MATEMATIKA V EKONOMII – seminář č. 8 – Substituce v neurčitém integrálu, určitý integrál

SUBSTITUCE

Používáme následující substituce (přehled je značně zjednodušený!). Pokud integrál obsahuje:

i) $\sqrt[n]{x} \Rightarrow x = t^n$

ii) $e^x \Rightarrow e^x = t$

iii) $a^x \Rightarrow a^x = t$

iv) závorku jako vnitřní funkci $\Rightarrow$ závorka = t

v) $\cos^n x$ a $\sin^m x$: pokud jsou oba exponenty sudé, použijeme t = tg$x$. Pokud je jedno z čísel m, n liché a druhé sudé $\Rightarrow$ nahrazujeme pomocí t tu funkci, která má sudý exponent. Pokud jsou oba exponenty liché, nahradíme t funkci s vyšší mocninou. Při úpravách integrálu využíváme goniometrické vzorce. Obecně pak vždy funguje univerzální goniometrická substituce $tg\frac{x}{2} = t$

vi) $\frac{\ln^k x}{x} \Rightarrow t = \ln x$

....

1. Vypočtěte:

a) $\int (2x+1)^4\,dx$ b) $\int \sqrt{5x-2}\,dx$ c) $\int 4x\sqrt{x^2+1}\,dx$

d) $\int \frac{2}{(3x+4)^3}\,dx$ e) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$ f) $\int \cos x \sin^3 x\,dx$

g) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ h) $\int e^{4x+5}\,dx$ i) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

Výsledky: a) $\frac{(2x+1)^5}{10}+C$, b) $\frac{2(5x-2)^{3/2}}{15}+C$, c) $\frac{4\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3}+C$, d) $-\frac{1}{3(3x+4)^2}+C$, e) $\frac{\ln^3 x}{3}+C$, f) $\frac{\sin^4 x}{4}+C$, g) $\frac{\arcsin x}{2}+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$, h) $\frac{e^{4x+5}}{4}+C$, i) $\ln\left|e^x+1\right|+C$.

URČITÝ INTEGRÁL

Newtonův-Leibnizův vzorec: $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

1. Vypočtěte:

a) $\int_1^2 x^2 dx$ b) $\int_1^4 \left(2x^2+x-1\right)dx$ c) $\int_{-3}^3 \left(x^3-x\right)dx$

d) $\int_1^e \frac{2}{x}dx$ e) $\int_0^\pi \sin x\,dx$ f) $\int_2^7 \sqrt{x+2}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ h) $\displaystyle\int_1^5 |2-x|\,dx$

Výsledky:
a) 7/3, b) 93/2, c) 0, d) 2, e) 2, f) 38/3, g) 1, h) 5.