

MATEMATIKA V EKONOMII – PŘEDNÁŠKA Č. 5:
(Tečná rovina, totální diferenciál, lokální a vázané extrémny funkce
dvou proměnných)

- **Tečná rovina a normála:** Necht' má funkce $z = f(x, y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ obě parciální derivace. Pak rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $C[x_0, y_0, z_0]$ má tvar:

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(C) \cdot (y - y_0)$$

Normálový vektor (vektor kolmý k tečné rovině):

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(C), \frac{\partial f}{\partial y}(C), -1 \right)$$

A **normála** (v parametrickém tvaru):

$$x = x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(C) \cdot t$$

$$y = y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(C) \cdot t, \quad t \in R$$

$$z = z_0 - t$$

Příklad. Je dána funkce $f(x, y) = x^3 + xy + 2y$.

- a) Najděte rovnici tečné roviny ke grafu této funkce v bodě $C [2,1,?]$.
- b) Určete normálu k této rovině v daném bodě.

- **Totální diferenciál** funkce dvou proměnných: Totálním diferenciálem (prvního řádu) funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v bodě $C = [c_1, c_2, c_3]$ nazýváme výraz:

$$df(C) = \frac{\partial f}{\partial x}(C)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(C)dy,$$

pokud obě parciální derivace v bodě C existují.

Stejně jako u funkce jedné proměnné vyjadřuje totální diferenciál dvou proměnných (přibližně) přírůstek funkce $f(x, y)$ spojený s malým přírůstkem proměnné x (první člen na pravé straně) a proměnné y (druhý člen na pravé straně).

Příklad 4.14. Je dána funkce $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y$, bod $C [1, 1, 9]$ a $dx = 0,1$, $dy = 0,2$. Určete:

- a) totální diferenciál funkce,
- b) přírůstek funkce v bodě C pro dané hodnoty dx a dy .

Totálním diferenciálem druhého řádu nazýváme výraz:

$$d^2 f(C, dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)d^2x + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(C)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(C)d^2y$$

Totální diferenciál druhého řádu vyjadřuje (přibližně) „přírůstek přírůstku“ funkce. Lze jej využít k hledání maxima a minima funkce dvou (a více) proměnných, viz Kapitola 5.

- **Lokální extrémů funkce:** Má-li funkce dvou proměnných $f(x, y)$ v jistém bodě (x, y) maximum nebo minimum, a existují obě parciální derivace, pak platí: $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$.

Tato podmínka však není postačující, neboť v daném bodě může být i inflexní (sedlový) bod.

- **Existenci** maxima (minima) funkce při splnění určitých podmínek zaručuje následující věta:

Věta 5.1 (Weierstrassova). *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na uzavřené a omezené oblasti $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak funkce $f(x, y)$ nabývá na oblasti M (globálního) maxima i minima.*

Poznámka: Funkce může mít extrémů i v bodech, v nichž některá první parciální derivace neexistuje. Takové body se musí vyšetřit zvlášť a v dalším výkladu se jimi nebudeme zabývat.

- Bod, v němž má funkce všechny první derivace nulové, se nazývá **stacionární bod** nebo též **bod podezřelý z extrému**, a bude značen C .

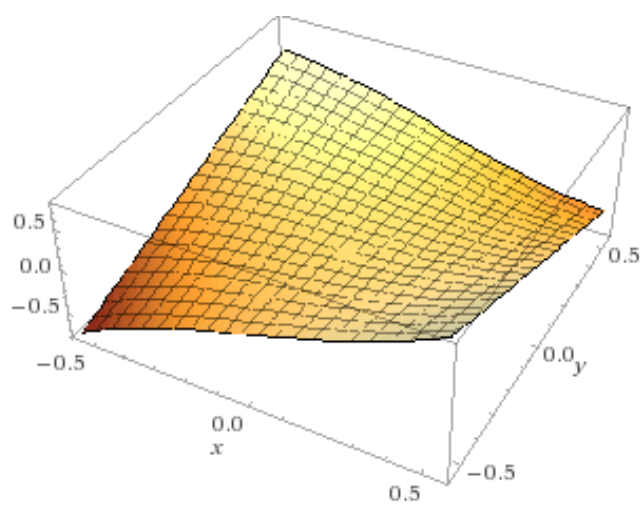
- O tom, která alternativa nastává, rozhodneme na základě druhých parciálních derivací, z nichž sestavíme **Hesseovu** matici a její determinant zvaný **hessián**:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

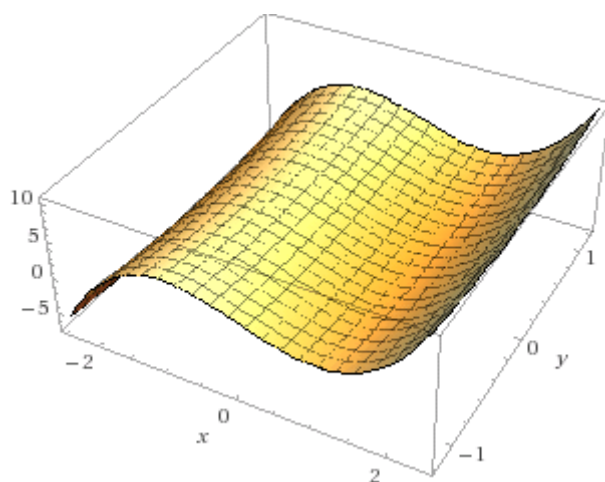
Do hessiánu dosadíme souřadnice bodu C a označíme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$ a $D_2 = H_f(C)$. D_2 je determinant Hesseovy matice. Pro určení extrému pak platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je **EXTRÉM**, a to (lokální ostré) **MINIMUM**, pokud je $D_1 > 0$; a (lokální ostré) **MAXIMUM**, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 < 0$: v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$: v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem, například pomocí totálního diferenciálu druhého či vyššího řádu.

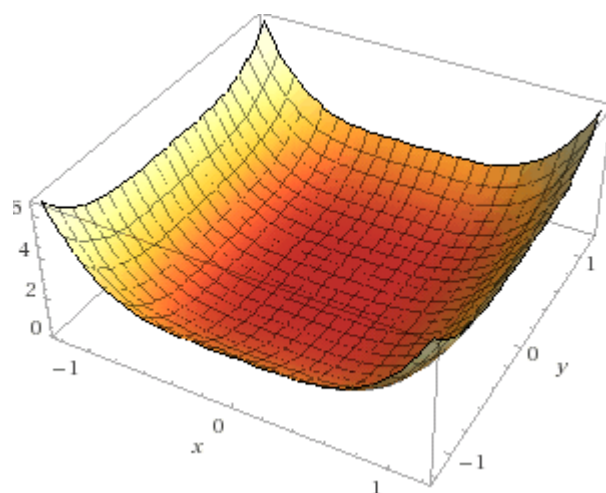
Příklad 5.1. Určete lokální extrémů funkce: $f(x, y) = x^3 - 2xy$



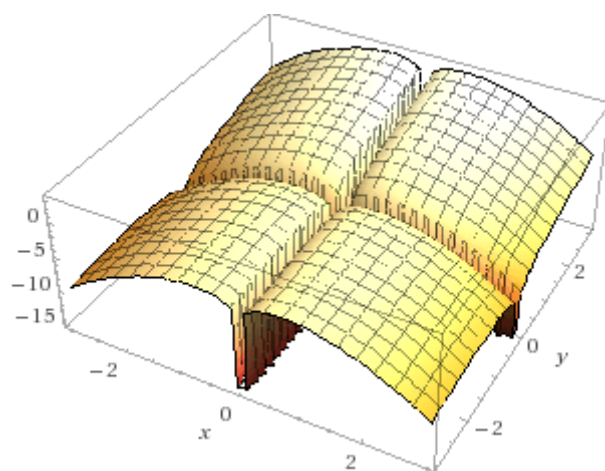
Příklad. Určete lokální extrémů funkce: $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2 + 1$



Příklad 5.3. Určete lokální extrémů funkce: $f(x, y) = 2x^4 + y^4$.



Příklad 5.4. Určete lokální extrémů funkce: $f(x, y) = \ln(xy) - x^2 + y$.



- **Vázané extrémny:** kromě funkce $f(x, y)$ je ještě zadána **vazba** (omezující podmínka pro x a y) ve tvaru $g(x, y) = 0$. Hledáme extrémny funkce $f(x, y)$, které jsou vázány (leží na ní) křivkou $g(x, y) = 0$.

Budeme používat dvě metody:

- a) **Dosazovací metoda:** z vazby $g(x, y) = 0$ vyjádříme x nebo y a dosadíme do $f(x, y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémny tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné. Tuto metodu použijeme v případě, že z rovnice vazby lze osamostatnit x nebo y .
- b) **Lagrangeova metoda neurčitých koeficientů:** sestavíme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Poté vypočteme parciální derivace L a položíme je rovny 0. Jako třetí rovnici pro tři neznámé x, y, λ použijeme rovnici vazby. Vyřešíme soustavu a výsledné „podezřelé“ body C dosadíme do hessiánu, pomocí kterého rozhodneme, zda se jedná o maximum, minimum nebo inflexní bod.

Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je **EXTRÉM**, a to (lokální ostré) **MINIMUM**, pokud je navíc $D_1 > 0$; a (lokální ostré) **MAXIMUM**, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 \leq 0$: o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

U Lagrangeovy metody můžeme o charakteru kritického bodu C rozhodnout i bez hessiánu, pokud jsou splněny podmínky Věty 5.1, tedy pokud je funkce definovaná na omezené a uzavřené oblasti: spočteme hodnotu všech kritických bodů, a bod s největší (nejmenší) hodnotou bude vázaným maximem (minimem) dané funkce. Omezenou a uzavřenou oblastí může být například kružnice, elipsa, úsečka, apod.

Příklad 5.6. Určete vázané extrémů funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$,
 $g(x, y) : x - y + 1 = 0$.

Příklad 5.7. Určete vázané extrémů funkce $f(x, y) = x + y + 3$,
 $g(x, y): x^2 + y^2 - 2 = 0$.

MAXIMALIZACE PŘÍJMU

Příklad 5.9. Firma vyrábí dva druhy zboží, jejich množství označme Q_1 a Q_2 . Příjem firmy je dán funkcí $TR(Q_1, Q_2) = 50Q_1 + 20Q_2 - 2Q_1^2 - 5Q_2^2$. Najděte maximum příjmu.

MINIMALIZACE NÁKLADŮ

Příklad 5.13. Jsou dány celkové náklady: $TC(x, y) = 100 - 32x - 30y + x^4 + 3y^2$.
Najděte minimum nákladů.