

MATEMATIKA V EKONOMII- PŘEDNÁŠKA Č. 3

-Určit **průběh funkce** znamená určit všechny důležité vlastnosti dané funkce.

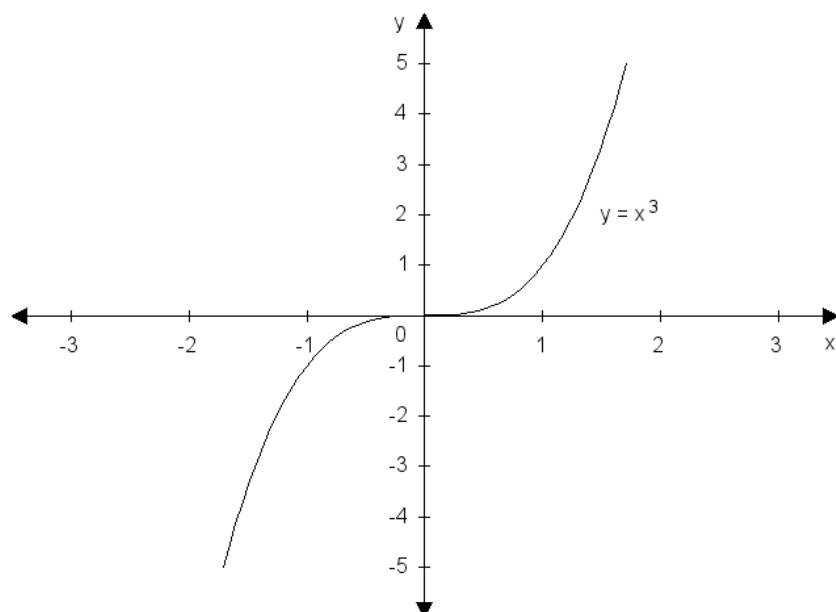
-Monotónnost funkce:

- Necht' má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) **kladnou derivaci**, pak je na tomto intervalu **rostoucí**.
- Necht' má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) **zápornou derivaci**, pak je na tomto intervalu **klesající**.

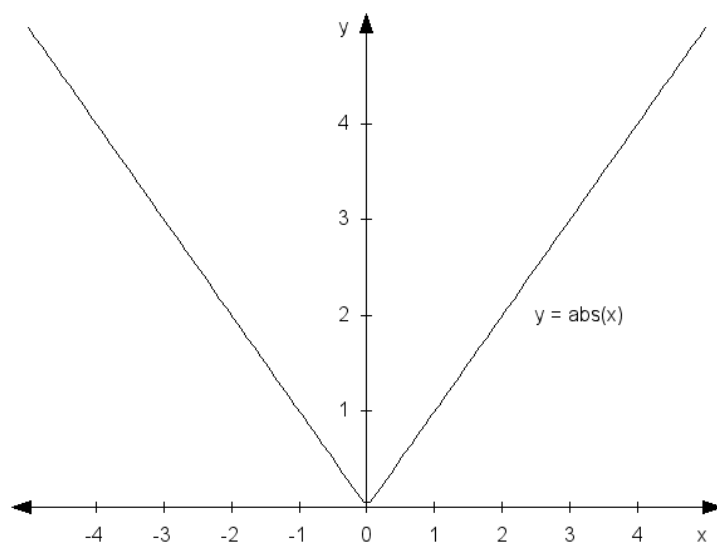
-Extrémy funkce:

- Je-li v bodě $x = a$ maximum nebo minimum funkce, a první derivace v tomto bodě existuje, pak je $f'(a) = 0$. Opačné tvrzení neplatí!
- **Stacionární bod** (bod podezřelý z extrému) je bod, v němž je první derivace nulová : $f'(a) = 0$. Ve stacionárním bodě může být **maximum**, **minimum** nebo **inflexní bod**.
- Pro **lokální maximum** platí: $f'(a) = 0$ a $f''(a) < 0$
- Pro **lokální minimum** platí: $f'(a) = 0$ a $f''(a) > 0$.
- Pokud je $f''(a) = 0$, nelze na základě druhé derivace o extrému rozhodnout.

Extrémy funkce mohou být ve stacionárních bodech nebo bodech, v nichž první derivace neexistuje (např. $y = |x|$ má minimum v bodě $x = 0$, kde první derivace neexistuje).



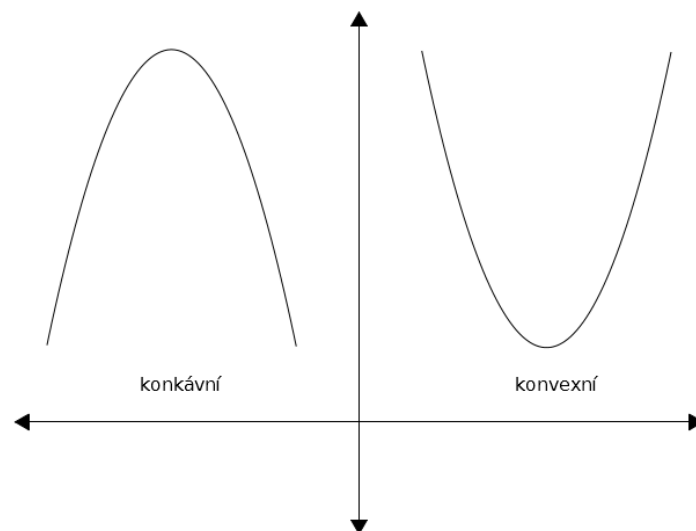
Obr. 3.1. Graf funkce $y = x^3$.



Obr. 3.2. Graf funkce $y = |x|$.

-Konvexnost a konkávnost funkce

- Necht' má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) **kladnou druhou derivaci**, pak je na tomto intervalu **konvexní**.
- Necht' má funkce $y = f(x)$ v každém bodě x z intervalu (a,b) **zápornou druhou derivaci**, pak je na tomto intervalu **konkávní**.
- **Inflexní bod** je bod, v němž se mění konvexnost na konkávnost nebo opačně.



Obr. 3.3. Konkávní a konvexní funkce

Příklad 3.2. Určete extrémů funkce:

- a) $y = x^2 - 6x$
- b) $y = x^3 - 4x^2$
- c) $y = e^x + 1$

Příklad 3.3. Určete hodnotu práce L , pro kterou dosahuje funkce produkce $Q = 12L^2 - L^3$ svého maxima.

Příklad 3.8. Je dána funkce nákladů $TC(Q) = 2Q^3 - 6Q^2 + 30Q + 5$. Určete Q , pro které jsou mezní náklady $MC(Q)$ minimální. Načrtněte průběh funkce $MC(Q)$.

-Asymptoty funkce

- *Asymptotami funkce* $y = f(x)$ nazýváme přímky, pro které platí, že jejich vzdálenost od grafu funkce se pro x jdoucí do nekonečna blíží nule.
- Asymptoty existují *svislé*, *vodorovné* a *šikmé*.

Šikmá asymptota má obecnou rovnici stejnou jako lineární funkce (je to přímka!), tedy $y = ax + b$. Koeficienty a a b se vypočtou pomocí následujících limit:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ resp. } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (3.1)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax], \text{ resp. } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] \quad (3.2)$$

Při **určování průběhu funkce** obvykle postupujeme podle následující osnovy:

1. $D(f)$, sudost, lichost, periodičnost.
2. Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti a v nevlastních bodech.
3. Průsečíky s osami x a y , znaménka funkčních hodnot.
4. První derivace, její nulové body.
5. Lokální extrémny a intervaly monotónnosti.
6. Druhá derivace a její nulové body.
7. Inflexní body, konkávnost, konvexnost.
8. Asymptoty.
9. Omezenost funkce, $H(f)$.
10. Graf funkce.

Příklad 3.4. Určete průběh funkce $f: y = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Příklad 3.5. Určete průběh funkce $y = \frac{x^2}{x-1}$.

-Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

- **Racionální lomenou funkcí** nazýváme výraz $\frac{P(x)}{Q(x)}$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dané mnohočleny.
- **Rozkladem na parciální zlomky** rozumíme rozklad dané racionální lomené funkce na součet jednodušších (parciálních) zlomků.
- Nejprve **rozložíme jmenovatel** $Q(x)$ na součin kořenových činitelů, tedy na součin závorek, v nichž je vždy $(x - \text{kořen } Q)$, nebo nerozložitelný kvadratický dvojčlen či trojčlen.
- Při rozkladu $Q(x)$ mohou nastat tyto případy:

a) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, a žádný kořen se neopakuje (má násobnost jedna). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_k)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \dots + \frac{K}{x-x_k}$$

b) Všechny kořeny $Q(x)$, označíme je x_1, x_2 až x_k jsou reálná čísla, ale některý kořen, například x_1 se opakuje n -krát (říkáme, že má násobnost n). Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-x_1)^n \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_k)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_1)^n} + \frac{B}{x-x_2} + \dots + \frac{K}{(x-x_k)}$$

c) Jmenovatel obsahuje nerozložitelný kvadratický dvojčlen nebo trojčlen násobnosti jedna. Příkladem budiž například $x^2 + 1$ nebo $x^2 + 2x + 4$. Pak:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(ax^2 + bx + c) \cdot (x-x_1) \cdot \dots} = \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)} + \frac{C}{x-x_1} \dots$$

Příklad 6.3. Rozložte na parciální zlomky $\frac{7x-9}{x^2+x-6}$.

Příklad 6.4. Rozložte na parciální zlomky $\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}$.

Příklad 6.5. Rozložte na parciální zlomky $\frac{6x^3 + 21x^2 + 18x + 5}{(x+1)^3 x}$.



Odbočka: Jak dělíme mnohočlen mnohočlenem?

$$(3x^3 + 5x^2 + 5x + 2) : (x^2 + x + 1)$$

Pokud v racionální funkci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ je stupeň čitatele větší než jmenovatele, nejprve mnohočleny dělíme, teprve poté rozkládáme.

Příklad 6.5. Rozložte na parciální zlomky $\frac{3x^2 - 3x + 2}{x^3 + x}$