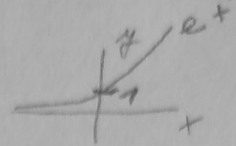
Určete průběh funkce $y=\frac{x^2}{e^x}$

1. definiční obor

$e^x \neq 0$ ... graf fce e^x



e^x nikdy není 0 nebo záporné, proto je podmínka $e^x \neq 0$ splněna vždy a definiční obor fce $y=\frac{x^2}{e^x}$ není nijak omezen

$D(f)=R$

sudost: $\boxed{f(-x)=f(x)}$

$f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ (naše funkce)

$f(-x)=\frac{(-x)^2}{e^{-x}}=\frac{x^2}{e^{-x}}$ ... $f(-x)\neq f(x)$

fce není sudá

lichost: $\boxed{f(-x)=-f(x)}$

$f(-x)=\frac{x^2}{e^{-x}}$

$-f(x)=-\frac{x^2}{e^x}$ ... $f(-x)\neq -f(x)$

fce není lichá

periodičnost: fce není periodická

(periodické jsou pouze goniometrické funkce)

2. limity

• $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{\infty}{\infty}$ => L'Hospitalovo pravidlo

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

pravá část grafu bude „přilepená" k ose x

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = \dfrac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}} = (-\infty)^2 \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \infty$

levá část grafu míří nekonečně vysoko

POZN.: $\dfrac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3}$, $\dfrac{3}{x^{-4}} = 3 \cdot x^4$

3. průsečíky s osami

$P_x[\dots;0]$ $\quad P_y[0;\dots]$

$y=0 \dots \dfrac{x^2}{e^x} = 0 \quad / \cdot e^x$

$x^2 = 0 \quad / \sqrt{\ }$

$x = 0$

$P_x[0;0] = P_y$

• existuje nejvýše 1 průsečík s osou y, ale pokud to nevíme, počítáme:

$x=0 \dots y = \dfrac{0^2}{e^0} = \dfrac{0}{1} = 0$ $\quad P_y[0;0]$

znaménka funkčních hodnot

$-\infty$ ——— 0 ——— ∞

$+$ $\quad +$

např. $x=-2$:

$\dfrac{(-2)^2}{e^{-2}} = \dfrac{4}{e^{-2}} = \dfrac{+}{+} = +$

např. $x=2$:

$\dfrac{2^2}{e^2} = \dfrac{4}{e^2} = \dfrac{+}{+} = +$

má bod $[0;0]$

fce je nezáporná na celém def. oboru

4. první derivace a její nulové body

$$y' = \left(\frac{x^2}{e^x}\right)' = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(2x - x^2)}{\cancel{e^x} \cdot e^x} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

$$\frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \qquad / \cdot e^x$$

$$2x - x^2 = 0$$

$$x(2 - x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{x_1 = 0} \\ \boxed{x_2 = 2} \end{array}\right\} \text{nulové body 1. derivace}$$

5. lokální extrémy a intervaly monotónnosti

znaménka 1. derivace:

$-\infty \quad 0 \quad 2 \quad \infty$

$- \searrow \quad + \nearrow \quad - \searrow$

např. $x = -2$

$$\frac{2x - x^2}{e^x} = \frac{2(-2) - (-2)^2}{e^{-2}} = \frac{-4 - 4}{e^{-2}} = \frac{-8}{e^{-2}} = \frac{-}{+} = -$$

např. $x = 1$

$$\frac{2 \cdot 1 - 1^2}{e^1} = \frac{2 - 1}{e} = \frac{1}{e} = \frac{+}{+} = +$$

např. $x = 3$

$$\frac{2 \cdot 3 - 3^2}{e^3} = \frac{6 - 9}{e^3} = \frac{-}{+} = -$$

intervaly monotónnosti: klesající pro $x \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$

rostoucí $x \in (0; 2)$

minimum: $[0; 0]$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$ (víme z kroku č. 3)

maximum $[2; 0{,}54]$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \doteq 0{,}54$$

6. druhá derivace a její nulové body

$$y'' = \left(\frac{2x-x^2}{e^x}\right)' = \frac{(2-2x)e^x-(2x-x^2)\cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\cancel{e^x}(2-2x-2x+x^2)}{\cancel{e^x}\cdot e^x} =$$

$$= \frac{x^2-4x+2}{e^x}$$

$$\frac{x^2-4x+2}{e^x} = 0 \quad /\cdot e^x$$

$$x^2-4x+2=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a} = \frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{4\pm2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases}\boxed{2+\sqrt{2}} \doteq 3{,}41\\ \boxed{2-\sqrt{2}} \doteq 0{,}59\end{cases}$$

7. inflexní body, konvexnost, konkávnost

$\cup$ $\cap$

znaménka 2. derivace:

$-\infty$		$2-\sqrt{2}$ (0,59)		$2+\sqrt{2}$ (3,41)		∞
	+		−		+	
	$\cup$		$\cap$		$\cup$	

např. $x=0$:

$$\frac{0^2-4\cdot0+2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2 = +$$

např. $x=2$

$$\frac{2^2-4\cdot2+2}{e^2} = \frac{4-8+2}{e^2} = \frac{-}{+} = -$$

např. $x=4$

$$\frac{4^2-4\cdot4+2}{e^4} = \frac{16-16+2}{e^4} = \frac{+}{+} = +$$

konvexní pro $x\in(-\infty;\ 2-\sqrt{2})\cup(2+\sqrt{2};\ \infty)$

konkávní $x\in(2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$

inflexní body

$I_1\ [0{,}59;\ 0{,}19]$… $x=0{,}59 \Rightarrow y = \frac{0{,}59^2}{e^{0{,}59}} \doteq 0{,}19$

$I_2\ [3{,}41;\ 0{,}38]$… $x=3{,}41 \Rightarrow y = \frac{3{,}41^2}{e^{3{,}41}} \doteq 0{,}38$

8. asymptoty

svislá není

šikmá: $y = ax + b$

L'Hospitalovo pravidlo

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \left[\frac{\frac{x^2}{e^x}}{\frac{x}{1}} = \frac{x^2}{e^x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{e^x} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

víme z kroku č. 2

$$b = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - a \cdot x \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} - 0 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \underline{\underline{0}}$$

šikmá asymptota: $y = 0$ ... tj: osa x

9. obor hodnot

$H(f) = R_0^+ = \langle 0; \infty)$ ... víme z kroku č. 3

10. graf