Teorie a modely Finanční časové řady Estimace parametrů modelu Lineární regrese Model oceňování kapitálových aktiv

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Finanční ekonometrie
Tutoriál 1

Ekonometrie

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Ekonometrie je vědní disciplína aplikující statistické nástroje a techniky v oblasti ekonomie.
- Propojuje v sobě a rozšiřuje zejména poznatky ekonomické teorie, matematické ekonomie, ekonomické statistiky a matematické statistiky.
- Ekonometrie je disciplína, která umožňuje popsat vztahy ekonomických veličin. Tato vědecká disciplína má ovšem širší poslání než jen hledat vztahy. Používá se i jako nástroj pro empirické ověřování již postulovaných ekonomických zákonitostí.
- **Podstatou ekonometrie je měřit a popisovat co nejlépe závislosti a vztahy mezi ekonomickými veličinami, popřípadě i jinými veličinami.**

Ekonometrický model

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- **Ekonomický model** – umožňuje a usnadňuje matematickou a statistickou formalizaci teoretických poznatků (dává do souvislosti ekonomické veličiny, jež jsou předmětem zájmu).
- **Ekonometrický model** – algebraicky vyjádřený konkrétní vztah mezi veličinami využívající matematický aparát.

Principy a cíle ekonometrického modelování

Základní kroky sestavování ekonometrického modelu:

- Kvantitativní analýza na základě ekonometrického modelu je vícestupňovou abstrakcí:
  - 1. Formulace a specifikace modelu
  - 2. Kvantifikace ekonometrického modelu
  - 3. Verifikace modelu
  - 4. Praktické využití ekonometrického modelu

1. Formulace modelu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

Specifikace ekonometrického modelu obsahuje:

- 1. Určení závisle a nezávisle proměnných, zahrnutých do zkoumání. V ekonometrii se rozdělují proměnné především na endogenní a exogenní.
  - Endogenní proměnné – jejich hodnoty jsou určeny, neboli generovány modelem.
    - Většina ekonomických proměnných je endogenního typu.
    - Endogenní proměnné mají zpravidla postavení vysvětlovaných proměnných, avšak v některých případech mohou v modelu vystupovat i jako vysvětlující proměnné.
  - Exogenní proměnné – jejich hodnoty nejsou modelem determinovány, ale jsou dány mimo modelovaný systém. Exogenní proměnné působí na zkoumaný systém, ale samy jím nejsou ovlivňovány.
    - Exogenní proměnné mají vždy charakter proměnných vysvětlujících.

1. Formulace modelu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- V dynamických ekonometrických modelech se vyskytují často **zpožděné vysvětlující proměnné.**
- V takových modelech se pak dělí proměnné na nezpožděné endogenní proměnné a na predeterminované proměnné – zahrnující jak všechny exogenní proměnné, tj. nezpožděné i zpožděné, tak zpožděné endogenní proměnné.
- Do modelu se zahrnují obvykle pouze nejdůležitější vysvětlující proměnné a vliv všech nepodstatných činitelů se zahrnuje spolu s působením náhodných faktorů do **náhodné složky** či proměnné, jejíž hodnoty nelze získat pozorováním.

1. Formulace modelu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- 2. Stanovení předpokládaných znamének a očekávaných hodnot parametrů modelu.
  - Znaménka jednotlivých parametrů se určují na základě teorie nebo se k tomu využívají informace získané z jiných kvantitativních analýz či studií.
  - Obdobně na základě teoretických závěrů nebo apriorních informací lze předem usuzovat i na očekávané hodnoty parametrů modelu.

1. Formulace modelu

- 3. Volbu typu a analytické formy modelu a jeho jednotlivých rovnic. V ekonometrické analýze používáme tyto základní typy modelů:
  - a) jednorovnicový model – má nejčastěji charakter stochastického regresního modelu, tj. vyjadřuje závislost jedné vysvětlované endogenní proměnné na jedné nebo na více vysvětlujících exogenních proměnných a na náhodné složce
  - b) vícerovnicový model – představovaný soustavou rovnic, přičemž každou z nich lze zkoumat buď odděleně jako zvláštní jednorovnicový model, a nebo všechny rovnice jako celek
  - c) simultánní model – tvořený soustavou simultánně závislých rovnic. Simultánní závislost spočívá v tom, že endogenní proměnné vystupují simultánně, tj. současně jak ve funkci vysvětlovaných, tak i vysvětlujících proměnných a jsou soustavou rovnic simultánně určeny.

2. Kvantifikace modelu

- Kvantifikace (odhad) ekonometrického modelu slouží k získání numerických hodnot jeho parametrů.
- = odhad parametrů vhodnou metodou

3. Verifikace modelu

- Verifikace ekonometrického modelu spočívá v ověření toho, zda odhadnuté parametry jsou teoreticky správné a současně i statisticky významné. Zda hodnota odhadnutých parametrů vůbec odpovídá ekonomické teorii.
- **Ekonomická verifikace modelu** – ověření teoreticky předpokládaných znamének a apriorních omezení numerických hodnot odhadnutých parametrů, tj. ekonomických konstant.
- **Statistická verifikace** – slouží k posouzení statistické významnosti odhadnutých parametrů i ekonometrického modelu jako celku. Je založena na statistických kritériích, neboli statistických testech (nazvaných testy prvního řádu).
- **Ekonometrická verifikace modelu** (testy druhého řádu) – používají se k ověřování splnění předpokladů potřebných k aplikaci konkrétních ekonometrických metod a technik. Spočívají tedy v testování statistických testů nebo pomocí ekonometrických kritérií se ověřuje platnost či oprávněnost použití statistických kritérií, zejména v případě malého rozsahu napozorovaných dat.

4. Způsoby využití modelu

- = aplikace modelu
- Numerické odhady parametrů modelu slouží převážně k analýze, tj. verifikaci výchozí ekonomické teorie, nebo k prognózování budoucích hodnot vysvětlovaných endogenních proměnných a k výběru hospodářské politiky pro potřeby optimálního řízení.

Typy dat

- **V rámci finanční ekonometrie lze klasifikovat analyzovaná data do tří skupin:**
- 1. Časová data
  - Data ve tvaru časových řad, tj. hodnoty určité veličiny pozorované v určitém časovém intervalu s určitou frekvencí záznamu.
  - Pro časová data je důležité jejich chronologické uspořádání v čase, které nelze přerovnávat. Data jsou seřazena podle času tak, jak byla získána.
  - Frekvencí pozorování se rozumí velikost intervalu mezi jednotlivými pozorováními (např. kalendářní měsíc), nebo pravidelnost s jakou je záznam pořizován (např. každý obchodní den).
  - Časové řady se mohou lišit podle toho, s jakou frekvencí je získáváme. Obvykle pracujeme s daty ročními (kdy hodnota příslušné proměnné je zaznamenávána pravidelně každý rok), s daty čtvrtletními (údaj získáváme čtyři krát do roka), s daty měsíčními a s daty denními.

Typy dat

- 2. Průřezová data (cross-section)
  - Data ve tvaru průřezového výběru, tj. hodnoty určité veličiny (nebo veličin) pozorované v tentýž časový okamžik přes určitý populační soubor.
  - Pro průřezová data není obvykle důležité jejich uspořádání (abecední, regionální atd.), takže je většinou lze libovolně přerovnávat.

- Další aspekt rozdělení typu dat:
  - kvantitativní data
  - kvalitativním datům – umělé (dummy, binární) proměnné

Typy dat

- 3. Panelová data
  - Kombinace časových a průřezových dat.

Typy dat - shrnutí

- Pozorování jednoho jevu pozorovaného přes několik časových obdobích – časová data.
- Pozorování mnoha jevů v jednom časovém okamžiku – průřezová data.
- Pozorování mnoha jevů po několik časových období – panelová data.

Finanční časové řady a jejich charakteristiky

- Finanční trh - viz Finance, Finanční trhy…
- Základní informací finančních trhů je cena (cena akcie, cena měny, cena dluhopisu…), ceny jsou sledovány v určité časové frekvenci a tvoří tak časové řady.
- Tyto časové řady, stejně i řady vycházející z cen nebo charakterizující ceny a jejich vývoj se označují jako finanční časové řady.
- Základní rys finančních časových řad je vysoká časová frekvence jednotlivých hodnot, nejčastěji jsou tyto hodnoty zaznamenávány v denní frekvenci.

Sběr a úprava dat

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Podstatou správně sestaveného ekonometrického modelu je správný výběr dat a jejich úprava.
- Nejprve je nutné definovat jaká data budeme potřebovat, v jaké frekvenci (denní, měsíční, kvartální, roční), v jaké měně budeme mít data, mezi úpravu dat patří také přepočet na shodné jednotky (tempa růstu apod.).

- Stažení a import dat

Deskriptivní statistika

- Slouží k základnímu popisu dat a zjednodušení komplexity získaných dat.
- Deskriptivní statistika se tedy snaží několika čísly a obrázky stručně vystihnout podstatné informace o daných datech.

Testování nulové hypotézy

- Zjednodušeně můžeme použít:
  - prob > 0,05 → nelze zamítnou nulovou hypotézu
  - prob < 0,05 → zamítáme nulovou hypotézu

Testování stacionarity

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

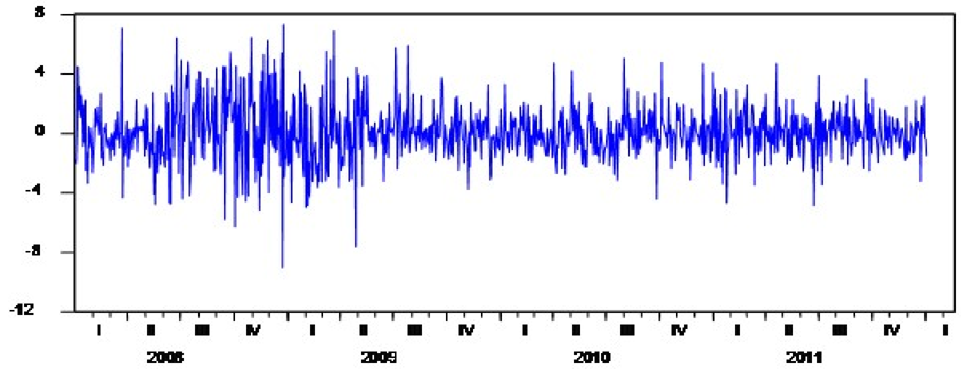
- Stacionarita časové řady znamená, že chování této řady je v jistém smyslu stochasticky ustálené.
- Stacionarita časové řady se testuje pomocí testu jednotkového kořene (unit root test).
- Stacionarita časové řady se dá vymezit tak, že chování této řady je v jistém smyslu stochasticky ustálené.
- Úroveň a rozptyl stacionární řady jsou konstantní v čase a také kovarianční struktura takové řady musí být v čase neměnná. Trend, sezónnost nebo proměnný rozptyl nejsou slučitelné se stacionaritou a tyto jevy musí být z řad odstraněné.

Testování stacionarity

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Testy stacionarity:
  - Existuje řada testů stacionarity časových řad.
  - Rozšířený (augmented) Dickeyův-Fullerův (ADF) test,
  - Phillipsův-Perronův test,
  - KPSS test.

Příklad nestacionární a stacionární časové řady



Převedení nestacionární časové řady na stacionární

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Logaritmování časové řady

- Diferencování časové řady

Estimace parametrů modelu

Estimace parametrů modelu

- Metoda nejmenších čtverců
- Metoda maximální věrohodnosti
- Momentová metoda
  - Zobecněná metoda momentů (GMM)

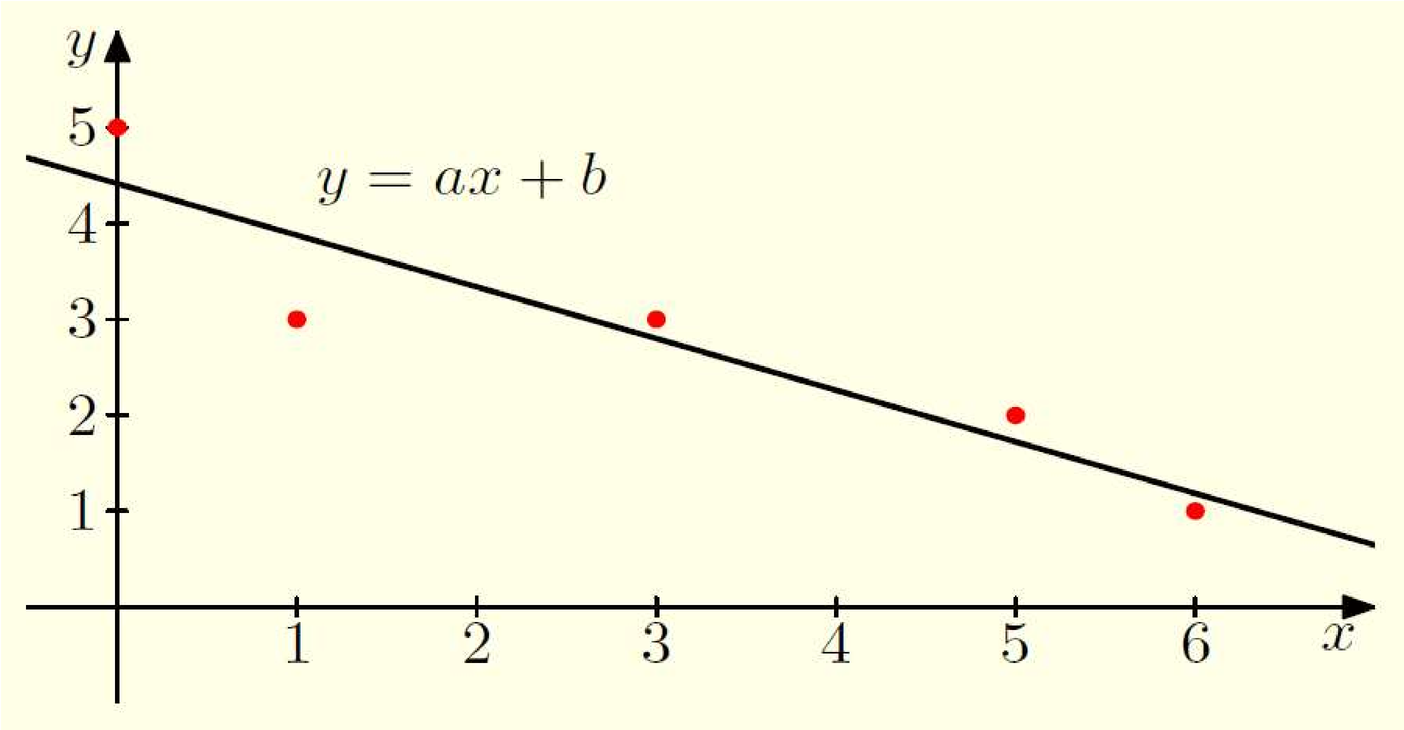
Metoda nejmenších čtverců

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Předpokládejme, že mezi veličinami x a y je lineární vztah ve tvaru y = ax + b.
- Měřením byly pro konkrétní hodnoty veličiny x naměřeny odpovídající hodnoty veličiny y a výsledek byl zanesen do grafu.
- Body však neleží na jedné přímce, protože měření je vždy zatíženo nějakou chybou a teorie navíc vždy nemusí odpovídat praxi stoprocentně.
- Máme tedy body v rovině, které leží přibližně v jedné přímce a chceme najít co nejpřesnější matematický model, tj. stanovit koeficienty a, b tak, aby přímka y=ax+b ležela co nejblíže bodům z měření.
- Snažíme se vystihnout chování bodu pomocí lineární závislosti. Přímka nebude pochopitelně procházet všemi body, chceme tedy alespoň, aby procházela co nejblíže okolo nich.
- Za optimální přímku považujeme tu, která minimalizuje součet ploch čtverců.

- Název metoda nejmenších čtverců (ordinary least squares, OLS) se vžil díky grafickému názoru, že totiž opravdu hledáme takovou přímku, pro kterou je součet ploch čtverců odchylek minimální.

Metoda nejmenších čtverců



Předpoklady metody nejmenších čtverců

- Metoda nejmenších čtverců (ordinary least squares, OLS) je základní a nejpoužívanější metodou odhadu parametrů lineárního regresního modelu.

- Při metodě nejmenších čtverců se požaduje, aby součet čtverců (druhých mocnin) rozdílů naměřených hodnot yi a funkce f(xi) byl co nejmenší.

- Odhady parametrů β jsou hledány v regresní rovnici tím, že vzhledem k těmto parametrům je minimalizován součet čtverců.

Předpoklady metody nejmenších čtverců

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Odvození vlastnosti odhadu OLS je možné jen v případě, že model splňuje určité předpoklady.
- Předpoklady charakterizující klasický model lineární regrese jsou často uváděny v následujícím tvaru:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2 < \infty$$

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \text{ pro } t \neq s$$

$$\mathrm{cov}(x_t, \varepsilon_t) = 0$$

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$$

Vlastnosti OLS

- Nestrannost: (Unbiased)

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$E(s^2) = \sigma^2$$

- Konzistence (Consistent)

$$\lim_{T\to\infty} P(\left|\hat{\beta}_i - \beta_i\right| \geq \delta) = 0$$

- Eficience odhadu, vydatnost (Efektivnost) (Efficiency)

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_i) \leq \operatorname{var}(\hat{\beta}_i)\ alternativní$$

- Asymptotické vlastnosti odhadu

Multikolinearita

- Silné závislosti mezi vysvětlujícími proměnnými, tedy vysoká vzájemná korelovanost regresorů.
- Lineární závislost sloupců regresní matice X.
- Příznakem multikolinearity je vysoká hodnota korelačního koeficientu mezi regresory.
- Pozor – korelovanost mezi vysvětlovanou proměnnou a regresorem se již v žádném případě za multikolinearitu nepovažuje.

Multikolinearita

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Vektory matice X musí být **skutečně navzájem nezávislé** (jejich párové R musí být nulové nebo statisticky nevýznamné). Pokud tomu tak není, dochází k **multikolinearitě**, která způsobuje početní i statistické problémy.

Příčiny multikolinearity

- tendence časových řad ekonomických ukazatelů (makroúdajů) vyvíjet se stejným směrem(např. HDP, C, I, S, Ex, Im)
- průřezová analýza
- zahrnutí zpožděných endo-nebo exogenních proměnných

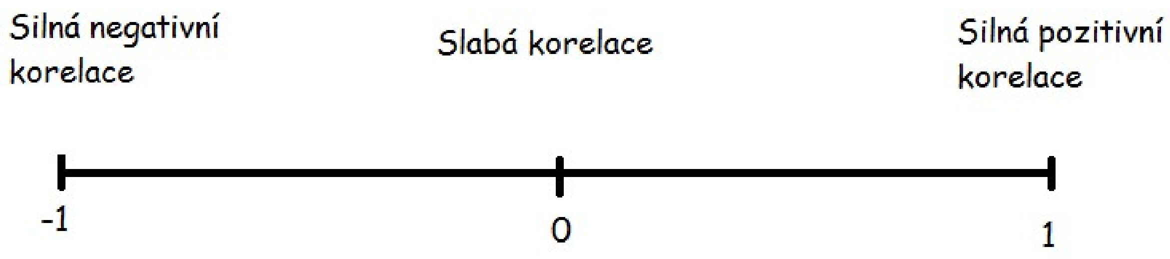
Důsledky multikolinearity

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Výskyt multikolinearity může mít velmi negativní vliv na standardní procedury v ekonometrických modelech:
- I když má odhadnutý model s multikolinearitou vyšší R2 (vypadá dobře jako celek), mohou být jednotlivé odhadnuté parametry nevýznamné se širokými intervaly spolehlivosti (vzhledem k jejich velkým směrodatným odchylkám).
- Při multikolinearitě často nelze spolehlivě oddělit vliv jednotlivých regresorů na vysvětlení závislé proměnné.
- Snížená přesnost odhadů jednotlivých regresních koeficientů.
- Model s multikolinearitou bývá citlivý již na malé změny v jeho specifikaci (např. přidání nebo odstranění vysvětlujících proměnných může vést k velkým změnám ve velikosti nebo významnosti původně odhadnutých parametrů).
- Pochybnosti či nejistota pokud jde o správnost specifikace modelu.

Měření multikolinearity

- Použití korelačního koeficientu



Postupy pro modely s multikolinearitou

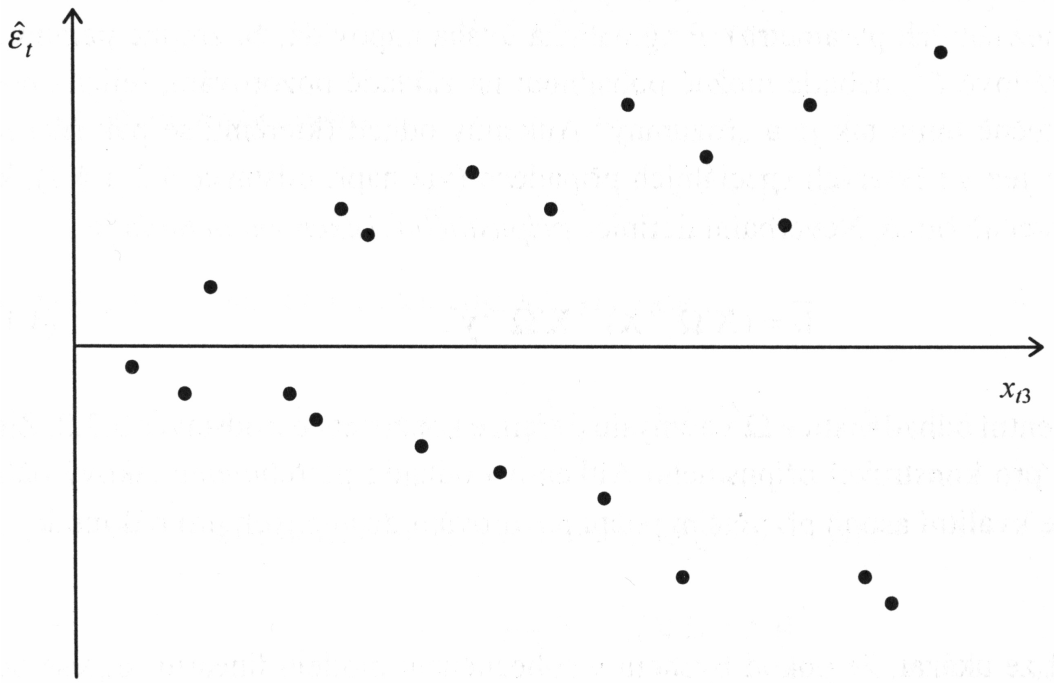
- Ignorování multikolinearity
- Vynechání vysvětlujících proměnných způsobujících multikolinearitu
- Transformace některých vysvětlujících proměnných
- Rozšíření datového souboru
- Použití apriorní informace
- Použití metody hlavních komponent

Homoskedasticita a heteroskedasticita

- Problém heteroskedasticity vzniká tehdy, pokud není splněn předpoklad, že rozptyl náhodných složek vektoru u, příp. i vektoru reziduí e, je konečný a konstantní.

- Jestliže reziduální složky nemají konstantní rozptyl (tj. jestliže množství náhodnosti obsažené ve výstupu může být pro každé pozorování různé), pak se označují jako heteroskedastické. Tedy reziduální složky nemají konstantní rozptyl s neznámými kladnými hodnotami a jsou vzájemně nekorelované.

Grafické znázornění heteroskedasticity



Testování heteroskedasticity

- Existuje řada formálních statistických testů heteroskedasticity, jedním z nejpoužívanějších je Whiteův test (White, 1980).
  - Nulová hypotéza pro White test: the variance of the disturbance term is constant (rozptyl náhodné složky je konstantní);
  - Alternativní hypotéza pro White test: the variance of the disturbance term is heteroskedastic of unknown form (rozptyl náhodné složky není konstantní a konečný, je heteroskedasticita).

Autokorelace reziduí

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- K porušení předpokladu nekorelovaných reziduí dochází často tak, že regresní model je kvantifikovaný pomocí dat ve tvaru časových řad a vykazuje tzv. autokorelovanost reziduí, kdy reziduální složka je korelovaná se svými zpožděnými a budoucími hodnotami.

- autokorelovanost – korelovanost se odehrává v rámci jedné časové řady.

Důvody autokorelovanosti

- V systematické části modelu chybí některé regresory, jejichž časové řady vykazují autokorelovanost a ta se přesune do reziduální složky.
- Mezi regresory se měly zařadit také zpožděné hodnoty vysvětlované nebo některých vysvětlujících proměnných (model má nedostatečně specifikovanou dynamiku).
- Funkcionální regresní vztah je nelineární místo použité lineární aproximace.

Testování autokorelace reziduí

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

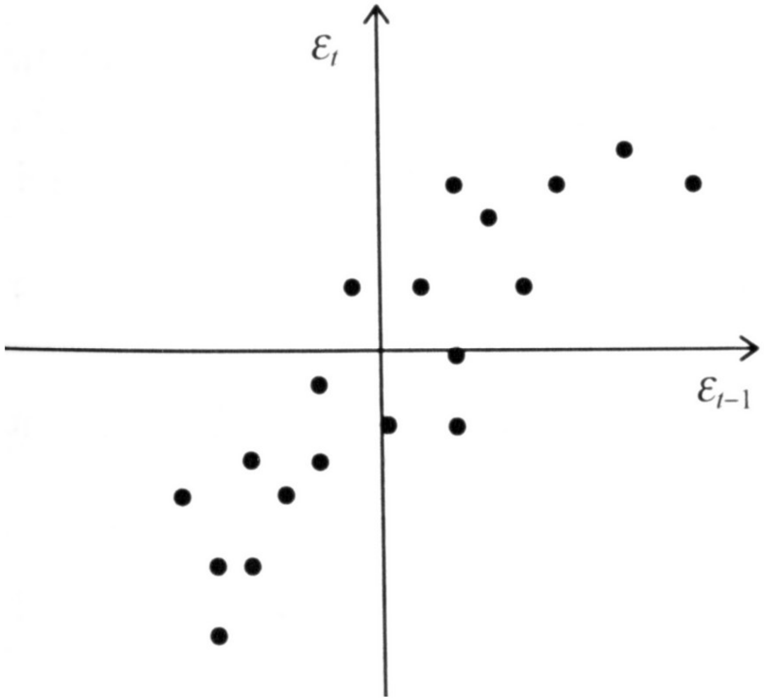
- K určení korelace reziduálů vytvořili Durbin a Watson (1950) jednoduchý test.
  - Durbinův-Watsonův (DW) test je testem autokorelace prvního řádu, tedy testují pouze vztah mezi reziduálem a jeho předchozí hodnotou.

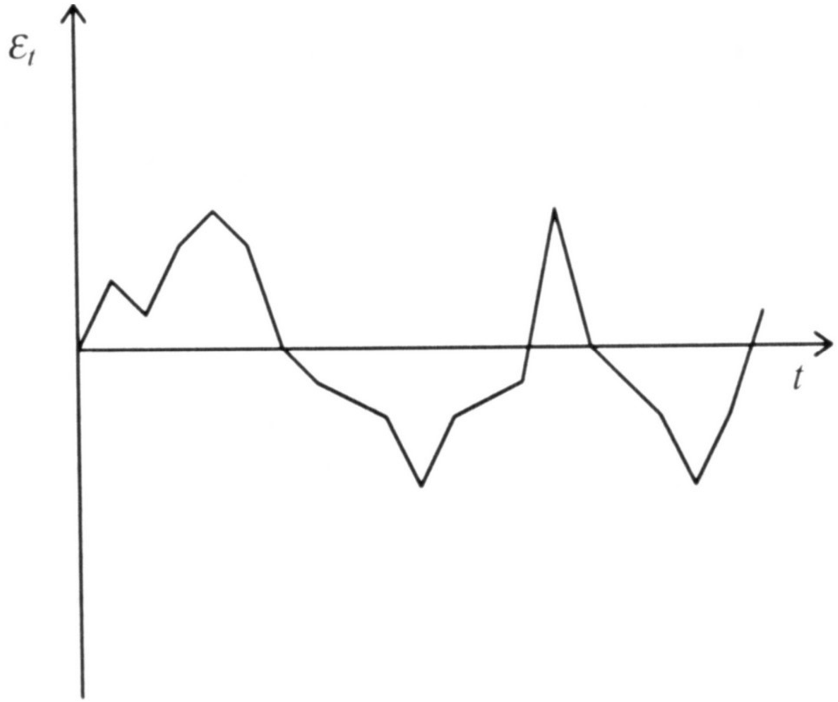
- Velmi zjednodušeně můžeme říci, že:
  - pokud je hodnota DW kolem 2, neexistuje autokorelace reziduí,
  - hodnota DW výrazně nižší než 2 ukazuje pozitivní autokorelaci,
  - hodnota DW výrazně vyšší než 2 značí negativní autokorelaci reziduí.

Testování autokorelace reziduí

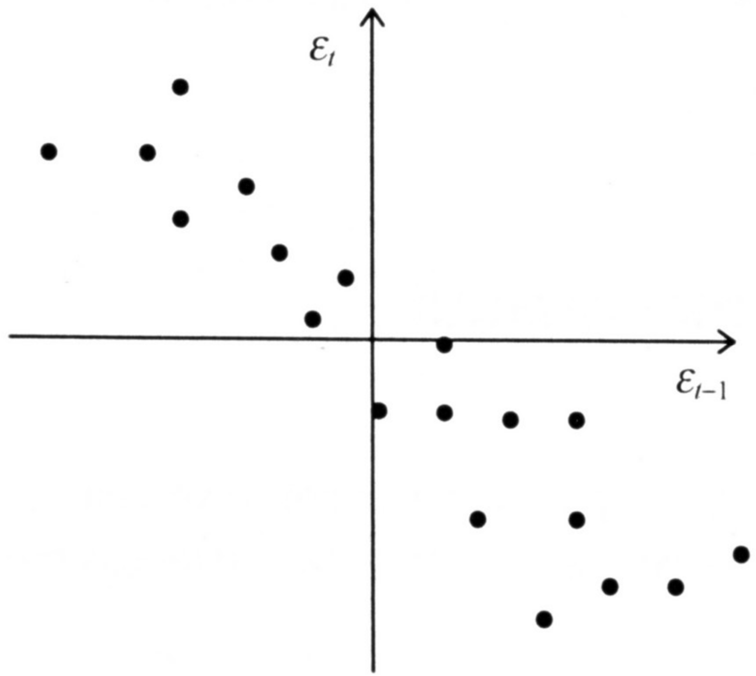
- Pro zjednodušení jsou znázorněny tři základní charakteristiky DW statistiky:
- a) neexistuje autokorelace reziduálů: $\rho = 0 \Rightarrow DW \approx 2$
- b) pozitivní autokorelace reziduálů: $\rho > 0 \Rightarrow DW < 2$
- c) negativní autokorelace reziduálů: $\rho < 0 \Rightarrow DW > 2$

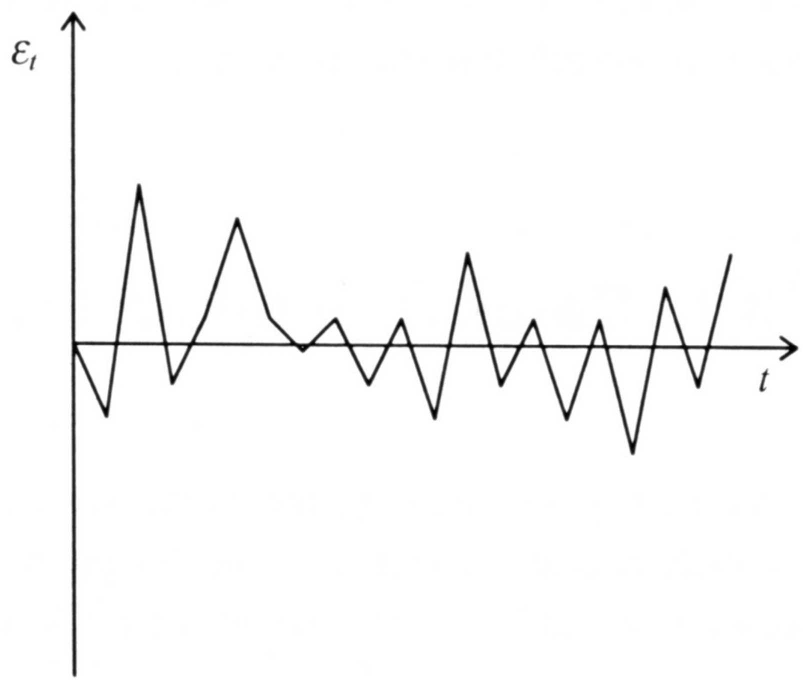
Pozitivní autokorelace





Negativní autokorelace





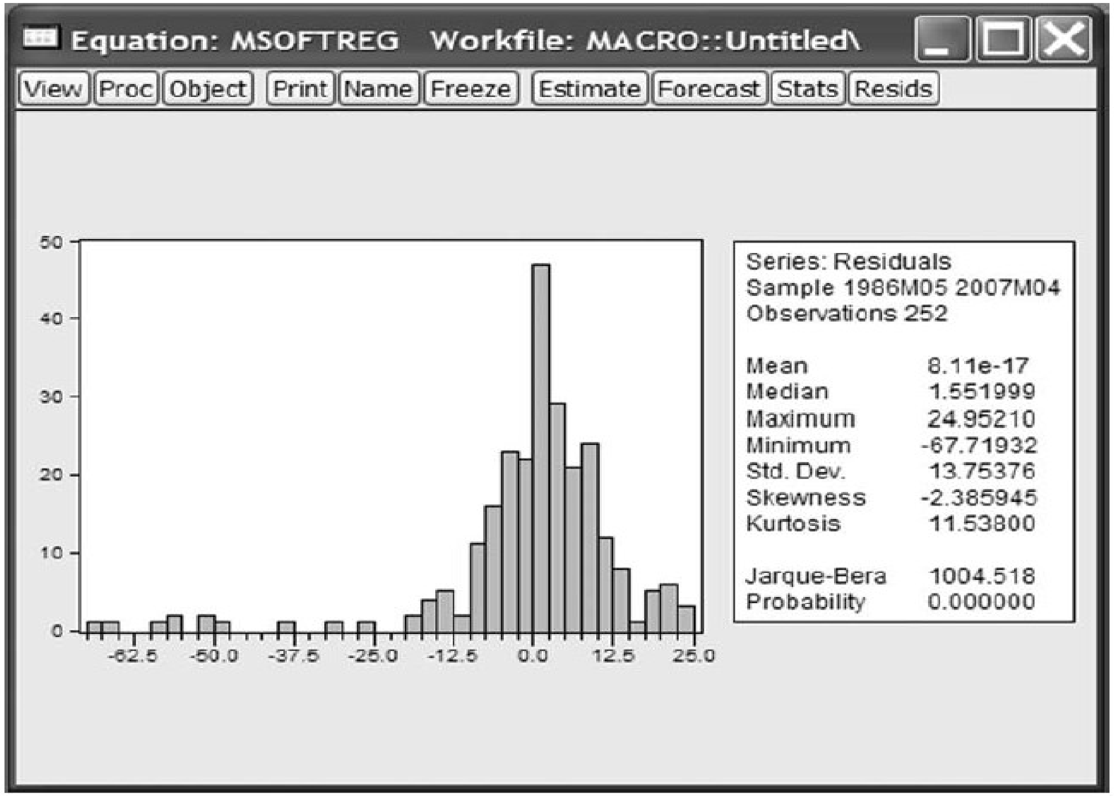
Autokorelace reziduí

- Důsledky autokorelovanosti reziduí:
  - Standardní OLS odhady směrodatných odchylek odhadnutých parametrů bývají podhodnoceny, což může vést v daném modelu k:
    - nesprávné prezentaci některých parametrů jako významných,
    - nafouknutí koeficientu determinace s odpovídajícími negativními důsledky (model může být neoprávněně přijat jako celek).

Normalita

- Reziduální složka má normální rozdělení s konstantní střední hodnotou a konstantním.
- Toto rozdělení je charakteristické tím, že je symetrické, takže:
  - šikmost (skewness) je rovna nule,
  - špičatost (kurtosis) je rovna číslu 3.
- Normalitu modelu lze statistiky testovat.
  - Jedním z často užívaných standardních testů je Jarque-Bera test.
  - Nulová hypotéza je: reziduály jsou rozděleny normálně.

Normalita


Equation: MSOFTREG Workfile: MACRO::Untitled\
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids
50
40
30
20
10
0
-62.5 -50.0 -37.5 -25.0 -12.5 0.0 12.5 25.0
Series: Residuals
Sample 1986M05 2007M04
Observations 252
Mean 8.11e-17
Median 1.551999
Maximum 24.95210
Minimum -67.71932
Std. Dev. 13.75376
Skewness -2.385945
Kurtosis 11.53800
Jarque-Bera 1004.518
Probability 0.000000

Metoda maximální věrohodnosti

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Maximum likelihood (ML)
- Metoda maximální věrohodnosti je statistická metoda pro odhad neznámého parametru na základě pozorovaných dat.

- Metoda maximální věrohodnosti je založená na tom, že odhady neznámých parametrů uvažované náhodné veličiny se vyberou tak, aby hodnoty hustoty v bodech náhodného výběru byli maximální.
- Tuto metodu lze používat ve velmi rozmanitých situacích a odhady získané tímto způsobem mají velmi dobré vlastnosti (např. odhad je asymptoticky nezkreslený).

Metoda maximální věrohodnosti

- ML odhady jsou za snadno splnitelných podmínek regularity konzistentní, asymptoticky normální a asymptoticky eficientní v tom smyslu, že jejich rozptyly se pro velké rozsahy T blíží dolním hranicím pro rozptyly odhadů daných parametrů.
- Výrazně eficientnější než OLS odhady bývají při nenormálním rozdělení reziduálních složek.
- Naopak ML mají určité nevýhody – především je nutné pracovat s konkrétním typem pravděpodobnostního rozdělení reziduálních složek modelu.

Nedostatky ML

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Základním problémem maximálního věrohodnostního odhadu je přesný a správný popis pravděpodobnostního modelu (pravděpodobnostní funkce). Je-li tento popis reálné situace nepřesný, pak jsou získané odhady nekonzistentní se získanými daty.
- Věrohodnostní funkce mohou být na základě zvoleného modelu a neznámých parametrů libovolně komplikované. Důsledkem jsou funkce, pro které nemusí existovat analytické řešení a při hledání maxima je pak nutné použít numerické metody.
- Přednosti maximálního věrohodnostního odhadu vycházejí z asymptotických vlastností. Pro nízké počty pozorování je tedy vhodnější použít jiné metody odhadu.

Využití ML

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Metoda maximální věrohodnosti má široké využití ve statistice, například
  - ve výpočtech při testování hypotéz
  - ve faktorové analýze

Momentová metoda

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Momentové odhady jsou založeny na teoretickém vyjádření momentů určitých veličin vyplývajících z odhadovaného modelu a závisejí na parametrech tohoto modelu.
- Poměrně jednoduchá metoda a používá se hlavně v případech, kdy jiné metody odhadu jsou numericky nebo z jiných důvodů těžko zvládnutelné.
- Odhady získané touto metodou se někdy kdy používají jako počáteční aproximace.
- Na druhé straně je zpravidla použitelná jen tehdy, když jsou výchozí náhodné veličiny nezávislé a stejně rozdělené.
- Pokud se však jedná a rozdělení, které nemají konečné momenty, tak se tato metoda nedá aplikovat.

Zobecněná metoda momentů

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Generalized method of moments (GMM)
- Pokud existuje více podmínek momentů, než odhadovaných parametrů, momentové rovnice nemohou být přesně řešeny. Tento případ se nazývá GMM (zobecněná metoda momentů).
- V GMM jsou podmínky momentů řešeny přibližně. Za tímto účelem jsou jednoduché podmínky rovnic váženy.
- GMM poskytuje jednoduchý výpočetní způsob získání konzistentních a asymptoticky normálních rozdělení odhadů parametrů statistických modelů.
- Tato metoda byla použita v mnoha oblastech ekonomie, ale pravděpodobně nejčastěji byla aplikována ve financích.
- GMM může být preferována před ML, protože nabízí způsob, jak odhadnout parametry pouze na základě informací odvozených od podkladového finančního modelu.
- Např. pro panelová data je výstup metody GMM je platný i za situace, že se jedná o krátké časové řady, avšak při splnění podmínky širokého průřezu v panelu
- Metoda GMM navíc zahrne jako vysvětlující proměnnou vliv proměnné, která byla v předchozím období jako vysvětlovaná proměnná.

Model lineární regrese

Lineární regresní model

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Regresní analýza je jedním z důležitých ekonometrických nástrojů a slouží pro kvantitativní popis vztahu mezi ekonomickými a finančními veličinami.
- Regresní analýza je statistická metoda pro modelování závislosti jedné vysvětlované veličiny Y (závisle proměnná) na jedné nebo několika vysvětlujících veličinách (nezávisle proměnné).
- Motivací regresní analýzy je snaha nepřímo působit na závisle proměnnou veličinu Y volbou nebo odhadem nezávisle proměnných X_i, $i = 1, \ldots, k$.
- Mezi závislou proměnnou a nezávislými proměnnými musí existovat matematicky popsatelný vztah, závislost vysvětlované proměnné Y na vysvětlujících proměnných .

Cíl regresní analýzy

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Úkolem regresní analýzy je změny hodnot jedné proměnné vysvětlit změnami hodnot jiných proměnných.
- Neboli úkolem je najít vhodný regresní model zobrazující tento vztah, matematicky formulovat závislost mezi proměnnými a provést predikci závisle proměnné veličiny na základě informací o nezávisle proměnných veličinách, to znamená najít nějakou funkci, která vhodně aproximuje závisle proměnnou Y.

Proměnné

- Vysvětlovaná proměnná se většinou značí y a vysvětlující proměnné x1, x2, …, xk (ve vícerovnicových ekonometrických model se často vysvětluje několik vysvětlovaných proměnných y1, y2, …, yk najednou).

- Vysvětlovaná proměnná – závisle proměnná, regresand, efekt (Y).
- Vysvětlující proměnné – nezávisle proměnné, regresory, příčiny (X).

Model

- V klasickém lineárním regresním modelu se předpokládá lineární vztah mezi nenáhodnými veličinami y, x1, x2, …, xk a součtový efekt náhodné složky ε.
- Regresní funkce má tedy tvar

$$Y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

- přičemž neznámé koeficienty βj, j = 1, …, k, lze zjednodušeně interpretovat jako průměrnou změnu hodnoty Y při růstu hodnoty proměnné xj o jednu jednotku za předpokladu, že hodnoty ostatních proměnných xi, i = 1, …, k, zůstanou nezměněné.

Model

- Provede-li se n-krát stejný experiment, dostane se soustava n lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \ldots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1 \\
Y_2 &= \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \ldots + \beta_k x_{2k} + \varepsilon_2 \\
&\vdots \\
Y_n &= \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \ldots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n .
\end{aligned}
$$

- Zapsáno maticově

$$
\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}
$$

Model

- Rovnice lineární regrese:
- $y_t = \alpha + \beta x_t + u_t$

- Typickým příkladem aplikace jednoduché regresní analýzy ve financích je CAPM model.

Příklad

- Určete vliv kurzu cen čtyř vybraných společností na vývoj kurzu indexu v období za posledních pět let.

- Postup:
  - Formulace modelu, určení vysvětlované proměnné a vysvětlujících proměnných.
  - Určení stacionarity dat – data musí být stacionární.
  - Odhadnutí parametrů metodou nejmenších čtverců.
  - Pro využití OLS je nutné otestovat všechny předpoklady.
  - Verifikace modelu.
  - Interpretace modelu.

Příklad

- Specifikace modelu:

$$DJI_t = \beta_0 + \beta_1 DIS_t + \beta_2 INTC_t + \beta_3 JNJ_t + \beta_4 NKE_t + \varepsilon_t$$

- kde:
  - DJI_t je Dow Jones Industrial Average
  - DIS_t je The Walt Disney Company
  - $INTC_t$ je Intel Corporation
  - JNJ_t je Johnson & Johnson
  - NKE_t je NIKE, Inc.

Model oceňování kapitálových aktiv

Vznik modelu oceňování kapitálových aktiv

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Model oceňování kapitálových aktiv (capital asset pricing model, CAPM)
- Jack Treynor (1961, 1962), William Sharpe (1964), John Lintner (1965a,b) a Jan Mossin (1966) publikovali nezávisle na sobě články o CAPM.
- Model navazuje na teorii portfolia Harryho Markowitze a volby portfolia J. Tobina.

Předpoklady modelu CAPM

- Model CAPM platí jen za předpokladu dodržení určitých (často nereálných) podmínek:
  - Investor investuje v jednom určitém časovém období.
  - Portfolio je hodnoceno podle očekávaného výnosu a rizika.
  - Platí předpoklad nenasycenosti.
  - Investor má odpor k riziku.
  - Jednotlivá aktiva je možno libovolně dělit.
  - Existuje bezrizikové aktivum s úrokovou sazbou rf.
  - Nebereme v úvahu daně, poplatky a další transakční náklady.
  - Investoři jsou si rovni.
  - Kapitálové trhy jsou efektivní.

Přímka kapitálového trhu

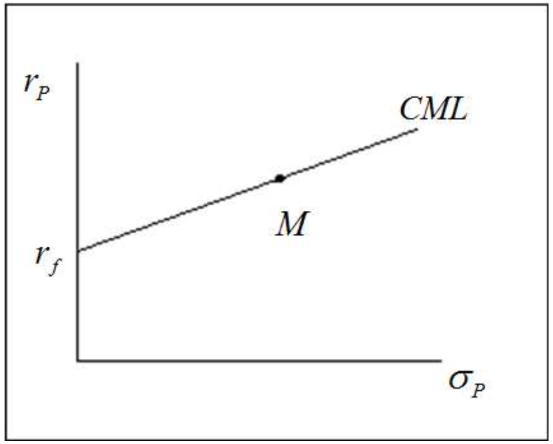
- Přímka kapitálového trhu (capital market line, CML), na níž leží všechna efektivní portfolia, vyjadřuje vztah mezi očekávanou výnosovou mírou portfolia a směrodatnou odchylkou výnosů efektivních portfolií.
- Přímka CML vzniká, když je tržní portfolio zkombinované s bezrizikovým aktivem.
- Znamená to, že všechny body na CML mají vyšší profil riziko-výnos než jakékoliv portfolio na efektivní hranici.

$$E(r_c) = r_f + \sigma_c \frac{(E(r_m) - r_f)}{\sigma_m},$$

- kde
  - E(rc) je očekávaná výnosová míra kombinace tržního portfolia a bezrizikového aktiva
  - rf je bezriziková výnosová míra, často braná jako výnosová míra státních pokladničních poukázek,
  - σc směrodatná odchylka kombinace tržního portfolia a bezrizikového aktiva
  - E(rm) očekávaná výnosová míra tržního portfolia
  - σm směrodatná odchylka tržního portfolia

Přímka kapitálového trhu

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



- Investoři si zvolí buď tržní portfolio M nebo kombinaci tržního portfolia M a půjčky či výpůjčky za bezrizikovou sazbu podle svých preferencí.
- Výše bezrizikové sazby odráží cenu času nebo-li cenu odložené spotřeby, sklon CML je cena za riziko.

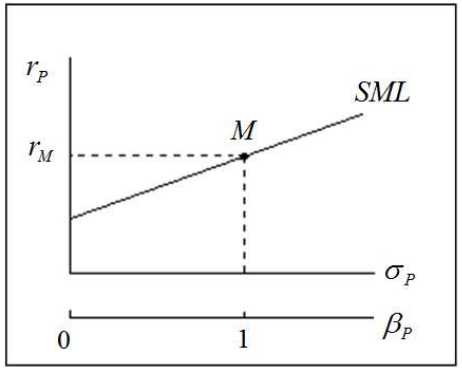
Přímka trhu cenných papírů

- Přímka trhu cenných papírů (security market line, SML) vyjadřuje vztah mezi očekávanou výnosovou mírou a kovariancí pro každé aktivum:

$$E(r_i) = r_f + \left(\frac{E(r_M) - r_f}{\sigma_M^2} \right) \sigma_{iM}$$

- SML je grafické zobrazení výsledků z modelu CAPM.

Přímka trhu cenných papírů



- Riziko (na ose x) je měřené pomocí β faktoru, zatímco na osu y se vynáší výnos.
- Sklon přímky CPM určuje riziková prémie.
- Místo, kde SML přetíná osu y představuje nulový β faktor a tedy určuje výšku bezrizikové míry výnosu.
- Výraz ($r\_i - r\_f$) označuje prémii za riziko, které je investor při dané investici ochoten podstoupit.
- Aktiva s vyšší kovariancí představují pro investora větší riziko a měly by mít tedy vyšší očekávanou výnosovou míru, aby byly pro investora zajímavé.

Přímka trhu cenných papírů

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Přímka SML je platná pro jednotlivé cenné papíry i portfolia, jež mohou být jak efektivní, tak i neefektivní, zatímco přímka CML je platná pouze pro efektivní portfolia.

Model CAPM

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Základní vztah modelu CAPM:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i \left(E(r_M) - r_f \right)$$

- kde
  - E(ri) je očekávaná výnosová míra,
  - rf je bezriziková výnosová míra,
  - β míra systematického riziko daného aktiva,
  - E(rm) představuje očekávanou výnosovou míru trhu.
- CAPM model ukazuje, že očekávaný výnos aktiva by se měl rovnat součtu bezrizikové sazby a rizikové prémie i-tého aktiva.

Koeficient β

- Koeficient β měří citlivost výnosové míry cenného papíru na změny tržní výnosové míry:
- je-li $\beta_i > 1$, jsou cenné papíry klasifikovány jako agresivní
  - výnosová míra i-tého aktiva stoupá rychleji než výnosová míra tržního portfolia (reagují na 1% nárůst očekávané výnosové míry tržního portfolia zvýšením svého dodatečného výnosu o více než 1%)
- je-li $\beta_i < 1$, jsou cenné papíry klasifikovány jako defenzivní
  - výnosy kolísají méně než trh
- je-li $\beta_i = 1$, jsou cenné papíry neutrální
  - výnosová míra i-tého aktiva se chová identicky jako výnosová míra tržního portfolia.

Koeficient α – míra nerovnováhy

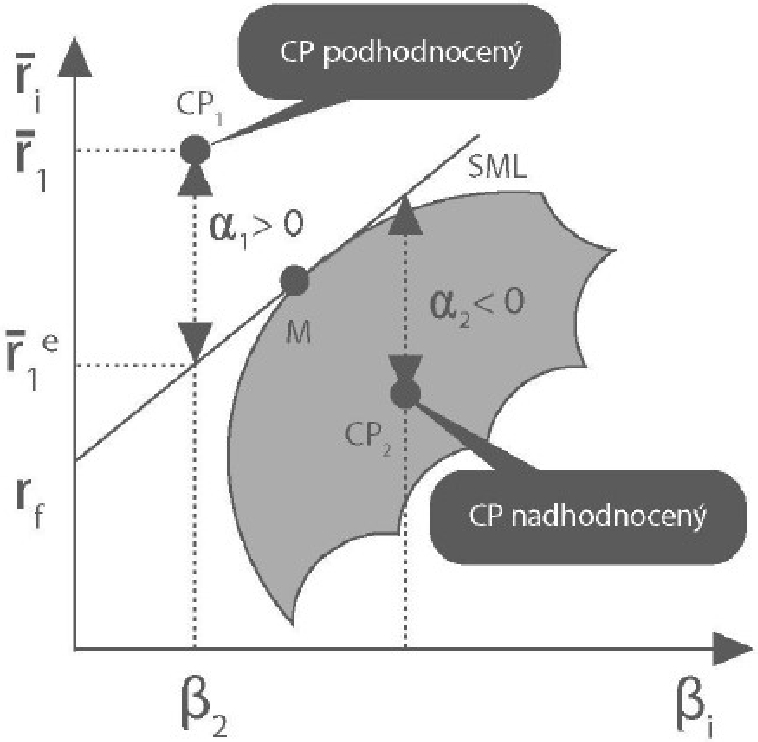
- Nesprávným ohodnocením cenných papírů může dojít ke dvěma případům:
  - cenný papír je podhodnocený (příliš levný), je-li jeho očekávaná výnosnost vyšší než příslušná očekávaná výnosnost cenných papírů se srovnatelnou betou
  - cenný papír je nadhodnocený (příliš drahý), je-li jeho očekávaná výnosnost nižší než příslušná očekávaná výnosnost cenných papírů se srovnatelnou betou

Koeficient α – míra nerovnováhy

- je-li $\alpha i > 0$, je podhodnocený cenný papír, leží nad SML a je výhodné jej nakupovat
- je-li $\alpha i < 0$, je nadhodnocený cenný papír, leží pod SML a je výhodné jej prodávat
- je-li $\alpha i = 0$, je správně ohodnocený, cenný papír leží na přímce SML

Koeficient α – míra nerovnováhy

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ



Koeficient α – míra nerovnováhy

- Příliš zjednodušující předpoklady (zejména o neexistenci dokonalého kapitálového trhu, určení bezrizikové sazby, existenci daní a transakčních nákladů, všichni investoři nemají stejná očekávání ohledně rizika a výnosové míry, všichni investoři nemají averzi k riziku, atd.)
- Způsob měření rizika - riziko se měří pomocí rozptylu, tento způsob pro rozdělení jiné než normální neplatí. (Riziko ve finančních investicích by se nemělo vyjadřovat pomocí rozptylu. Rozptyl totiž v tomto případě vyjadřuje pravděpodobnost ztráty.)
- Předpokládá, že investor zná statistické rozdělení předpokládaných výnosů z aktiva (ve skutečnosti jsou odhady investora statisticky vychýlené, a proto jsou tržní ceny aktiv informačně neefektivní).
- Model adekvátně nevysvětluje rozptyl ve výnosech z aktiv.
- Model se zaměřuje na výkon jednoho období, a proto nepředpokládá opakované převrstvování portfolia.
- CAPM předpokládá, že každý investor zvážil všechny možnosti a optimalizuje právě jedno portfolio.

Empirická aplikace CAPM modelu

- Hlavním vztahem modelu CAPM je rovnice $E(r_i) = r_f + \beta_i (E(r_M) - r_f)$, která ukazuje, že očekávaný výnos aktiva by se měl rovnat součtu bezrizikové sazby a rizikové prémie.
- Model CAPM je však formulován ex ante (tzn. pro očekávané hodnoty), kdežto jeho odhad lze provést pouze ex post (tzn. na již získaných datech).
- Proto je třeba rovnici upravit tak, aby bylo možné model empiricky odhadnout:

$$R_i - R_f = a_i + \beta_i (R_M - R_f)$$

- kde:
  - R_i značí výnosovou míru i-tého aktiva,
  - R_f je bezriziková výnosová míra a platí ,
  - R_M označuje tržní výnosovou míra,
  - α_i je náhodná proměnná.

Praktický příklad

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

- Odhad CAPM modelu pomocí metody nejmenších čtverců

- Zjistěte, zda je odvětví financí indexu ES50 více či méně rizikové než trh a dále, zda je toto odvětví nadhodnoceno či podhodnoceno.

- Data:
  - Akciový index ES50
  - Odvětví financí v daném indexu
  - Bezriziková úroková míra – jednoměsíční EBOR

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den ☺