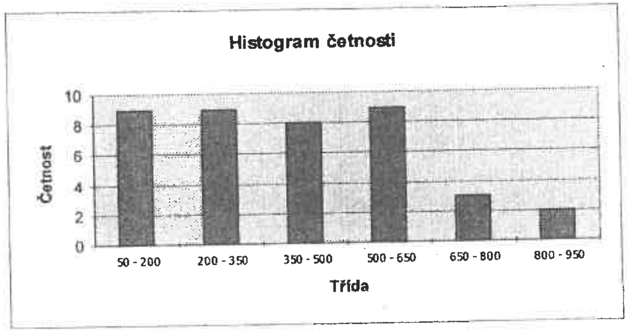

2.2 Osm administrativních pracovníků OPF v Karviné bylo dotázáno na vzdálenost ujetou při cestě do zaměstnání a zpět za běžný týden. Odpovědi uvádí následující výčet:

$$45, 55, 25, 50, 35, 45, 5, 20.$$

a. Vypočtěte výběrový průměr, medián a modus.
b. Vypočtěte výběrový rozptyl, výběrovou směrodatnou odchylku, variační koeficient a šikmost.

Řešení:
Výpočet jednotlivých charakteristik je vhodné provádět v tabulce:

	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	45	10	100
2	55	20	400
3	25	-10	100
4	50	15	225
5	35	0	0
6	45	10	100
7	5	-30	900
8	20	-15	225
	$\sum_{i=1}^{8} x_i = 280$		$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = 2050$

a. Výběrový průměr

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{280}{8} = 35.$$

Medián určíme jako prostřední položku uspořádaného souboru dat:

$$5, 20, 25, 35, 45, 45, 50, 55.$$

$$\tilde{x} = \frac{35+45}{2} = 40.$$

Modus je nejčetnější hodnota v souboru:

$$\hat{x} = 45.$$

b. Výběrový rozptyl

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{2050}{7} = 292{,}86.$$

Výběrová směrodatná odchylka

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{292{,}86} = 17{,}11.$$

Variační koeficient

$$v = \frac{s}{\bar{x}}.100\% = \frac{17{,}11}{35}.100\% = 48{,}89\%.$$

Šikmost

$$s_k = \frac{3(\bar{x} - \tilde{x})}{s} = \frac{3.(35-40)}{17{,}11} = -0{,}88.$$

Řešené příklady

3.1 Servisní oddělení prodejny domácích potřeb zaměstnává osm techniků. Předpokládejme, že každý technik může být přidělen nejvýše jednomu zákazníkovi a na každou opravu stačí pouze jeden technik. Kolika způsoby je možno přidělit techniky pěti zákazníkům?

Řešení:

Protože počet způsobů přidělení je roven počtu uspořádaných pětic (např. {1, 2, 4, 5, 8} je rozdílné od přidělení {2, 8, 1, 5, 4}, kde pořadí znamená číslo zákazníka) a čísla techniků se nesmějí opakovat, vypočteme jej jako počet variací páté třídy z osmi prvků bez opakování

$$V_5(8) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{40320}{6} = 6720.$$

3.2 Kolik 7-místných telefonních čísel může přidělit správa telekomunikací v jednom tranzitním okruhu, pokud tento má být identifikován konkrétní číslicí na prvním místě?

Řešení:

Má-li být na prvním místě jedna (kterákoliv) číslice, přičemž číslice se mohou v telefonním čísle opakovat, můžeme toto označit IXXXXXX, kde I je konkrétní identifikační číslice a X je jakákoliv číslice (0, 1, 2, ..., 9). Počet takovýchto telefonních čísel určíme jako počet variací šesté třídy z deseti prvků s opakováním

$$V_6'(10) = 10^6.$$

3.3 Kolik různých sestav volejbalového družstva je možno vytvořit z devíti nominovaných hráčů?

Řešení:

Volejbalové družstvo tvoří 6 hráčů a předpokládáme, že jsou navzájem zaměnitelní. Počet takovýchto sestav je roven počtu kombinací šesté třídy z devíti prvků bez opakování

$$C_6(9) = \frac{9!}{(9-6)!6!} = \frac{362880}{6.720} = 84.$$

3.4 Dopravní inspekce náhodně kontroluje vozidla státní poznávací značky KIL XX-XX.

a. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané vozidlo bude mít čtyřčíslí, ve kterém se cifry neopakují?
b. S jakou pravděpodobností bude mít náhodně vybrané vozidlo čtyřčíslí složené jen z lichých cifer?
c. Jak by se změnila pravděpodobnost v bodu **b.**, kdybychom navíc uvažovali jen ta čtyřčíslí, ve kterých se cifry neopakují?

Řešení:

a. Počet všech státních poznávacích značek KIL XX-XX, které může dopravní inspektorát vydat, je roven počtu variací čtvrté třídy z deseti prvků s opakováním sníženému o 1 (KIL 00-00 neuvažujeme), tedy

$$n = V_4'(10) - 1 = 10^4 - 1 = 9999.$$

Počet státních poznávacích značek, ve kterých se cifry neopakují vypočteme jako počet variací čtvrté třídy z deseti prvků bez opakování

$$m = V_4(10) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{3628800}{720} = 5040$$

a pravděpodobnost sledovaného jevu je pak rovna podílu počtu úspěšných výsledků k počtu všech možných výsledků náhodného pokusu

$$P = \frac{m}{n} = \frac{5040}{9999} = 0{,}5.$$

b. Počet čtyřčíslí složených jen z lichých cifer (1, 3, 5, 7, 9) je roven počtu variací čtvrté třídy z pěti prvků s opakováním

$$m' = V_4'(5) = 5^4 = 625$$

a pravděpodobnost sledovaného jevu je pak

$$P' = \frac{m'}{n} = \frac{625}{9999} = 0{,}063.$$

c. Počet čtyřčíslí složených pouze z lichých cifer, které se v nich neopakují, je roven počtu variací čtvrté třídy z pěti prvků bez opakování

$$m'' = V_4(5) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$$

a pravděpodobnost tohoto jevu je

$$P'' = \frac{m''}{n} = \frac{120}{9999} = 0{,}012\,.$$

3.5 Sociologický průzkum šetřil výši měsíčních příjmů obyvatel České republiky. Odpovědi náhodného výběru 200 respondentů byly kategorizovány podle jejich věku a měsíčního příjmu. Tabulka uvádí četnosti jednotlivých kategorií:

	Měsíční příjem		
Věk	méně než 5 000 Kč	5 000 až 10 000 Kč	nad 10 000 Kč
do 25 let	48	4	8
25 až 45 let	28	12	56
nad 45 let	4	4	36

Uvažujme náhodně vybranou odpověď. S jakou pravděpodobností jde o odpověď respondenta zařazeného:

a. ve věkové kategorii do 25 let?
b. ve věkové kategorii nad 25 let?
c. ve věkové kategorii 25 až 45 let a současně v kategorii příjmu nad 10 000 Kč?

Řešení:

Proveďme následující označení:

Jev A: Náhodně vybraná odpověď patří respondentovi ve věkové kategorii do 25 let.

Jev B: Náhodně vybraná odpověď patří respondentovi ve věkové kategorii 25 až 45 let.

Jev C: Náhodně vybraná odpověď patří respondentovi ve věkové kategorii nad 45 let.

Jev D: Náhodně vybraná odpověď patří respondentovi v kategorii příjmu nad 10 000 Kč.

Jev E: Nastane buď jev B, anebo jev C. (Jevy B a C jsou neslučitelné).

Jev F: Jevy B a D nastanou současně. (Jevy B a D přitom považujeme za nezávislé).

a. $$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{48+4+8}{200} = \frac{60}{200} = 0{,}3\,.$$

b. $$P(E) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{m_B}{n} + \frac{m_C}{n} = \frac{28+12+56}{200} + \frac{4+4+36}{200} = 0{,}7\,,$$

anebo

$$P(E) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7 \qquad \text{(Jev } E \text{ je opačný k jevu } A\text{).}$$

c. $$P(F) = P(B \cap D) = \frac{56}{200} = 0{,}26\,.$$

3.6 U 500 dospělých obyvatel jednoho města byla sledována zaměstnanost. Výsledky šetření byly rozděleny podle věku a zaměstnanosti dotázaných. Tabulka shrnuje četnosti jednotlivých kategorií.

	Zaměstnanost		
Věk	zaměstnaný(á)	nezaměstnaný(á) do 6 měsíců	nezaměstnaný(á) déle než 6 měsíců
do 40 let	125	75	25
40 a více let	150	50	75

Náhodně byla vybrána odpověď jednoho obyvatele. Vypočtěte pravděpodobnost, s jakou je tento obyvatel:

a. zaměstnán za předpokladu, že byl vybrán ve věkové kategorii do 40 let.
b. ve věkové kategorii 40 a více let za předpokladu, že byl vybrán z kategorie nezaměstnaných po dobu kratší 6 měsíců.

Řešení:

Uvažujme následující označení:

Jev A: Náhodně vybraný obyvatel je zaměstnán.

Jev B: Náhodně vybraný obyvatel je nezaměstnaný po dobu kratší 6 měsíců.

Jev C: Náhodně vybraný obyvatel je zařazen ve věkové kategorii do 40 let.

Jev D: Náhodně vybraný obyvatel je zařazen ve věkové kategorii 40 a více let.

Jev E: Nastane jev A za předpokladu, že nastal jev C.

Jev F: Nastane jev D za předpokladu, že nastal jev B.

a. $$P(E) = P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{125}{125+75+25} = 0{,}56\,.$$

b. $$P(F) = P(D|B) = \frac{P(D \cap B)}{P(B)} = \frac{50}{75+50} = 0{,}4\,.$$

3.7 Rozhodněte, které z následujících předpisů představují diskrétní rozdělení pravděpodobnosti.

a.

x	$f(x)$
0	0,2
1	0,9
2	-0,1

b.

x	$f(x)$
-2	0,3
-1	0,3
1	0,3
2	0,3

c.

x	$f(x)$
-1	0,25
0	0,65
1	0,10

Řešení:

Předpis $f(x) = P(X = x)$ pro diskrétní rozdělení pravděpodobnosti musí splňovat tyto podmínky:

1. $f(x) \geq 0$; $x \in X$,

2. $\sum_{x \in X} f(x) = 1$.

a. Předpis nepředstavuje rozdělení pravděpodobnosti, neboť není splněna první podmínka.

b. Není splněna druhá podmínka, proto nejde o diskrétní rozdělení pravděpodobnosti.

c. Předpis vyhovuje oběma uvedeným podmínkám, a tedy představuje diskrétní rozdělení pravděpodobnosti.

3.8 Oddělení bezpečnosti práce velké stavební firmy zjistilo dlouhodobým pozorováním, že počet pracovních úrazů v průběhu jednoho měsíce je náhodná veličina s následujícím rozdělením pravděpodobnosti:

x	$f(x)$
0	0,11
1	0,25
2	0,28
3	0,22
4	0,14

a. Tabelujte hodnoty distribuční funkce uvedeného rozdělení pravděpodobnosti.
b. Vypočtěte pravděpodobnost, že v průběhu následujícího měsíce dojde nejvýše ke dvěma úrazům.
c. Jaká je pravděpodobnost, že v průběhu následujícího měsíce dojde alespoň ke třem úrazům?
d. Vypočtěte průměrný počet úrazů během jednoho měsíce.
e. Vypočtěte směrodatnou odchylku počtu úrazů během jednoho měsíce.

Řešení:

Nejprve ověříme, zda uvedený předpis opravdu představuje diskrétní rozdělení pravděpodobnosti:

1. $f(x) \geq 0$; $x = 0,1,2,3,4$

2. $\sum_{x=0}^{4} f(x) = 0,11 + 0,25 + 0,28 + 0,22 + 0,14 = 1$.

Obě podmínky pro předpis diskrétního rozdělení pravděpodobnosti jsou splněny.

a. Distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny je definována vztahem:

$$F(x) = P(X < x) \; ; \quad x \in X \; ,$$

např.

$$F(0) = P(X < 0) = 0 \; ,$$

$$F(1) = P(X < 1) = f(0) = 0,11 \; ,$$

$$F(2) = P(X < 2) = f(0) + f(1) = 0,11 + 0,25 = 0,36 \; .$$

Řešení:

a. Binomické rozdělení pravděpodobnosti:

$$P(x|n,p) = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}\,p^{x}(1-p)^{n-x}\,, \quad x = 0,1,\dots,n.$$

b. $n = 5\,,\quad p = \dfrac{10}{100} = 0{,}1.$

$$P(4) = \frac{5!}{(5-4)!\,4!}.0{,}1^{4}.(1-0{,}1)^{5-4} = 4{,}5.10^{-4}.$$

c. $P(x \le 2) = P(0) + P(1) + P(2) =$

$$= \frac{5!}{(5-0)!\,0!}.0{,}1^{0}.(1-0{,}1)^{5-0} + \frac{5!}{(5-1)!\,1!}.0{,}1^{1}.(1-0{,}1)^{5-1} + \frac{5!}{(5-2)!\,2!}.0{,}1^{2}.(1-0{,}1)^{5-2} =$$

$= 0{,}99.$

d. $P(X \ge 2) = 1 - [P(0) + P(1)] =$

$$= 1 - [\frac{5!}{(5-0)!\,0!}.0{,}1^{0}.(1-0{,}1)^{5-0} + \frac{5!}{(5-1)!\,1!}.0{,}1^{1}.(1-0{,}1)^{5-1}] = 0{,}081.$$

e. $E(X) = np = 5.0{,}1 = 0{,}5$

$D(X) = np(1-p) = 5.0{,}1.(1-0{,}1) = 0{,}45.$

4.3 Dispečink taxislužby registruje požadavky klientů, které přicházejí v náhodných časových okamžicích. Dlouhodobým pozorováním se zjistilo, že průměrná četnost požadavků v průběhu intervalu 20 minut je 2.

a. Jakým typem rozdělení pravděpodobnosti se řídí zmíněný počet požadavků?
b. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl počtu požadavků za časový interval jedné hodiny.
c. Vypočtěte pravděpodobnost, že během časového intervalu jedné hodiny taxislužba zaregistruje alespoň 3 požadavky na své služby.

Řešení:

a. Poissonovo rozdělení pravděpodobnosti:

$$P(X|\lambda,t) = \frac{(\lambda t)^{x}e^{-\lambda t}}{x!}\,, \quad x = 0,1,2,\dots,+\infty.$$

b. Intenzita Poissonova procesu $\lambda = 2$ požadavky za 20 minut. Průměrný počet požadavků během jedné hodiny bude zřejmě třikrát vyšší:

$$E(X) = \lambda t = 2 \cdot 3 = 6\,.$$

Rozptyl náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti je roven její střední hodnotě:

$$D(X) = \lambda t = 6\,.$$

c. $P(X \ge 3) = P(3) + P(4) + P(5) + \dots\dots = 1 - P(X \le 2) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)] =$

$$= 1 - \left[\frac{6^{0}\cdot e^{-6}}{0!} + \frac{6^{1}\cdot e^{-6}}{1!} + \frac{6^{2}\cdot e^{-6}}{2!}\right] = 1 - e^{-6}\cdot(1+6+18) = 0{,}94.$$

Řešené příklady

6.1 Databáze banky obsahuje 500 účtů. Jejich průměrná hodnota je 7 500 Kč a směrodatná odchylka 2 800 Kč.

a. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka výběrového průměru, jestliže rozsah výběrového souboru je 50 účtů?
b. S jakou pravděpodobností nepřekročí hodnota výběrového průměru 8 000 Kč?

Řešení:

a. Z centrálního limitního teorému plyne, že náhodná veličina $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$ má pro $n > 30$ přibližně normální rozdělení s parametry $\mu_{\overline{X}} = \mu$ a $\sigma_{\overline{X}} = \sigma / \sqrt{n}$:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 7500,$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2800}{\sqrt{50}} = 395{,}98.$$

b. Pravděpodobnost, že náhodná veličina $\overline{X}$ nepřekročí hodnotu 8 000, vyjádříme takto:

$$P(\overline{X} < 8000) = P(Z < \frac{8000 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}) = P(Z < \frac{8000 - 7500}{395{,}98}) = P(Z < 1{,}26) = 0{,}9.$$

6.2 Průměrný denní počet prodaných výtisků deníku Moravskoslezský den, zjištěný na základě ročního pozorování u jednoho prodejce, činil 410 kusů. Rozptyl prodaného počtu výtisků byl 4 600. Vybereme-li náhodně z tohoto ročního pozorování 30 dní, s jakou pravděpodobností bude průměrný počet prodaných výtisků vyšší než 400?

Řešení:

Náhodná veličina $\overline{X}$ (průměrný počet prodaných výtisků za 30 dní) má přibližně normální rozdělení s parametry $\mu_{\overline{X}} = \mu$ a $\sigma_{\overline{X}} = \sigma / \sqrt{n}$:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu = 410,$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{4600}{30}} = 12{,}38.$$

Pravděpodobnost vypočteme následovně:

$$P(\overline{X} > 400) = 1 - P(\overline{X} \le 400) = 1 - P(Z \le \frac{400 - \mu_{\overline{X}}}{\sigma_{\overline{X}}}) = 1 - P(Z \le \frac{400 - 410}{12{,}38}) =$$

$$= 1 - P(Z \le -0{,}81) = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$$