

## DISKRÉTNÍ PRAVDĚPODOBNOSTNÍ MODELY

**Stejněměrné**  
**Binomické**  
**Poissonovo**

## Stejněměrné rozdělení

(náhodná veličina nabývá  $k$  různých hodnot se stejnou pravděpodobností)

1. Určete, s jakou pravděpodobností padne při hození kostkou trojka.
2. Určete, s jakou pravděpodobností padne při hození kostkou nejvýše trojka.
3. Určete střední hodnotu.
4. Určete rozptyl.

$$P(x) = \frac{1}{k}$$

$$E(X) = \frac{k+1}{2}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{k^2 - 1}{12}$$



## Binomické rozdělení

(2 navzájem se vylučující alternativy)

=BINOM.DIST

Na 1000 novorozenců se narodí 515 chlapců a 485 dívek.

Předpokládáme rodinu se 4 dětmi.

1. Určete pravděpodobnost, že se v rodině narodí právě 4 chlapci.
2. Určete pravděpodobnost, že se v rodině narodí alespoň 2 dívky.
3. Určete střední hodnotu počtu dívek narozených v rodině se 4 potomky.
4. Určete rozptyl počtu chlapců narozených v rodině se 4 potomky.

$$P(X = x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$E(X) = n \cdot p$$

$$Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

### K procvičení (s řešením):

Úloha 1: Určete pravděpodobnost všech jevů, které mohou nastat při hodu 3 mincemi.

Úloha 2: Střelec má 80% pravděpodobnost, že zasáhne cíl. Určete pravděpodobnost, že:

- a) z 5 pokusů zasáhne cíl 5 krát
- b) z 6 pokusů zasáhne cíl 3 krát
- c) z 8 pokusů zasáhne cíl přesně 4 krát

Úloha 3: Jistá mezinárodní marketingová laboratoř odhaduje, že pouze 50 procent výrobků daného podniku je schopno konkurovat zahraniční produkci. Jaká je pravděpodobnost, že právě 4 ze 6 výrobků této firmy jsou úspěšné?

Určete střední hodnotu a rozptyl.

$$E(x) = n \cdot p$$

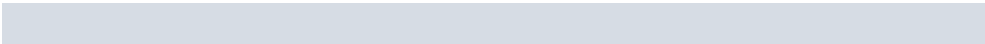
$$Var(x) = np(1-p)$$

Úloha 4:

Z každé stokusové zásilky kontroluje odběratel kvalitu 5 náhodně vybraných kusů. Je známo, že každá zásilka obsahuje 10% zmetků.

- a. Jakým typem rozdělení pravděpodobnosti se řídí počet zjištěných zmetků?
- b. Vypočtete pravděpodobnost zjištění právě 4 zmetků.

- c. Jaká je pravděpodobnost zjištění nejvýše 2 zmetků?
- d. Jaká je pravděpodobnost zjištění alespoň 2 zmetků?
- e. Vypočtete střední hodnotu a rozptyl množství zjištěných zmetků.



$P(0 \text{ líců}) = 0,125$	0.1250
$P(1 \text{ líc}) = 0,375$	0.3750
$P(2 \text{ líce}) = 0,375$	0.3750
$P(3 \text{ líce}) = 0,125$	0.1250
$P = 0,328$	0.3277
$P = 0,082$	0.0819
$P = 0,046$	0.0459
$P(4) = 0,234$	0.2344
$E(x)$	3
$Var(x)$	1.5

Binomickým - kvalitní výrobek/zmetek

$P = 0,00045$	0.00045
---------------	---------

$P = 0,99$	0.99144
$P = 0,082$	0.08146
$E(x) = 0,5, \text{Var}(x) = 0,45$	0.5
	0.45

## Poissonovo rozdělení

(jevy nastávají během určitého časového intervalu s danou intenzitou)

=POISSON.DIST

Do prodejny přicházejí průměrně 3 zákazníci během hodiny.

1. S jakou pravděpodobností přijde během následující hodiny právě 1 zákazník?
2. S jakou pravděpodobností přijde během následujících 20 minut právě 1 zákazník?
3. S jakou pravděpodobností přijdou během následujících 20 minut alespoň 2 zákazníci?
4. S jakou pravděpodobností přijde během následujících 90 minut více než 5 zákazníků?
5. S jakou pravděpodobností přijdou během následujících 90 minut nejvíce 2 zákazníci?

$$P(x | \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

### K procvičení (s řešením):

Úloha 1:

Zákazníci přicházejí náhodně do opravy obuvi s průměrnou intenzitou 4 za hodinu. Zjistěte pravděpodobnost, že do opravy přijdou za hodinu právě 2 zákazníci, vypočtěte střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

$$E(x) = \lambda \cdot t$$

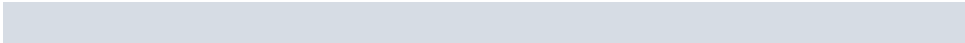
intenzita \* d

Úloha 2:

Dispečink taxislužby registruje požadavky klientů, které přicházejí v náhodných časových okamžicích. Dlouhodobým pozorováním se zjistilo, že průměrná četnost požadavků v průběhu intervalu 20 minut je 2.

- a. Jakým typem rozdělení pravděpodobnosti se řídí zmíněný počet požadavků?
- b. Vypočtěte střední hodnotu a rozptyl počtu požadavků za časový interval jedné hodiny.
- c. Vypočtěte pravděpodobnost, že během časového intervalu jedné hodiny taxislužba zaregistruje alespoň 3 požadavky na své služby.





$$E(x) = \lambda \cdot t$$

$$Var(x) = \lambda \cdot t$$

$$P = 0,146$$

$$0.146525$$

$$E(x) = Var(x) = 4$$

$$4$$

élka časového intervalu

Poissonovým - jevy nastávají během časového intervalu s danou intenzitou

$$E(x) = Var(x) = 6$$

6 (za 60 minut)

$$P = 0,94$$

$$0.938031$$

## Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

### Stejněměrné rozdělení

Podmínky pro pravděpodobnostní funkci:

$$p(x_i) \geq 0 \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny:

$$E(X) = \sum_x xp(x)$$

Rozptyl diskrétní náhodné veličiny:

$$Var(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 p(x)$$

Střední hodnota spojité náhodné veličiny:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Rozptyl spojité náhodné veličiny:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$$

### Binomické rozdělení

pravděpodobnost

$$P(X = x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

## 6.2 Stejněměrné rozdělení

Mějme diskrétní

se stejnou pravděpodobností

Říkáme, že 1 **podobnosti.**

Snadno lze odvodit

a pro rozptyl d

$$P(X = x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x}$$

**střední hodnota**

$$E(X) = n \cdot p$$

n ... počet opakování  
p ... pravděpodobnost

**rozptyl**

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

## Poissonovo rozdělení

**Pravděpodobnost**

$$P(x | \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

**střední hodnota**

$$E(X) = \lambda \cdot t$$

$\lambda$  ... intenzita  
t ... časový úsek  
e ... Eulerovo číslo;  $e \approx 2,71828$

**rozptyl**

$$\text{Var}(X) = \lambda \cdot t$$

## stejněoměrné rozdělení

Uvažujme náhodnou veličinu  $X$ , která nabývá právě  $k$  různých

hodnot  $1, 2, 3, \dots, k$

s rovinněoměrnou

$$P(x) = \frac{1}{k} \quad \text{pro } x = 1, \dots, k.$$

Náhodná veličina  $X$  má **stejněoměrné rozdělení**

Uvažujme, že střední hodnota je (podle vzorce (5.7))

$$E(X) = \frac{k+1}{2},$$

Uvažujme dále (podle vzorce (5.10) - zkuste si to sami!)

$$\text{Var}(X) = \frac{k^2 - 1}{12}.$$

í  
st úspěchu



řibližně 2,7183



ch hodnot:

í pravdě-





**V google tabulce na níže uvedené adrese najdete datovou mat  
doplňovat odpovědi respondentů:**

<https://docs.google.com/spreadsheets/d/1dWMuNrCunWcTusfM9iTVqPSQpMPhNnTJZ6UL>

Společně získaná data od respondentů budeme během semestru vyhodnocovat příslušnými



**ici, do které můžete**

[MCOqwL4/edit?usp=sharing](https://www.konferencniportal.cz/MCOqwL4/edit?usp=sharing)

statistickými metodami.

Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že počet pracovních úrazů v jedné rozdělení pravděpodobnosti:

1)

$x$	$p(x)$	$F(x)$
0	0.14	0.14
1	0.22	0.36
2	0.37	0.73
3	0.25	0.98
4	0.02	1

1. Určete hodnoty distribuční funkce  $F(x)$ .
2. Určete pravděpodobnost
  - právě 1 pracovního úrazu v následujíc
  - nejvýše 2 pracovních úrazů v následu
  - alespoň 3 pracovních úrazů v následu
3. Určete
  - střední hodnotu počtu úrazů během měsíce,
  - modus,
  - medián.
4. Určete směrodatnou odchylku počtu úrazů.  $\text{Var}(X) = 1,0659$

**firmě je náhodná veličina s následujícím**

cím měsíci,	0.22
jícím měsíci,	0.73
ijícím měsíci.	0.27

1.79

2 (největší pravděpodobnost=0,37)

2 (první hodnota  $F(x)$  kt. dosáhla více než 0,50)

1.0324