* tíha kyvadla, působící v těžišti, *d* vzdálenost těžiště od osy (v obr. 1 je *l*=*d*), působí na kyvadlo moment síly o velikosti (je to součin velikosti tíhové síly působící na těleso, tj. F=mg, a ramene síly, tj. r=d sin φ)

$$M = -mgd \sin \varphi \qquad (1)$$

Náš moment síly působí proti směru výchylky tělesa z rovnovážné polohy a snaží se přivést kyvadlo zpět do rovnovážné polohy (proto má záporné znaménko). Jestliže těleso vychýlíme a potom pustíme, bude těleso (jakožto fyzické kyvadlo) konat v čase se opakující pohyb, takový pohyb nazýváme kmitavý pohyb, označme jeho úhlové zrychlení písmenem $\boldsymbol{\varepsilon}$. Potom tento kmitavý pohyb můžeme popsat pohybovou rovnicí

$$\boldsymbol{M=J\,\varepsilon},$$

kde $\boldsymbol{J}$ je moment setrvačnosti tělesa k ose O. Po dosazení z (1) můžeme psát

$$M = J\varepsilon = J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\sin\varphi \,. \qquad (2)$$

Maximální možná hodnota velikosti momentu (odpovídající výchylce $\varphi=90°$)
$K=mgd$ se nazývá direkční moment kyvadla pro danou osu.

Po úpravě pohybové rovnice (2) dostaneme

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgd}{J}\sin\varphi = 0 \qquad (3)$$

Pro malé výchylky z rovnovážné polohy ($\varphi \le 5°$) můžeme přibližně položit $\sin\varphi \cong \varphi$.
Zavedeme-li navíc (to samozřejmě můžeme udělat, jelikož jednu konstantu nahradíme čtvercem jiné), že

$$\frac{mgd}{J} = \omega^2 \qquad (4)$$

kde ω = konst., dostaneme rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0\,, \qquad (5)$$

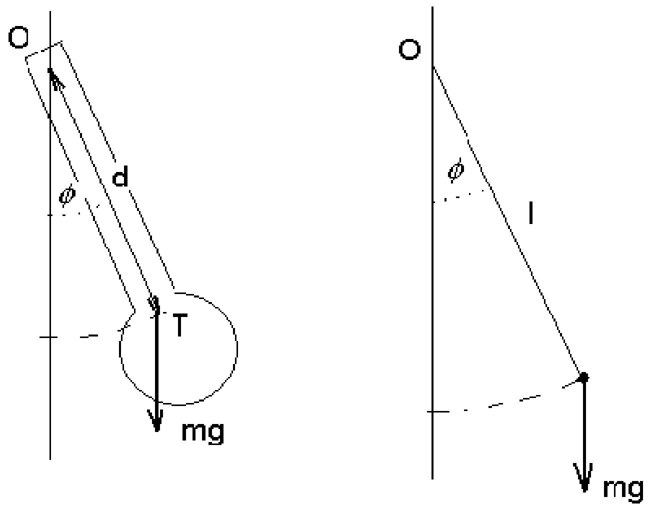
která je totožná s diferenciální pohybovou rovnicí harmonického pohybu, v níž ω^2 je čtverec úhlové frekvence. Označíme-li T periodu (dobu kmitu) při nahrazení kmitavého pohybu kyvadla harmonickým pohybem, pak

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} \;. \qquad (6)$$

Vidíme, že při velmi malých výchylkách kyvadla z rovnovážné polohy nezávisí perioda pohybu na jeho amplitudě.
Chyba vzniklá nahrazením skutečného pohybu fyzikálního kyvadla harmonickým pohybem činí při $\varphi_{max} = 1°$ asi 0,002 % při $\varphi_{max} = 5°$ asi 0,05 %

Dobu kyvu $\boldsymbol{\tau}$ definujeme jako polovinu doby kmitu $\boldsymbol{T}$. Je to tedy doba, kterou potřebuje těleso k pohybu z jedné krajní polohy do druhé, kdežto perioda je doba potřebná k proběhnutí celého kmitu, tj. doba z jedné krajní výchylky do druhé krajní výchylky a zpět do počáteční krajní polohy.

Matematickým kyvadlem nazýváme hmotný bod hmotnosti *m* zavěšený na tuhém nehmotném závěsu délky *l* (obr. 2)



Obr. 2: Matematické kyvadlo vpravo ve srovnání s fyzickým

Moment setrvačnosti je tu (z definice) dán součinem hmotnosti bodu a čtverce jeho vzdálenosti od osy, kolem níž kývá, tj.: $J = ml^2$.

Doba kmitu matematického kyvadla je pak podle (6), dosadíme-li za $d = l$,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (7)$$

Délka l_r matematického kyvadla, které kývá se stejnou dobou kmitu jako (např. naše) fyzické kyvadlo, se nazývá redukovaná délka fyzikálního kyvadla. Mají-li být doby kyvu stejné, pak podle (6) a (7) platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \qquad (8)$$

$$l_r = \frac{J}{md} \qquad (9)$$

Reverzním kyvadlem nazýváme takové fyzické kyvadlo, které kývá se stejnou dobou kmitu kolem dvou různých rovnoběžných os ležících v rovině, která prochází hmotným středem kyvadla. Rozborem se dá dojít k závěru, že shoda doby kmitu kolem obou os může nastat ve dvou případech:

a) osy jsou symetricky položeny vzhledem ke hmotnému středu fyzického kyvadla
b) osy jsou vzhledem k hmotnému středu fyzického kyvadla položeny asymetricky a jsou od sebe vzdáleny o redukovanou délku fyzického kyvadla.

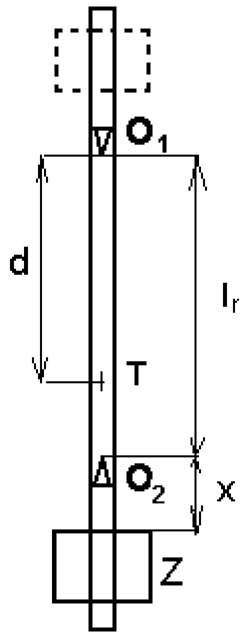
Vezmeme-li druhý případ, pak pro dobu kmitu *T* reverzního (převratného) kyvadla platí formálně shodný vztah jako pro dobu kmitu matematického kyvadla (7), v němž však délka *l* je nahrazena redukovanou délkou l_r, tj.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}} \qquad (10)$$

Pro tíhové zrychlení g dostaneme:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_r}{T^2} \quad (11)$$

Reverzní kyvadlo se používá k přesnému zjištění tíhového zrychlení na základě měření doby jeho kmitu. Výhodou použití reverzního kyvadla k určení tíhového zrychlení je, že se vyhneme nutnosti určování momentu setrvačnosti *J* vzhledem k ose otáčení a určování vzdálenosti *d* osy otáčení od hmotného středu. Určujeme pouze redukovanou délku l_r fyzického kyvadla a jeho dobu kmitu.
Nejjednodušším typem reverzního kyvadla je kovová tyč se dvěma pevnými břity, ostřím obráceným k těžišti, které leží mezi nimi. Nesouměrné polohy břitů k těžišti je dosaženo kovovým závažím ***Z*** připojeným k tyči tak, aby doba kmitu pro obě osy byla stejná (obr. 3). Najít rychle polohu závaží není snadné, proto volíme interpolační metodu určení doby kmitu. Pro danou polohu závaží na tyči ***x*** určíme dvojici doby kmitu T_1 a T_2 pro osy $\mathbf{o_1}$ a $\mathbf{o_2}$.
Z několika hodnot ***x*** sestrojíme graf závislosti časů T_1 a T_2. Dostaneme dvě křivky, které se protnou v hledaném čase *T*. Vzdálenost obou břitů je rovna redukované délce. Pro kyvadlo pak platí vztahy (10) a (11).



Obr. 3: Reverzní kyvadlo.

Úkoly:
1. Určete tíhové zrychlení užitím matematického kyvadla.
2. Určete tíhové zrychlení pomocí reverzního kyvadla.

Pomůcky:
matematické kyvadlo
reverzní kyvadlo
stopky
metr

Postup měření (můžete si napsat svůj vlastní, jiný)
1. Určete délku matematického kyvadla.
2. Určete dobu 10 kmitů, z ní dobu jednoho kmitu.
3. Měření opakujte 10x.
4. Vypočtěte tíhové zrychlení (vše ve vhodné tabulce)

5. Změřte redukovanou délku reverzního kyvadla
6. Pro danou polohu závaží určete doby kmitu T_1 a T_2.
7. Proveďte pro 10 hodnot x.
8. Sestrojte potřebné grafy a určete dobu kmitu reverzního kyvadla.
9. Vypočtěte tíhové zrychlení.

PS: při psaní protokolu: teorii úlohy můžete napsat společně, pak ale proveďte jedno měření od začátku až do konce, tj. postup, tabulky, výpočty, pod tabulkou pak zápis výsledku i s nejistotou. Potom totéž druhá metoda měření.
Nakonec Závěr: ten bude společný a bude obsahovat výsledné hodnoty měření (včetně nejistot) a zhodnocení výsledků.