



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Expertní systémy

Algebraická teorie neurčitosti

Jan Górecki



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Neurčitost v systému NEST



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- vychází se systému SAK
 - práce s neurčitostí v systému SAK vychází z Hájkovy algebraické teorie
 - jsou tedy definovány kombinační funkce NEG, CONJ, CTR a GLOB
 - Systém SAK umožňuje volit uživateli mezi dvěma sémantikami inferenčního mechanismu (dvěma “sadami” kombinačních funkcí):
 1. standardním
 2. logickým
-

Kombinační funkce v systému SAK



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- $NEG(w)$ – váha negace výroku
 - $CONJ(w_1, w_2)$ - váha konjunkce výroků v předpokladu pravidla
 - $CTR(a, w)$ - příspěvek váhy předpokladu k váze závěru pravidla
 - $GLOB(w_1, w_2)$ - kombinování vah pravidel se stejným závěrem
-

Neurčitost v systému NEST



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- NEST (Next Expert SysTem) je rozšířením SAK
 - Toto rozšíření zahrnuje:
 - doplnění kombinačních funkcí o výpočet váhy disjunkce,
 - doplnění neuronové sémantiky kombinačních funkcí,
 - přechod od bodových vah k intervalům.
-

Standardní mechanismus



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- založen na PROSPECTORovském a MYCINovském přístupu
-

Logický mechanismus



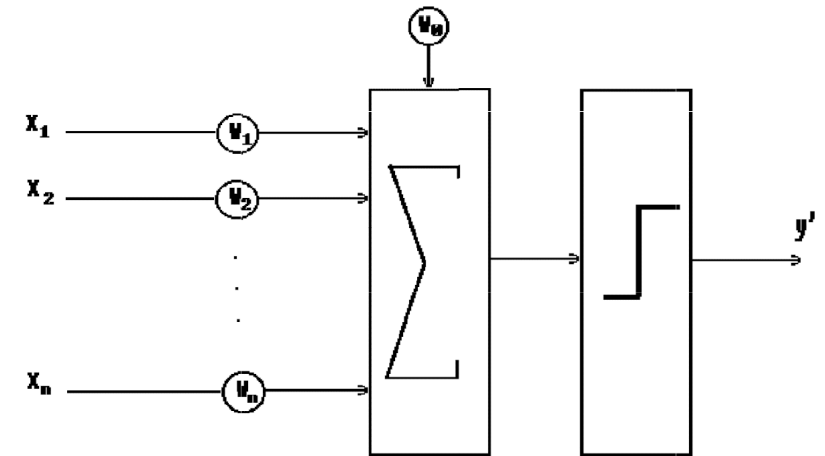
SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- založen na úplné vícehodnotové logice;
 - základem přístupu ke konstrukci logického inferenčního mechanismu je chápání báze znalostí jako fuzzy axiomatické teorie, tj. teorie, v níž je každý axiom opatřen váhou značící stupeň jeho příslušnosti do fuzzy množiny axiomů teorie;
 - úkolem inferenčního mechanismu je pak určit, v jakém stupni z této teorie a z dalších předpokladů (odpovědí uživatele v konzultaci) logicky vyplývá každý cílový výrok;
 - díky úplnosti použité Lukasiewiczovy vícehodnotové (fuzzy) logiky je pak každý logický důsledek teorie odvoditelný důkazem, v němž se používají axiomy teorie a pravidla úsudku.
-

Neuronový mechanismus



- mechanismus vychází z analogie mezi chováním neuronu a sady pravidel
- pokud analyzujeme činnost jednoho lineárního neuronu (obr. vpravo nahoře), můžeme jí popsat jako inferenci v sadě pravidel, kde na levé straně jsou postupně literály odpovídající jednotlivým vstupům do neuronu (obr. vpravo dole).
- Vážení vstupů $w_i * x_i$ přicházejících do neuronu lze realizovat (vhodnou) funkcí CTR, součet vstupů a nelineární transformaci $f(\sum_i w_i * x_i)$ realizuje (vhodná) funkce GLOB



$$\begin{array}{l} x_1 \text{ --> } y' \quad (w_1) \\ \text{non}(x_1) \text{ --> } y' \quad (-w_1) \\ \dots \\ x_n \text{ --> } y' \quad (w_n) \\ \text{non}(x_n) \text{ --> } y' \quad (-w_n) \\ \text{True} \text{ --> } y' \quad (w_0) \end{array}$$

Funkce NEG - požadavky



- váha negace výroku

1. $\text{NEG}(1) = -1$,

2. $\text{NEG}(-1) = 1$,

3. $\text{NEG}(0) = 0$,

4. $\text{NEG}(\text{NEG}(w)) = w$,

5. $w = 0$ právě když $\text{NEG}(w) = 0$.

Funkce NEG



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Je-li w váha výroku A , pak

sémantika	funkce NEG(w)
standardní	$\neg w$
logická	$\neg w$
neuronová	$\neg w$

Funkce NEG - příklad

Předpokládejme nezaměstnaného klienta žádajícího o půjčku. Tzn., že výrok klient má vysoký příjem by byl ohodnocen vahou -1. Do systému tedy vstupuje tento výrok

klient **má** vysoký příjem (-1)

Jak by se dala vyjádřit váha negace původního výroku, kterou lze formulovat např. jako klient **nemá** vysoký příjem ? Váha původního výroku je -1, tedy $w = -1$. Váha negace výroku se spočte pomocí funkce NEG jako

$$\text{NEG}(w) = \text{NEG}(-1) = -(-1) = 1$$

Vypočtená váha výroku klient **nemá** vysoký příjem je tedy 1, což dobře koresponduje se skutečností, že se jedná o nezaměstnaného klienta.

Funkce CONJ - požadavky



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- váha konjunkce výroků v předpokladu

1. $\text{CONJ}(w_1, w_2) \leq w_1,$

2. $\text{CONJ}(w_1, w_2) \leq w_2.$

Funkce CONJ



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Jsou-li w váha výroku A a v váha výroku B, pak

sémantika	funkce CONJ(w, v)
standardní	$\min(w, v)$
logická	$\min(w, v)$
neuronová	$\min(w, v)$

Funkce CONJ – příklad 1



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Předpokládejme klienta, pro kterého platí dva následující výroky s danými vahami

klient má vysoký příjem (-1)

klient má vysoké konto (1)

Dále předpokládejme **velmi přísnou** banku, která klientovi půjčí jedině v tom případě, že klient má **jak** vysoký příjem, **tak** vysoké konto. Tento požadavek lze přeformulovat tak, že banka je ochotná půjčit pouze klientovi, který má vysoký příjem **a zároveň** má vysoké konto (má hodně peněz na účtu). Jak bychom tedy vypočetli váhu následujícího výroku?

klient má vysoký příjem **a zároveň** klient má vysoké konto

Stačí dosadit do funkce CONJ našeho klienta, tedy $v = -1$ a $w = 1$, tzn.

$$\text{CONJ}(-1; 1) = \min(-1; 1) = -1$$

Váha konjunkce dvou výše zmíněných výroků je tedy -1, tzn. do systému vstupuje (složený) výrok

klient má vysoký příjem **a zároveň**

klient má vysoké konto (-1)

Funkce CONJ – příklad 2



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Předpokládejme dalšího klienta s

klient má vysoký příjem (0,4)

klient má vysoké konto (0,3)

Vypočtená váha stejného výroku složeného pomocí **a zároveň** je 0.3. Takovýto klient by měl určitě vyšší šanci na získání půjčky než první klient, přestože první klient má vyšší konto než tento.

Je důležité si uvědomit, že právě funkce min není použita k výpočtu váhy konjunkce dvou výroků náhodou. Vysoká váha konjunkce dvou výroků náhodou je možná jen v případě, kdy každý z těchto dvou výroků má vysokou váhu. Pokud je jedna z vah nízká, váha konjunkce je také nízká. Toto dobře koresponduje se zažitou představou, že dva výroky platí dohromady pouze v případě, kdy platí jak jeden, tak druhý výrok.

Funkce DISJ - požadavky



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- váha konjunkce výroků v předpokladu

1. $\text{DISJ}(w_1, w_2) \geq w_1$,

2. $\text{DISJ}(w_1, w_2) \geq w_2$.

Funkce DISJ



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Jsou-li w váha výroku A a v váha výroku B, pak

sémantika	funkce DISJ(w, v)
standardní	$\max(w, v)$
logická	$\max(w, v)$
neuronová	$\max(w, v)$

Funkce DISJ – příklad 1



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Předpokládejme klienta, pro kterého platí dva následující výroky s danými vahami

klient má vysoký příjem (-1)

klient má vysoké konto (1)

Dále předpokládejme **méně přísnou** banku, které pro smlouvení půjčky stačí, aby klient měl **alespoň** vysoký příjem bez nutnosti mít vysoké konto nebo **alespoň** vysoké konto bez nutnosti mít vysoký příjem (pokud by měl jak vysoký příjem tak vysoké konto, tak to samozřejmě bude stačit také). Tento požadavek lze přeformulovat tak, že banka je ochotná půjčit klientovi, který má **bud'** vysoký příjem, **nebo** má vysoké konto (nebo samozřejmě obojí). Jak bychom tedy vypočetli váhu následujícího výroku?

klient má vysoký příjem **nebo** klient má vysoké konto

Stačí dosadit do funkce DISJ našeho klienta, tedy $v = -1$ a $w = 1$, tzn.

$$\text{DISJ}(-1; 1) = \max(-1; 1) = 1$$

Váha konjunkce výše zmíněných dvou výroků je tedy 1, tzn. do systému vstupuje (složený) výrok

klient má vysoký příjem **nebo** klient má vysoké konto (1)

Funkce DISJ – příklad 2



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Předpokládejme dalšího klienta s

klient má vysoký příjem (0,4)

klient má vysoké konto (0,3)

Vypočtená váha výroku složeného pomocí **nebo** je 0.4. Takovýto klient by měl určitě nižší šanci na zisk půjčky než první klient, přestože první klient má nižší příjem než tento.

Je důležité si uvědomit, že právě funkce max není použita k výpočtu váhy disjunkce dvou výroků náhodou. Nízká váha disjunkce dvou výroků náhodou je možná jen v případě, kdy každý z těchto dvou výroků má nízkou váhu. Pokud je jedna z vah vysoká, váha disjunkce je také vysoká. To znamená, že disjunkce dvou výroků platní v případech, kdy alespoň jeden z těchto výroků je platný.

Tento a předchozí příklad ilustrují, jak lze pomocí logických spojek (a zároveň, nebo) modelovat např. „přísnost“ banky a jak odlišná volba logické spojky výrazně ovlivňuje výsledek výpočtu, popř. celý rozhodovací proces o smlouvením půjčky - dvakrát dva stejní zákazníci, ale vždy zcela opačný výsledek.

Funkce CTR - požadavky



CTR(a,w):

- je-li $a < 0$, pak $CTR(a,w) = 0$,
 - $CTR(1,w) = w$
 - je-li $0 < a < 1$, pak CTR je neklesající v a
-

Funkce CTR



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- slouží pro určení příspěvku pravidla k váze závěru
 - pravidlo $A \longrightarrow S (w)$ přiřadí závěru S váhu w v případě, že A je splněno s jistotou (tak chápe váhu pravidla expert)
-

Funkce CTR

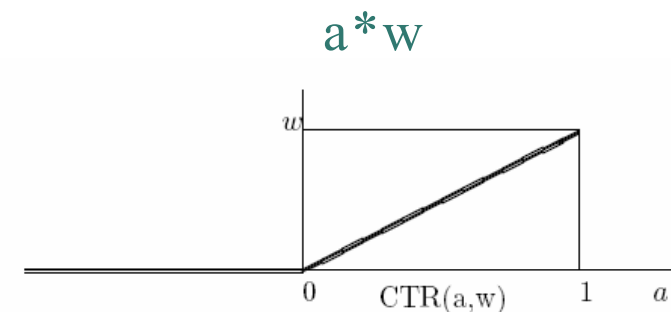


SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

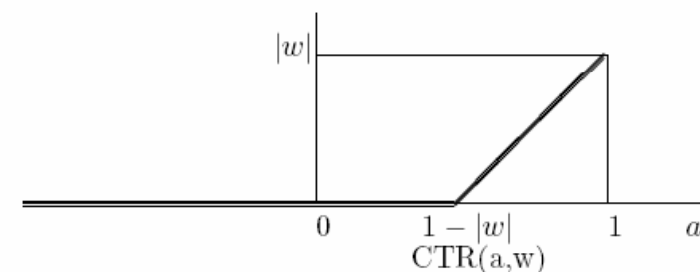
Je-li a váha předpokladu A , pak se váha závěru mění:

1. pro $a < 0$: $CTR(a, w) = 0$
2. pro $0 < a < 1$ získáme následující podoby funkce CTR pro různé sémantiky inferenčního mechanismu:

sémantika	funkce $CTR(a, w)$
standardní	$a * w$
logická	$\text{sign}(w) * \max(0, a + w - 1)$
neuronová	$a * w$ (w nemusí být z $[0, 1]$)



$$\text{sign}(w) * \max(0, a + |w| - 1)$$



Funkce CTR – příklad 1



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OPROUDNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Předpokládejme znovu nezaměstnaného klienta žádajícího o půjčku. Tzn., že výrok klient má vysoký příjem by byl ohodnocen vahou -1. Do systému tedy vstupuje tento výrok

klient **má** vysoký příjem (-1)

Předpokládejme velmi jednoduchou bázi znalostí, která obsahuje pouze dvě pravidla

klient **má** vysoký příjem => půjčíme (1)

klient **nemá** vysoký příjem => půjčíme (-1)

kde výrok půjčíme odpovídá situaci, kdy banka klientovi půjčku poskytne. Váhu tohoto výroku chceme odvodit z odpovědi pomocí pravidel. Zatím však o výroku půjčíme **nevíme nic**. Systém NEST v takovém případě přiřadí výroku **neutrální váhu 0**, tzn. není ani (trochu) platný ani (trochu) neplatný.

Jak upravíme váhu výroku půjčíme pro našeho klienta na základě jeho odpovědi a naší bázi znalostí? Nejdříve berme v úvahu pravidlo 1). Výrok klient **má** vysoký příjem má pro našeho klienta váhu -1, tzn. do funkce CTR dosadíme $a = -1$. Váha pravidla 1) je 1, tzn. $w = 1$. Tudíž

$$\text{CTR}(a, w) = \text{CTR}(-1, 1) = 0,$$

jelikož $a < 0$. Příspěvek pravidla 1) k neznámé váze výroku půjčíme je 0, tzn. můžeme ho ignorovat (zatím se spokojíme s tímto faktem bez dalšího vysvětlování a vše si vyjasníme u funkce GLOB), tudíž váha výroku půjčíme je stále 0. Na základě této váhy se nemůžeme ani přiklonit ani odklonit od smlouvené půjčky.

Funkce CTR – příklad 2



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Nyní vezměme v úvahu pravidlo 2). Výrok klient **nemá** vysoký příjem má pro našeho klienta váhu 1, což jsme vypočetli pomocí funkce NEG (viz výše), tzn. do funkce CTR dosadíme $a = 1$. Váha pravidla 2) je -1, tzn. $w = -1$. Tudíž

$$\text{CTR}(a, w) = \text{CTR}(1, -1) = 1,$$

jelikož $a > 0$. Příspěvek pravidla 2) k váze výroku půjčíme je 1, tudíž novou váhu výroku půjčíme stanovíme na 1. To můžeme provést díky tomu, že váha půjčíme byla doposud rovná 0 (pokud by nebyla rovná 0, použili bychom funkci GLOB, viz níže). Na základě této nové váhy se již můžeme silně odklonit od smluvení půjčky, což reálně odpovídá situaci, kdy nezaměstnaný člověk má je velmi malou šanci na získání půjčky.

Funkce GLOB - požadavky



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

$$GLOB(w_1, w_2, \dots, w_n) = w_1 \oplus w_2 \oplus \dots \oplus w_n$$

1. \oplus je komutativní a asociativní,
 2. $1 \oplus w = w \oplus 1 = 1$, pro $w \in (-1, 1]$,
 3. $-1 \oplus w = w \oplus -1 = -1$, pro $w \in [-1, 1)$,
 4. $0 \oplus w = w \oplus 0 = w$, pro $w \in [-1, 1]$,
 5. $w \oplus -w = 0$, pro $w \in [-1, 1]$,
 6. pro libovolné $w_1, w_2, w_3 \in (-1, 1)$,
jestliže $w_1 < w_2$, pak $w_1 \oplus w_3 \leq w_2 \oplus w_3$.
-

Funkce GLOB



- slouží pro skládání příspěvků pravidel se stejným závěrem

Pro pravidla

$$A_1 \longrightarrow S(w_1)$$

$$A_2 \longrightarrow S(w_2)$$

...

$$A_n \longrightarrow S(w_n)$$

kteřá dávají (po aplikaci funkce CTR) příspěvky w_1' , w_2' , ..., w_n' se výsledná váha závěru S odvodí těmito funkcemi:

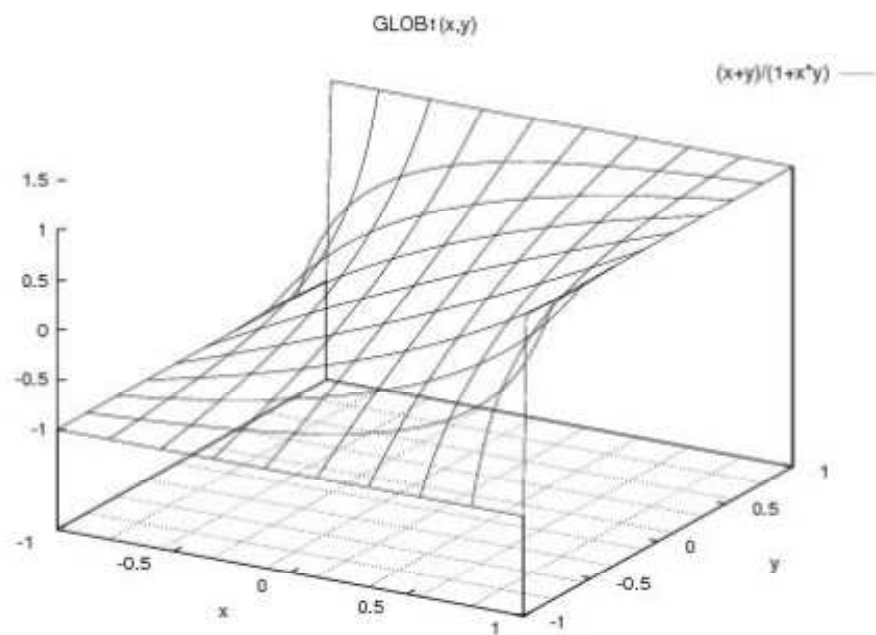
sémantika	funkce GLOB(w_1' , w_2' , ..., w_n')
standardní	$\text{GLOB1}(w_1', w_2') = (w_1' + w_2') / (1 + w_1' * w_2')$
logická	$\text{GLOB2}(w_1', w_2', \dots, w_n') = \min(\sum_{w_i > 0} w_i, 1) + \max(\sum_{w_i < 0} w_i, -1)$
neuronová	$\text{GLOB3}(w_1', w_2', \dots, w_n') = \max(-1, \min(1, \sum_{w_i} w_i))$

Funkce GLOB - ilustrace

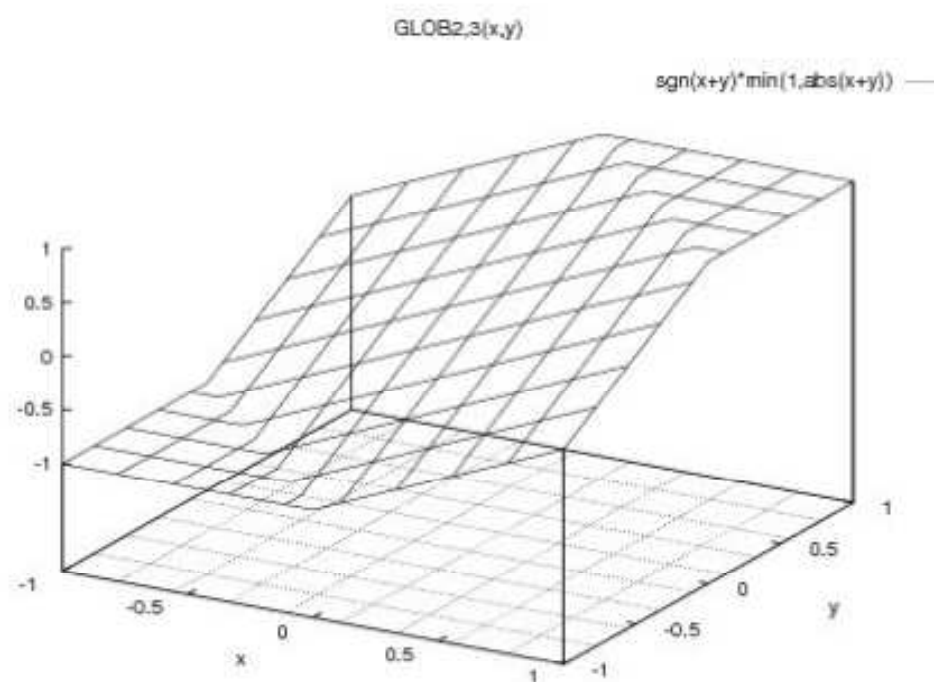


**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

$$\text{GLOB1}(w_1', w_2') = (w_1' + w_2') / (1 + w_1' * w_2')$$



$$\text{GLOB2}(w_1', w_2', \dots, w_n') = \min(\sum_{w_i > 0} w_i, 1) + \max(\sum_{w_i < 0} w_i, -1)$$



Funkce GLOB – příklad 1



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Opět předpokládejme jednoduchou bázi znalostí, která obsahuje čtyři pravidla

- 1) klient **má** vysoký příjem => půjčíme (0,9)
- 2) klient **nemá** vysoký příjem => půjčíme (-0,9)
- 3) klient **má** vysoké konto => půjčíme (0,5)
- 4) klient **nemá** vysoké konto => půjčíme (-0,3)

Všimněme si dvou pravidel 3) a 4). Váhy již nejsou nastaveny taky (absolutně) vysoce jako u pravidel 1) a 2). Takto lze modelovat situaci, kdy na **některých výrocích záleží méně a na některých více**. V tomto případě banka klade hlavní důraz na výšku příjmu klienta, zatímco výška konta klienta hraje při rozhodování o půjčce méně výraznou roli. Ilustrujme si to na následujících dvou klientech.

Funkce GLOB – příklad 2



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

První klient:

klient má vysoký příjem (1)

klient má vysoké konto (-1)

Nenulové příspěvky, jelikož $a > 0$ (viz funkce CTR), k váze výroku půjčíme plynou z pravidel 1) $CTR(1; 0,9) = 0,9$ a 4) $CTR(NEG(-1), -0,3) = -0,3$. Kolik je tedy váha výroku půjčíme? Tento výpočet lze provést pomocí funkce GLOB. Za předpokladu standardního inferenčního mechanismu by výpočet byl proveden následovně. Z pravidla 1) je $v = 0,9$ a z pravidla 2) je $w = -0,3$, tedy

$$GLOB(v; w) = GLOB(0,9; -0,3) = (0,9 + (-0,3)) / (1 + 0,9 * (-0,3)) = 0,82$$

Funkce GLOB – příklad 3



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Druhý klient:

klient má vysoký příjem (-1)

klient má vysoké konto (1)

Nenulové příspěvky k váze výroku půjčíme plynou z pravidel 2) $CTR(NEG(-1); -0,9) = -0,9$ a 3) $CTR(1, 0,5) = 0,5$. Kolik je tedy váha výroku půjčíme? Tento výpočet lze provést opět pomocí funkce GLOB. Za předpokladu standardního inferenčního mechanismu by výpočet byl proveden následovně. Z pravidla 2) je $v = -0,9$ a z pravidla 2) je $w = 0,5$, tedy

$$GLOB(v; w) = GLOB(-0,9; 0,5) = (-0,9 + 0,5)/(1 + (-0,9) * 0,5) = -0,73$$

Funkce GLOB – příklad 4



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

U prvního klienta bychom se (jako banka) výrazně přiklonili k půjčce (s vahou 0,82), kdežto u druhého klienta bychom se výrazně (s vahou -0,72) od půjčky odklonili. Na tomto příkladu lze dobře vidět, jak lze modelovat odlišnou důležitost jednotlivých vlastností klienta při rozhodování. Zatímco váhy výroků našich dvou klientů jsou pouze navzájem „prohozeny“, 1 za -1 a naopak, rozhodnutí o půjčce, pokud by záviselo pouze na váze výroku půjčíme, se zcela zásadně liší.

Zpracování neurčitosti v úplné fuzzy logice



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- . Neurčitost informace/znalosti je chápána jako stupeň jistoty, že jde o „axiom“
 - . Formule reprezentující bázi znalostí a vstupní informace se stupni jistoty z $[0; 1]$ tak tvoří fuzzy axiomatickou teorii
 - . V úplné fuzzy logice je stupeň dokazatelnosti formule ve fuzzy axiomatické teorii roven stupni její pravdivosti v této teorii
 - . Inferenční mechanismus je pak dokazovací procedura, která určí stupně logického vyplývání všech cílových formulí z fuzzy teorie reprezentující bázi znalostí a vstupní informace
 - . Realizace logického inferenčního mechanismu je tedy založena na úplné Lukasiewiczově logice s tím, že každý výrok je reprezentován svou pozitivní verzí (pro kladnou váhu) a negativní verzí (pro zápornou váhu)
 - . Z pravdivostních funkcí logických spojek a z dedukčního pravidla modus ponens v Lukasiewiczově výrokové logice byly pak odvozeny kombinační funkce pro váhy na intervalu $[-1; 1]$
-

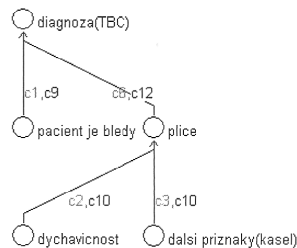
Konzultace



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Atribut	Výrok	Odpověď
Pacient je bledý	Pacient je bledý	1
Dýchavičnost	Dýchavičnost	1
Teplota		37
Další příznaky	Kašel	3
Další příznaky	Rýma	1

Cílové výroky	váha
diagnoza (TBC)	1,779
diagnoza (Nachlazení)	1,285
diagnoza (Chripka)	-0,857



Znalosti, které mají vliv při výpočtu konečné váhy cílového výroku TBC:

c1 IF bledost THEN diagnoza (TBC) [1] : 0,333

c2 IF dychavicnost THEN plíce [2] : 0,667

c3 IF priznaky(kasel) THEN plíce [2] : 2,000

c6 IF plíce THEN diagnoza (TBC) [2] : 1,548

Děkuji za pozornost

Některé snímky převzaty od:

prof. Ing. Petr Berka, CSc. berka@vse.cz