Extrémy a vázané extrémy funkce dvou proměnných

EXTRÉMY FUNKCE

Nutná podmínka lokálního (i globálního) extrému: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Funkce může mít extrémy jen v bodech, kde jsou všechny první parciální derivace rovny nule (*stacionární body*) nebo některé derivace neexistují. O maximu, minimu nebo inflexním bodu rozhodneme podle 2. parciálních derivací, z nichž sestavíme Hesseovu matici (resp. determinant zvaný *hessián*):

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Do hessiánu dosadíme souřadnice „podezřelého“ bodu C a označíme: $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(C)$, $D_2 = H_f(C)$. Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je $D_1 > 0$; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 < 0$: v bodě C je sedlo (inflexní bod).
- $D_2 = 0$: v daném bodě může (ale nemusí) být extrém, o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

1. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = x^2 - 2xy + y$.

2. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x + 2y$.

3. Najděte lokální extrémy funkce: $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8$.

4. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = x^3 - xy + y$.

5. Najděte lokální extrémy funkce: $f(x, y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

6. Určete lokální extrémy funkce: $f(x, y) = y - \frac{x^3}{3} + \ln(x - y)$.

Výsledky

1: bod C = [1/2,1/2] je inflexní bod.
2: bod C = [4/3,-5/3] je minimum.
3: bod C = [3,0] je minimum.
4: bod C = [1,3] je inflexní bod.
5: bod C = [0,0] je maximum.
6: bod C_1 = [1,0] je maximum a bod C_2 = [-1,-2] je inflexní bod.

VÁZANÉ EXTRÉMY

Kromě funkce $f(x,y)$ je ještě zadána *vazba* (omezující podmínka pro *x* a *y*) ve tvaru $g(x,y)=0$. Hledáme extrémy funkce $f(x,y)$, které jsou vázány (leží na) křivkou $g(x,y)=0$.

Budeme používat dvě metody:

a) *Dosazovací metoda*: z vazby $g(x,y)=0$ vyjádříme x nebo y a dosadíme do $f(x,y)$, čímž získáme funkci jedné proměnné, a extrémy tedy hledáme podobně jako u funkce jedné proměnné.

b) *Lagrangeova metoda*: sestavíme Lagrangeovu funkci $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$, kde λ je Lagrangeův multiplikátor. Poté vypočteme parciální derivace L a položíme je rovny 0. Jako třetí rovnici pro tři neznámé x, y, λ použijeme rovnici vazby. Vyřešíme soustavu a výsledné „podezřelé“ body C dosadíme do hessiánu.

Pro určení extrému platí následující pravidlo:

- $D_2 > 0$: v bodě C je EXTRÉM, a to (lokální ostré) MINIMUM, pokud je navíc $D_1 > 0$; a (lokální ostré) MAXIMUM, pokud je $D_1 < 0$.
- $D_2 \leq 0$: o extrému se musí rozhodnout jiným způsobem.

1. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y): x+y+2=0$.

2. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y)=2x+y-1$, $g(x,y): x^2+y^2-4=0$

3. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y)=xy$, $g(x,y): x+y+2=0$.

Výsledky

1: bod $C_1 = [-1,-1]$ je minimum.

2: maximum $\left[\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$, minimum $\left[-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right]$.

3: bod $C_1 = [-1,-1]$ je maximum.

V praxi reprezentuje vazbová podmínka **rozpočtová omezení**. Například investor, který chce maximalizovat zisk investicí do dvou produktů x a y, může mít rozpočtové omezení ve tvaru Y = ax + by, kde *a* a *b* jsou ceny produktu x respektive y, a Y je rozpočet investora.