III. Pravděpodobnost

Kolo štěstí u Mountfieldů

Jaká je šance že:

- *Vytočíte alespoň **10% slevu?***
- ***Vytočíte právě 25% slevu?***
- ***Vytočíte 100% slevu?***
- ***Vytočíte alespoň 50% slevu?***

Kolo štěstí - četnosti

x_i - Sleva %	n_i - Četnost	
12	12	
14	25	
15	24	
16	17	
20	15	
30	3	
50	1	
70	1	
80	1	
100	1	
Suma	100	

Kolo štěstí – šance (pravděpodobnosti)

x_i - Sleva %	n_i - Četnost	p_i - Pr-st
12	12	12 %
14	25	25 %
15	24	24 %
16	17	17 %
20	15	15 %
30	3	3 %
50	1	1 %
70	1	1 %
80	1	1 %
100	1	1 %
Suma	100	100 %

Náhodný jev a intuitivní pravděpodobnost …

- *Náhodný jev (NJ)* je výstupem *náhodného pokusu (NP)* - určitá situace nebo postup, jehož realizací obdržíme za stejných podmínek

  různé výstupy
- *Hromadný náhodný jev* - náhodný pokus je alespoň teoreticky neomezeně opakovatelný

Příklady NP

- kolo štěstí, hod kostkou
- zjišťováni volebních preferencí polit. stran voličů
- zjišťování hodnoty nákupů zákazníků

Příklady NJ

- padne nejméně 80%, padne šestka
- volič preferuje VV (ODS, TOP09, ČSSD aj.)
- hodnota nákupu zákazníka je 126 Kč

Náhodný jev a intuitivní pravděpodobnost

- *Jev jistý* - musí nutně nastat
- *Jev nemožný* - za žádných okolností pokusu nastat nemůže
- Jev, který spočívá v nenastoupení jevu A, je *jevem opačným:* $\overline{A}$
- *Jevy neslučitelné -* nemohou současně nastat

Elementární jevy a jevový prostor

Elementární jevy (EJ) jsou takové jevy, které:

- v dané situaci nelze rozložit na dílčí jevy
- jsou neslučitelné
- množinu všech elementárních jevů nazýváme *jevový prostor (JP)*
- jeden z EJ z JP musí vždy nastat

Elementární jevy a jevový prostor…

Vytváření nových jevů pomocí:

- ***Sjednocení*** jevů A a B označujeme $A \cup B$
- ***P**růnik*, tj. jev představovaný současným výskytem jevů A a B, označujeme $A \cap B$

Příklady…

Na „kole štěstí“:

1. Padnutí alespoň 12% je jevem jistým, padnutí méně než 12% je jevem nemožným!
2. Jestliže padnutí alespoň 50% znamená jev A, potom padnutí méně než 50% je jevem opačným k jevu A, tedy jevem $\overline{A}$.

Příklady…

Při zjišťování věku zákazníků v marketu:

3. Věk zákazníka nejvýše 160 let je jevem jistým, věk zákazníka více než 160 let je jevem nemožným.
4. Jestliže věk zákazníka nejvýše 20 let je jev A, potom věk zákazníka alespoň 21 let je jevem opačným k jevu A, tedy jevem $\bar{A}$.

Příklady….

5. Jevový prostor „kolo štěstí“ se skládá z 10 elementárních jevů, možnými výsledky je totiž padnutí 12,14,15,16,20,30,50,70,80,100 %
6. Jevový prostor věku dospělých zákazníků (v rocích) daného supermarketu je 18, 19, 20, ... … – neomezená množina EJ

POZOR!

Náhodný jev může být totožný s některým elementárním jevem, nebo může zahrnovat více elementárních jevů, např. padnutí sudého počtu ok je sjednocením trojice elementárních jevů (2, 4, 6)

Intuitivní pravděpodobnost…

Míru možnosti nebo šance výskytu hromadného náhodného jevu udává číslo, které nazýváme *pravděpodobností* (Prst)

tohoto jevu

Intuitivní pravděpodobnost

- Prst = číslo z intervalu mezi 0 a 1
- Jevu nemožnému se přiřazuje Prst = 0
- Jevu jistému Prst = 1
- Čím větší má jev pravděpodobnost, tím větší je šance, že jev nastane

Klasická pravděpodobnost

a kombinatorika …

- Náhodný pokus má n elementárních jevů (tj. výsledků pokusu), které mají stejnou pravděpodobnost výskytu
- Jev X nastane tehdy, když nastane jeden z m předem stanovených příznivých výsledků
- Potom pravděpodobnost jevu X je dána podílem všech příznivých výsledků a všech možných výsledků:

$$\boxed{Prst(X) = \frac{m}{n}}$$

Příklad 1…

V urně je 10 koulí, z toho 6 černých a 4 bílé:

a. Stanovte pravděpodobnost, že 1 vytažená koule bude bílá

b. Stanovte pravděpodobnost, že z 5 vytažených koulí budou 3 černé a 2 bílé

Řešení Příkladu 1a…

Elementárním jevem je kterákoliv z vytažených koulí. Počet všech elementárních jevů n = 10, počet příznivých jevů je m = 4, (bílé)

to jest

$$\boldsymbol{Prst} = 4/10 = 0{,}4$$

Řešení Příkladu 1b…

Elementárním jevem je kterákoliv pětice vytažených koulí. Počet všech elementárních jevů

se rovná počtu všech kombinací

5 koulí vytažených z 10 koulí,

tj.

$$n = \binom{10}{5} = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} = 252$$

což je počet možných výsledků!

Řešení Příkladu 1b…

Počet příznivých výsledků je počet těch kombinací 5 koulí, kde 3 jsou černé (ze 6) a 2 bílé (ze 4),

tedy $m = \binom{6}{3} . \binom{4}{2}$ = 20.6 = 120

Hledaná pravděpodobnost *Prst* je podle vzorce (1):

$$\boldsymbol{Prst} = \frac{120}{252} = 0{,}461 \text{ tj. } 46{,}1\%$$

Ke stanovení (intuitivní) pravděpodobnosti se užívá:

Kombinatorika

Mějme n prvků (například písmen, koulí, lidí aj.)

Kolika způsoby je možné vytvořit skupinu o x prvcích, přičemž

1. záleží nebo 2. nezáleží

na pořadí prvků ve skupině?

ad 1. Variace (písmena: ano, ona…)

ad 2. Kombinace (tažená čísla ve sportce)

Prvky ve skupině se eventuálně mohou opakovat!?

Kombinatorika 2 – ad 1.

Nepřipouštíme-li opakování prvků ve skupině, dostáváme *variace* $\boldsymbol{x}$*-té třídy z* $\boldsymbol{n}$ *prvků* *bez opakování*, jejich počet je dán vztahem:

$$V_x(n) = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Připouštíme-li opakování stejného prvku ve skupině, potom dostáváme *variace* $\boldsymbol{x}$*-té třídy z* $\boldsymbol{n}$ *prvků* *s opakováním*, jejich počet udává vztah:

$$V_x^{op}(n) = n^x$$

Kombinatorika 3

Ve speciálním případě $x = n$, dostáváme ***permutace*** $\boldsymbol{n}$***-té*** *třídy* (bez opakování i s opakováním). Konkrétně, pro permutace bez opakování platí známý vzorec:

$$P(n) = n!$$

Kombinatorika 4 – ad 2.

Uvažujeme skupiny x prvků, kde nezáleží na pořadí prvků:

kombinace x-té třídy z n prvků bez opakování a jejich počet vyjadřuje vzorec :

$$C_x(n) = \binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$

Prvky ve skupině se mohou opakovat:

kombinacích x-té třídy z n prvků s opakováním, jejich počet je dán vzorcem :

$$C_x^{op}(n) = \binom{n+x-1}{x}$$

Příklady…

1. Kolik 3-písmenných slov lze vytvořit z písmen A, B, C, D, E ?

- Jedná se o variace s opakováním, neboť záleží na pořadí písmen a písmena se mohou ve slově opakovat

$$V_x^{op}(n) = n^x = 5^3 = 125$$

Příklady:

2. Kolika způsoby lze vytvořit 3-členné předsednictvo představenstva podniku ze 6 zvolených členů?

- Jedná se o kombinace bez opakování, neboť zde nezáleží na pořadí členů předsednictva a členové se přirozeně nemohou opakovat

$$C_3(6) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6.5.4}{3.2.1} = 20$$

Když je počet jevů neomezený: **Množinová pravděpodobnost**…

- Uvažujeme jev X - množina elementárních jevů - výsledků
- Symbolem $m(X)$ označíme nezáporné číslo, které představuje *míru jevu* X,

  tj. „množství“ jevu X

Příklad: Kruh „desítka“ v terči má nekonečně mnoho bodů, které můžete trefit – jev X. Jaká je Prst, že trefíte „10“ (pokud s jistotou trefíte celý terč?)

Neomezený počet elementárních jevů: Množinová pravděpodobnost

- $m(\Omega)$ označuje míru jevového prostoru Ω (tj. množina všech el. jevů)
- *Pravděpodobnost* jevu X je podílem míry jevu X a míry jevového prostoru Ω:

$$\boxed{Prst(X) = \frac{m(X)}{m(\Omega)}}$$

Příklad 2…

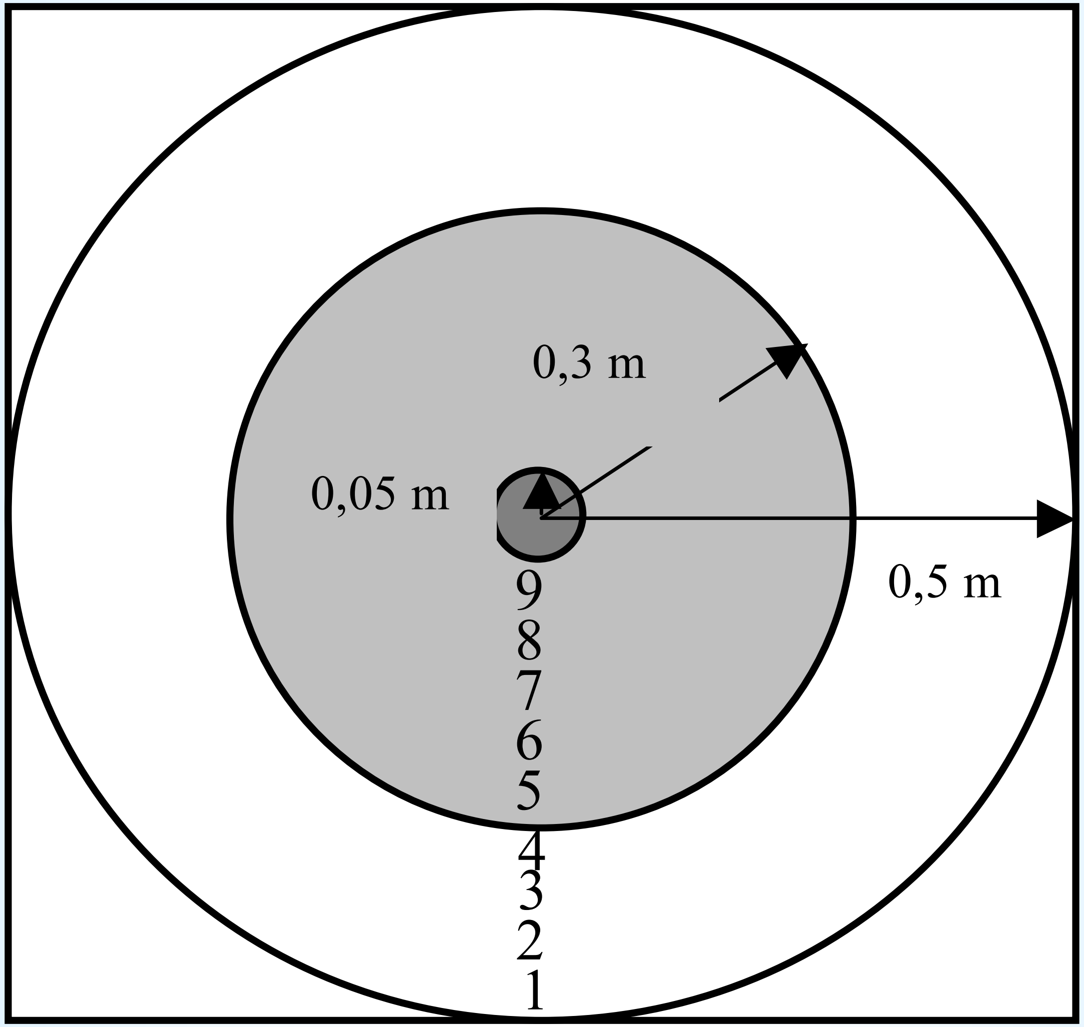
Náhodný proces: „zjednodušená střelba z luku do terče podle Obrázku (dále)

Za elementární jev se považuje zasažený bod v terči

Množinou všech elementárních jevů tj. jevovým prostorem bude celý čtvercový terč. Tato množina obsahuje zřejmě nekonečně mnoho bodů – elementárních jevů

Jako vhodnou míru použijeme obsah rovinného obrazce

Příklad - terč:

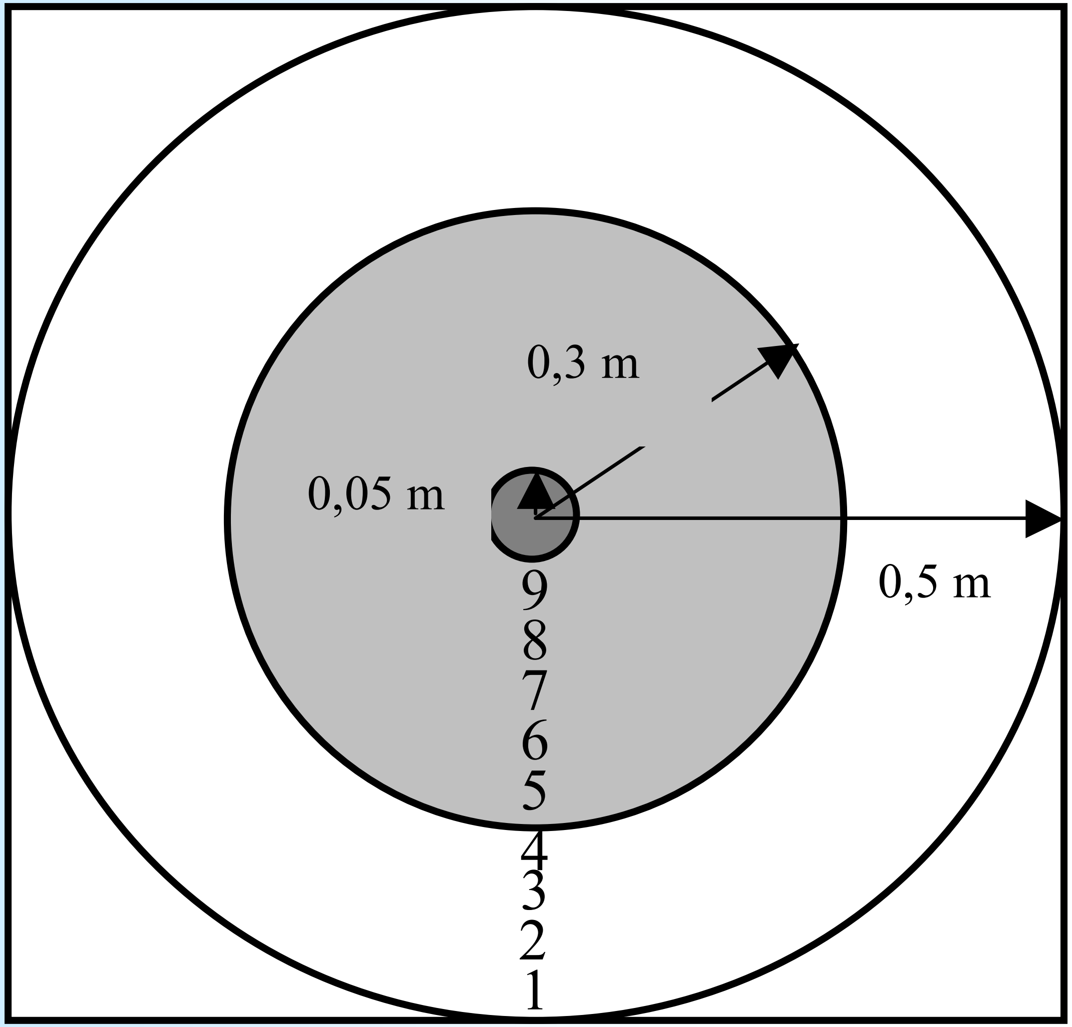


Příklad 2…

Vypočtěte pravděpodobnosti zasažení (tj. jevu):

- X_1 - tmavého centrálního kruhu („desítka“)
- X_2 - světle šedého mezikruží („5“ až „9“)
- X_3 - bílého mezikruží („1“ až „4“)

Příklad - terč:



$$Prst(X_1) = 0{,}0078$$

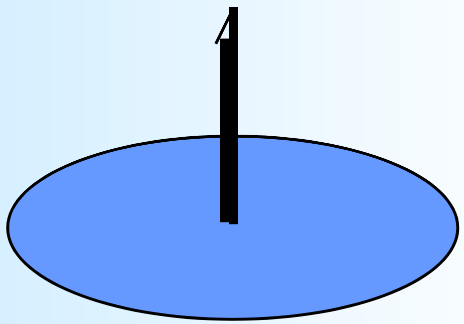
$$Prst(X_2) = 0{,}2747$$

$$Prst(X_3) = 0{,}5024$$

Příklad – „Hod připínáčkem“

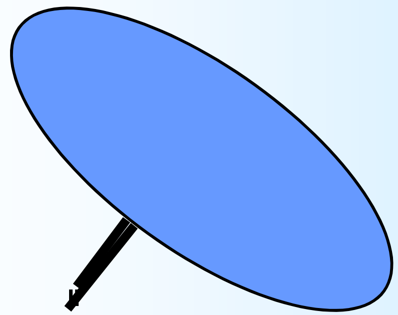
Jev A

Prst (A) = ?



Jev B

Prst (B) = ??



Pravděpodobnost jako relativní četnost

- *Pravděpodobnost* lze empiricky vyjádřit jako relativní četnost jevu při velkém počtu opakování náhodného pokusu
- f_k - počet výskytu daného jevu X během k pokusů

Pravděpodobnost jako relativní četnost

$Prst(X)$ - pravděpodobnost jevu X definujeme jako limitu

$$Pr\,st\left(X\right) = \lim_{k \to +\infty} \frac{f_k}{k}$$

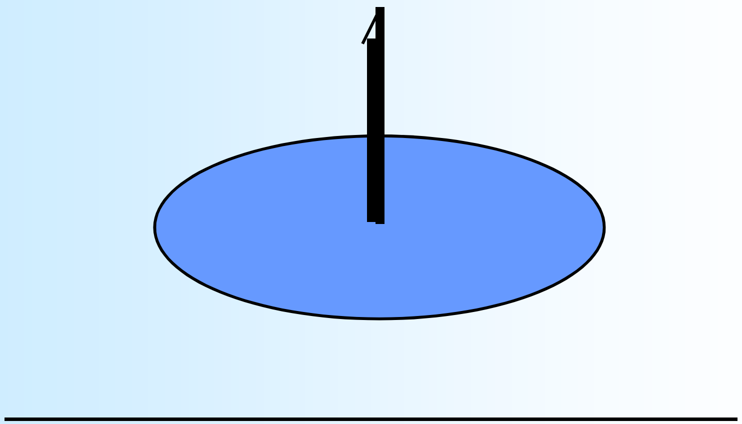
Prakticky se pravděpodobnost vypočítá jako hodnota podílu: $\frac{f_k}{k}$

pro „dost velké“ k

Příklad – „Hod připínáčkem“

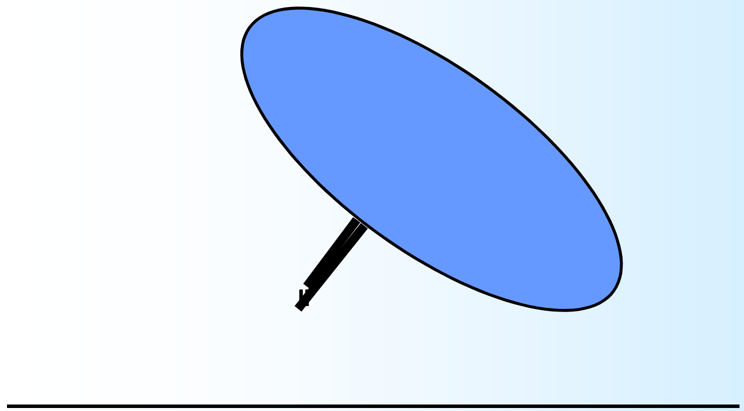
Jev A

Prst (A) = 0,55



Jev B

Prst (B) = 0,45



Podmíněná pravděpodobnost…

- Číslo $P(A)$ udává pravděpodobnost jevu A pro pevně stanovený komplex podmínek

- K původním podmínkám připojíme ještě další podmínku, totiž že nastal (jiný) jev B
(s nenulovou pravděpodobností)

Podmíněná pravděpodobnost

- Hledáme pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastane jev *B*
- To je *podmíněná pravděpodobnost* ***jevu*** $\boldsymbol{A}$ **vzhledem k jevu** $\boldsymbol{B}$:

$$Prst(A|B)$$

- Podmíněnou pravděpodobnost určíme podle ***Bayesova vzorce***:

$$Prst(A|B)=\frac{Prst(A\cap B)}{Prst(B)}$$

Příklad: „hrací kostka“…

- A - padne číslo >2 $\Rightarrow Prst(A)$ = 4/6
- B - padne číslo sudé $\Rightarrow Prst(B)$ = 3/6
- $Prst(A \cap B)$ = 2/6
- Podle Bayesova vzorce:

  $Prst(A \mid B)$ = 2/3

$$Pr\,st(A \mid B) = \frac{Pr\,st(A \cap B)}{Pr\,st(B)}$$

Příklad: „hrací kostka“

Totéž lze ověřit klasickou pravděpodobností:

$$Pr\,st(A \mid B) = \frac{m}{n}$$

- n = 3 - počet „sudých“ možností
- m = 2 - počet >2 mezi sudými $\Rightarrow$ $Prst(A|B)$ = 2/3