MATEMATIKA V EKONOMII - PŘEDNÁŠKA č. 1

Přednášející: doc. Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Vedoucí seminářů: Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D., Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.
Kredity: 5

Podmínka absolvování: zkouška (alespoň 60 bodů ze dvou písemných testů) + účast na seminářích (alespoň 70 %)

Skripta: Mazurek, J. *Matematika v Ekonomii* a Mazurek, J. *Sbírka úloh - Matematika v Ekonomii. (*viz IS). Starší učebnice: *Matematika B*.

Materiály ke cvičením a ke zkoušce: viz IS.

Videozáznamy přednášek: http://media.slu.cz/videolist.php?idsada=42

Obsah předmětu: diferenciální a integrální počet jedné a dvou reálných proměnných s aplikacemi v ekonomii. (podrobněji viz Plán přednášek nebo Sylabus předmětu).

Hodnocení: 0-59: F, 60-65: E, 66-70: D, 71-80: C, 81-90: B, 91-100: A.

Funkce jedné reálné proměnné

POJEM FUNKCE

-**Funkcí** rozumíme předpis, který každému číslu x z jedné množiny (definičního oboru) přiřadí právě jedno číslo y z druhé množiny (oboru hodnot).

-**Definiční obor** $D(f)$ nebo D_f

-**Obor hodnot** $H(f)$ nebo H_f.

-**Funkční předpis** se značí $y = f(x)$, například $y = x^2 + 1$.

-**Explicitní funkce**: Je-li možné upravit funkci na tvar $y = f(x)$.

-**Implicitní funkce**: nelze osamostatnit y na levé straně, značíme $f(x, y) = 0$.

- V ekonomii se nejčastěji setkáváme s funkcemi **poptávky**, **nabídky**, **příjmů**, **nákladů**, **užitku**, **produkce**, atd.

-Funkce mohou být definovány pro různé **číselné obory** (čísla přirozená, celá, reálná, komplexní, reálná kladná, apod.).

-**Funkce jedné proměnné** a **funkce více proměnných** (např. Cobb-Douglasova funkce).

GRAF FUNKCE

-**Grafem funkce** $y = f(x)$ nazýváme množinu všech bodů o souřadnicích $[x, f(x)]$, kde $x \in D(f)$.

-**Vybrané grafy** viz dále.

-Přehledně **znázorňuje** závislost x na y, a je možné z něj vyčíst vlastnosti funkce.

-**Průsečíky** grafu funkce s grafem jiné funkce jsou body, kde jsou si obě funkce rovny, což bývá v ekonomické teorii interpretováno jako stav rovnováhy (například mezi poptávkou a nabídkou).

VLASTNOSTI FUNKCE

-**Definiční obor funkce** $D(f)$

-V **ekonomii** platí, že většina veličin může nabývat pouze kladných hodnot.

-Je užitečné si pamatovat, že funkce ve tvaru polynomu a exponenciální funkce mají definiční obor vždy rovný $\boldsymbol{R}$.

- Pak existují funkce, kde se definiční obor obecně nerovná $\boldsymbol{R}$, a mezi ně patří především tyto:

- racionální lomené funkce (zlomky s proměnnou x ve jmenovateli): jmenovatel nesmí být roven nule,
- logaritmické funkce: výraz v logaritmu musí být kladný,
- odmocninné funkce: výraz pod odmocninou musí být nezáporný,
- tangens a cotangens: výraz ve jmenovateli (tedy cosinus, resp. sinus) nesmí být roven nule.

- arcsinus a arccosinus: definičním oborem je interval $\langle -1,1\rangle$.

Příklad 1.1. Určete definiční obor funkcí:
a) f: $y=\sqrt{3x-1}$
b) f: $y=\dfrac{x+5}{x^2-1}$
c) f: $y=\log\left(4-x^2\right)$
d) f: $y=\sqrt{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x-2}$

-Obor hodnot $H(f)$: je množina všech *y*, které získáme z funkčního předpisu $y=f(x)$ pro všechna x z definičního oboru. Je-li funkce $y=f(x)$ omezená (viz níže), je rovněž obor hodnot omezený.

-Monotónnost funkce: funkce je na intervalu $I\subseteq R$ monotónní, pokud je na tomto intervalu rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající.
Funkce je na intervalu *I*:

- rostoucí, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)<f\left(x_2\right)$,
- klesající, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)>f\left(x_2\right)$,
- nerostoucí, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)\geq f\left(x_2\right)$,
- neklesající, pokud pro všechna $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, platí: $f(x_1)\leq f\left(x_2\right)$.

-Extrémy funkce: *globální* a *lokální*:

Funkce má v bodě *a globální maximum*, jestliže pro všechna *x* ($x\neq a$) z definičního oboru je $f(a)\geq f\left(x\right)$.
Funkce má v bodě *a globální minimum*, jestliže pro všechna *x* ($x\neq a$) z definičního oboru je $f(a)\leq f\left(x\right)$.
Funkce má v bodě *a lokální maximum*, jestliže pro všechna *x* ($x\neq a$) z nějakého okolí bodu *a* je $f(a)\geq f\left(x\right)$.
Funkce má v bodě *a lokální minimum*, jestliže pro všechna *x* ($x\neq a$) z nějakého okolí bodu *a* je $f(a)\leq f\left(x\right)$.
Okolím bodu *a* nazýváme otevřený interval $\left(a-\delta,a+\delta\right)$. Platí-li v předešlých vztazích ostrá nerovnost (">" nebo "<"), je extrém ostrý, v opačném případě neostrý.

-Omezenost funkce: funkce je *omezená shora*, jestliže existuje takové reálné číslo *h*, že $f(x) \leq h$ pro všechna x z definičního oboru funkce. Podobně, funkce je *omezená zdola*, jestliže existuje takové reálné číslo *d*, že $f(x) \geq d$ pro všechna *x* z definičního oboru funkce. Pokud je funkce omezená shora i zdola, říkáme krátce, že je *omezená*. V ekonomii jsou všechny funkce omezené, neboť produkce, příjmy, náklady, práce, kapitál či zdroje surovin nejsou nekonečné.

-Prostá funkce: Funkce $y = f(x)$ se nazývá *prostá*, jestliže platí:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f), x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2).$$

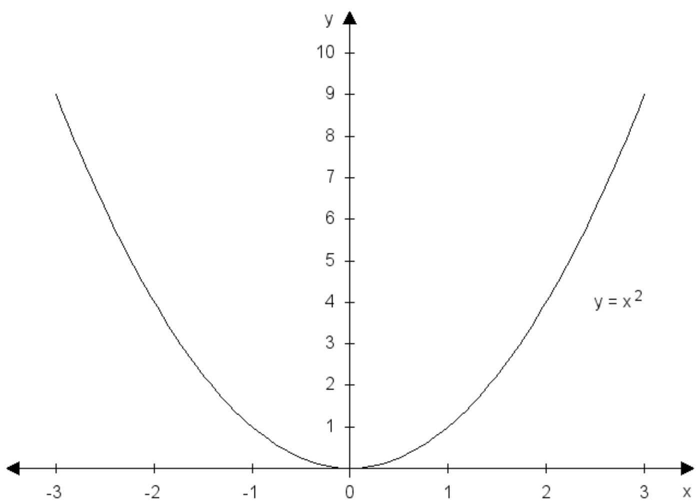
Význam prostých funkcí tkví v tom, že k nim existují funkce *inverzní* (opačné).

ALGEBRAICKÉ FUNKCE

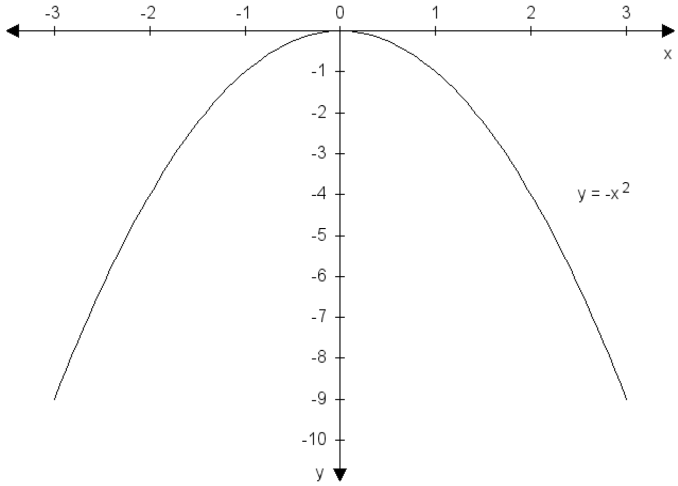
-Lineární funkce má předpis $y = ax + b$, jejím grafem je přímka (řecky *linea* je přímka). Koeficient *a* se nazývá směrnice přímky, neboť udává sklon (směr) přímky vzhledem k ose *x*. Koeficient *b* udává průsečík grafu funkce s osou *y*. Je užitečné si pamatovat, že:

- Pro $a > 0$ je funkce rostoucí.
- Pro $a < 0$ je funkce klesající.
- Pro $a = 0$ je funkce konstantní.

-Kvadratická funkce má předpis $y = ax^2 + bx + c$. Grafem je parabola.
Pro $a > 0$ je graf funkce (parabola) orientovaná „nahoru“, pro $a < 0$ „dolů“, viz Obr. 1.2 a 1.3. Koeficienty *b* a *c* v předpisu funkce posouvají parabolu ve směru osy *x* nebo *y*.



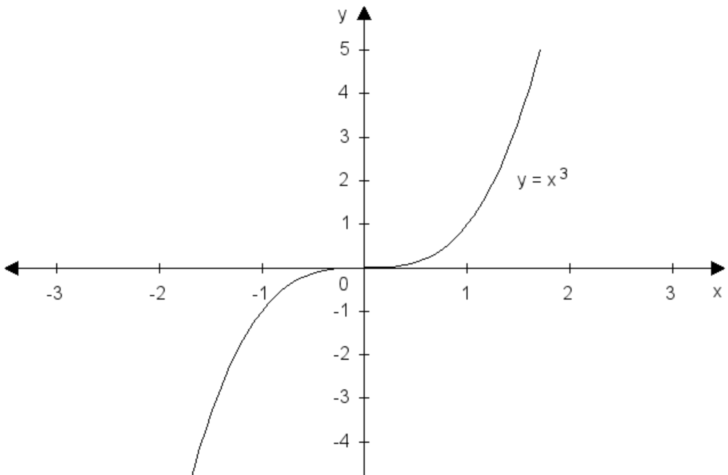
Obr. 1.2. Graf funkce $y = x^2$.



Obr. 1.3. Graf funkce $y = -x^2$.

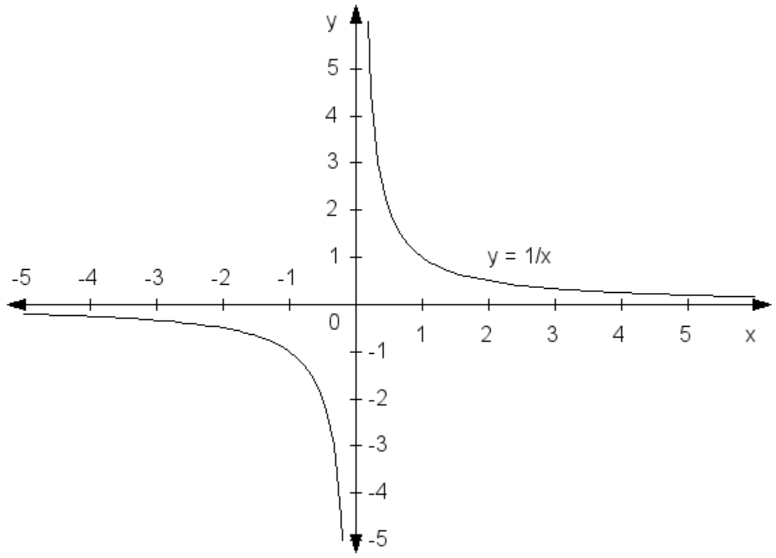
Příklad 1.4. Najděte vrchol paraboly $y = x^2 - 2x + 4$.

-Mocninná funkce má předpis $y = x^n$, kde n je celé číslo. Na základě toho, jestli je n kladné/záporné a liché/sudé má mocninná funkce jeden ze 4 typů grafů. Na Obr. 1.4. je pro ilustraci graf kubické funkce $y = x^3$.



Obr. 1.4. Graf funkce $y = x^3$.

- Racionální lomená funkce: $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Grafem racionální funkce bývají obvykle složité křivky, viz Kapitola 3. *Nepřímá úměrnost*: $y = \dfrac{k}{x}$, kde k je kladná konstanta. Grafem nepřímé úměrnosti je *hyperbola*, viz Obr 1.5.



Obr. 1.5. Graf funkce $y = 1/x$.

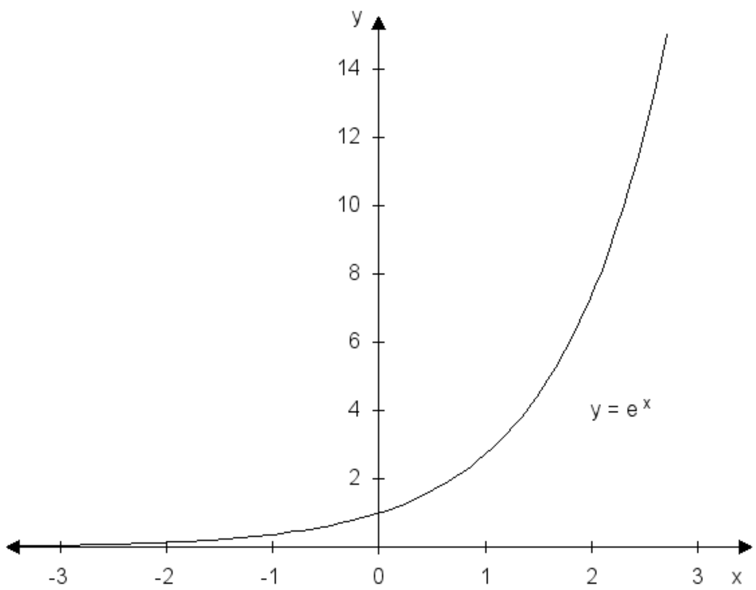
TRANSCENDENTNÍ FUNKCE

Funkce, které nejsou algebraické, se označují jako *transcendentní*. Mezi transcendentní funkce patří především funkce exponenciální, logaritmické a goniometrické.

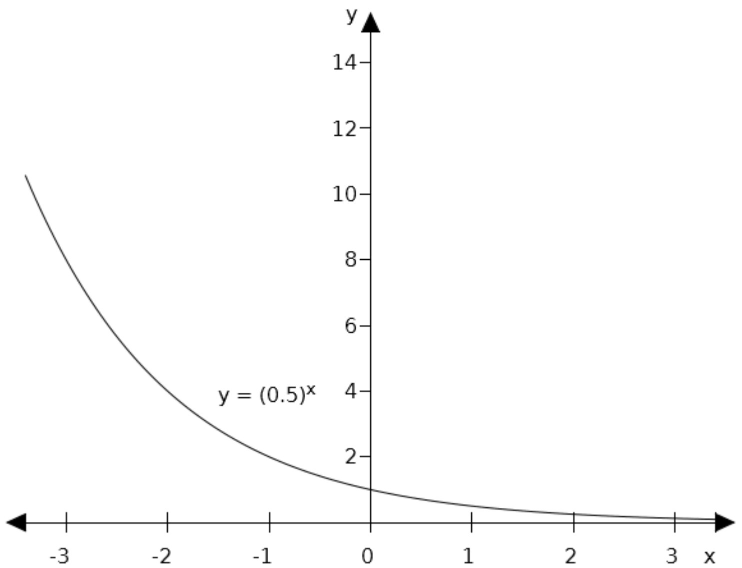
-Exponenciální funkce má předpis $y = a^x, a > 0, a \neq 1$. Číslo a je základ mocniny a musí být kladné a různé od 1, x je exponent. Vlastnosti exponenciální funkce závisí na základu a:

- Je-li $a > 1$, funkce je rostoucí, viz Obr. 1.6.
- Je-li $a < 1$, funkce je klesající, viz Obr. 1.7.

Graf (základní) exponenciální funkce vždy prochází bodem 1 na ose y, obor hodnot $H(f) = R^+$ a funkce je omezená zdola osou x. Nejčastěji používanou exponenciální funkcí je $y = e^x$, kde konstanta e = 2,718... se nazývá Eulerova konstanta, a jedná se o iracionální číslo, podobně jako π.



Obr. 1.6. Graf funkce y = e^x.

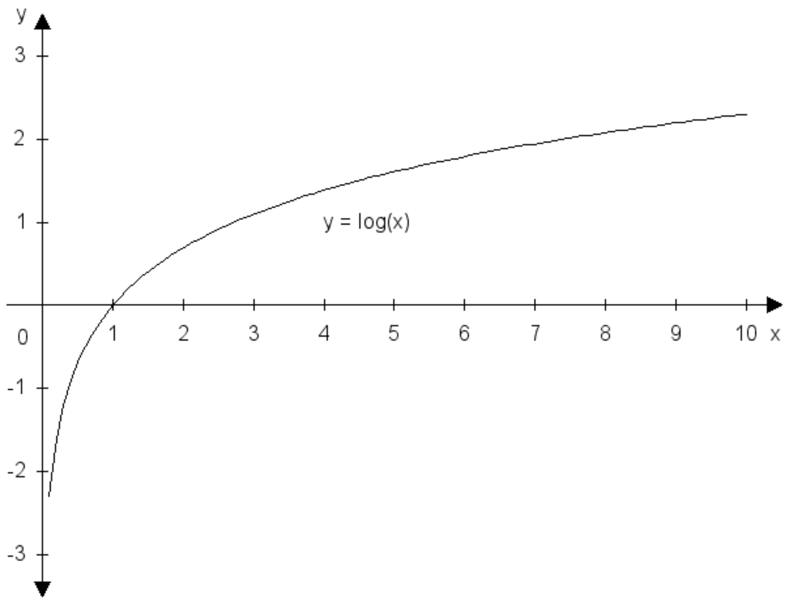


Obr. 1.7. Graf funkce y = (0,5)^x.

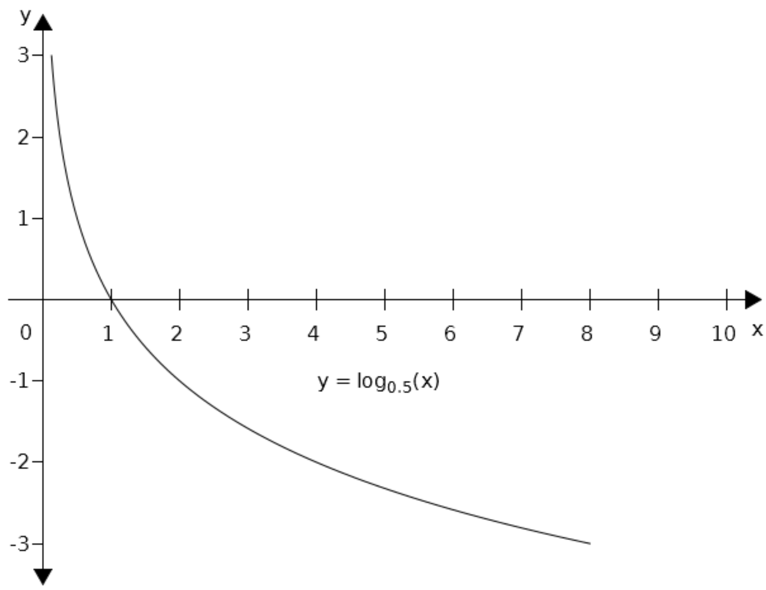
-Logaritmická funkce má předpis $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$. Číslo a se nazývá *základ logaritmu* a musí být kladné a různé od 1. Pro a = 10 se logaritmus nazývá *dekadický* (značka log$x$, pro $a = e = 2,718...$ *přirozený logaritmus* (značka ln$x$). Logaritmická funkce je inverzní funkcí k funkci exponenciální, což znamená, že definiční obor logaritmické funkce je roven oboru příslušné inverzní exponenciální funkce a naopak.

- Je-li $a > 1$, funkce je rostoucí, viz Obr. 1.8.
- Je-li $a < 1$, funkce je klesající, viz Obr. 1.9.

Graf (základní) logaritmické funkce vždy prochází bodem 1 na ose x, definiční obor je $H(f) = R^{+}$ a funkce není omezená.



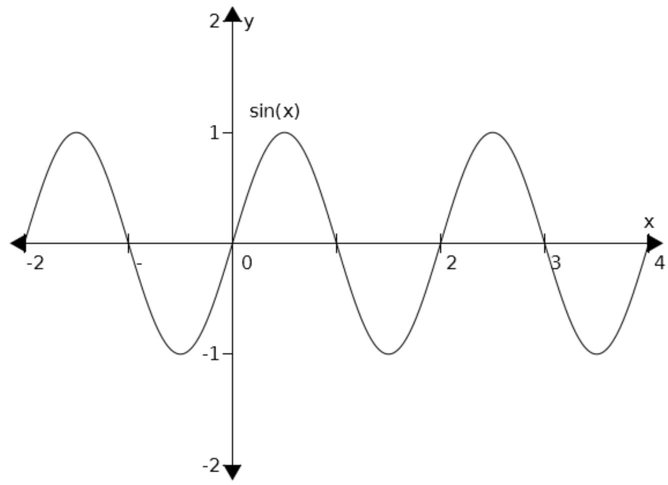
Obr. 1.8. Graf funkce $y = \log x$.



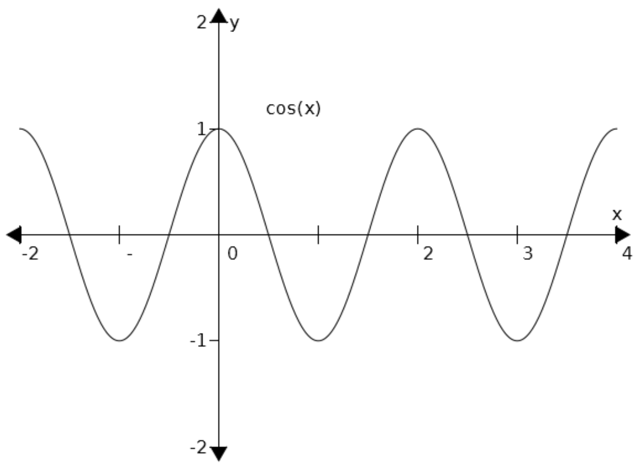
Obr. 1.9. Graf funkce $y = \log_{0,5} x$.

- Goniometrické funkce: sinus, kosinus, tangens a kotangens.

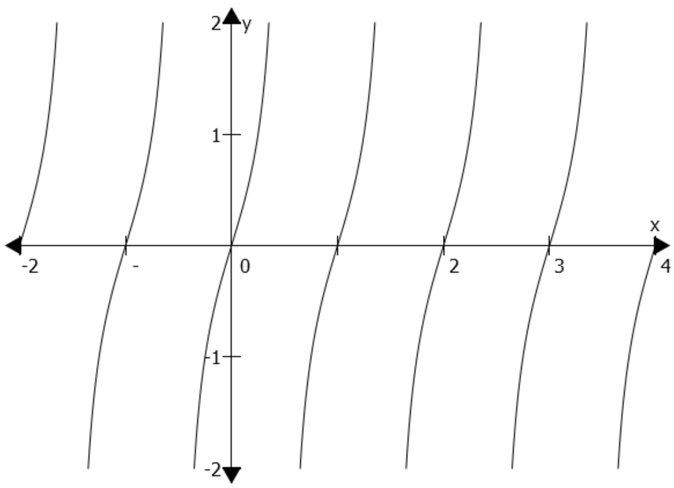
- Cyklometrické funkce: arcsin$x$, arccos$x$, arctg$x$ a arcotg$x$. Na kalkulačkách jsou značeny jako $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ a tg^{-1}.



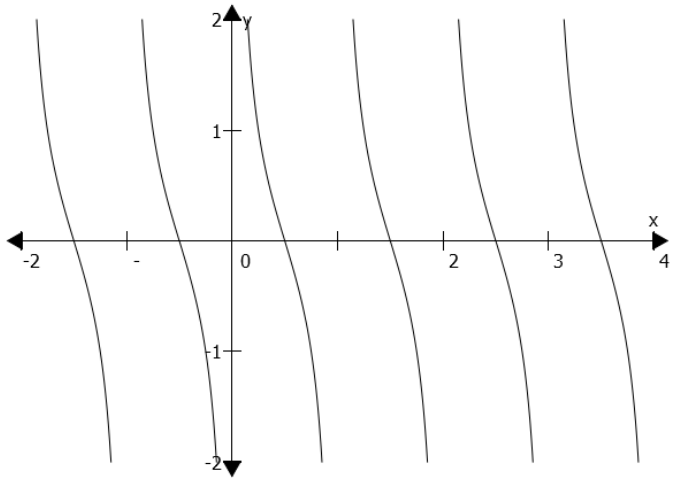
Obr. 1.10. Graf funkce $y = \sin x$.



Obr. 1.11. Graf funkce $y = \cos x$.



Obr. 1.12. Graf funkce $y = \mathrm{tg} x$.



Obr. 1.13. Graf funkce y = cotg$x$.

SLOŽENÁ FUNKCE

V některých případech může být argumentem funkce jiná funkce. V tom případě hovoříme o *složené* funkci.

Definice 1.1. *Nechť jsou dány funkce* $y = f(x)$ *a* $y = g(x)$*, a nechť pro* $x \in M \subseteq D(g)$ *platí, že* $g(x) \in D(f)$*. Potom funkci* $y = f(g(x))$ *nazýváme složenou funkcí. Funkce* $f(x)$ *je vnější funkce a funkce* $g(x)$ *je vnitřní funkce.*

Typickým příkladem složené funkce je například $y = \log(x^2 + 1)$ nebo $y = \sqrt{2x+5}$.

Příklad 1.5. Jsou dány funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$. Určete $y = f(g(x))$ a $y = g(f(x))$.

POLYNOMY

- polynom (česky *mnohočlen*): výraz $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.

Je-li n = 0, je polynom roven konstantě a_0; je-li n = 1, je polynom lineární: $a_0 + a_1x$; pro n = 2 je polynom kvadratický: $a_0 + a_1x + a_2x^2$, atd.

- Nulovým bodem (kořenem) polynomu je takové číslo x_0, pro které platí $P_n(x) = 0$.

- **Rozklad polynomu na součin** lze využít při zjednodušování algebraických výrazů krácením nebo při integraci metodou parciálních zlomků.

Příklad 1.6. Určete nulové body polynomu a upravte na součin:
a) $x^2 - x + 5$
b) $x^4 - 4x^2$
c) $x^3 - 27$

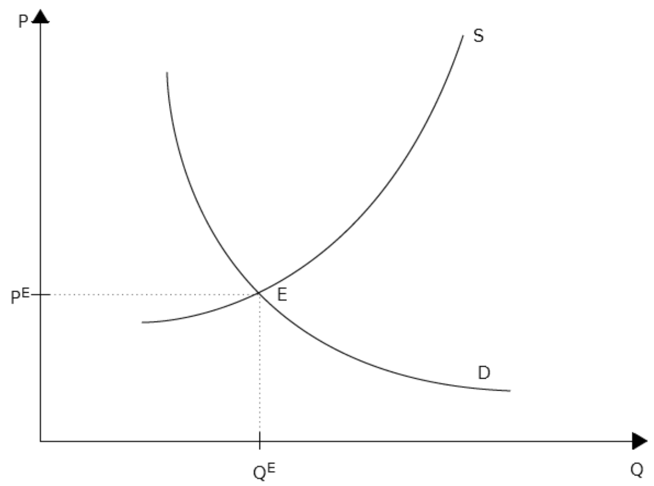
FUNKCE NABÍDKY, POPTÁVKY A ROVNOVÁHA NA TRHU V PODMÍNKÁCH DOKONALÉ KONKURENCE

-Funkce poptávky *D* (angl. *demand*) vyjadřuje vztah mezi cenou výrobku *P* (*price*) a poptávaným množstvím *Q* (*quantity*): $Q = D(P)$ resp. $P = D(Q)$. Tato funkce je vždy klesající, což znamená, že s rostoucí cenou *P* klesá poptávané množství *Q*.

Dále pro funkci poptávky platí, že veličiny *P* i *Q* musí být nezáporné, neboť záporné množství ani záporná cena nemají v této situaci smysl. Rovněž *P* ani *Q* nemohou růst do nekonečna, proto říkáme, že jsou omezené.

-Funkce nabídky *S* (angl. *supply*) vyjadřuje vztah mezi cenou výrobku *P* (*price*) a nabízeným množstvím *Q* (*quantity*): $Q = S(P)$ resp. $P = S(Q)$. Tato funkce je vždy rostoucí, což znamená, že s rostoucí cenou *P* roste nabízené množství *Q*.

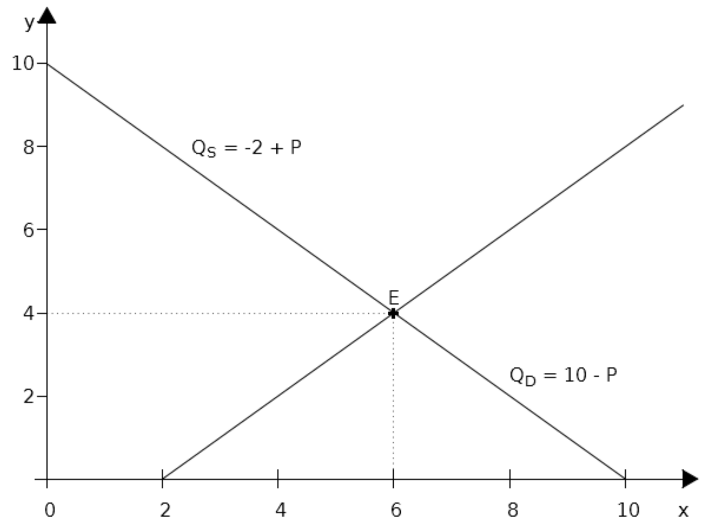
Při grafickém znázornění obou křivek je zvykem nanášet na osu *x* množství *Q* a na osu *y* cenu *P*.



Obr. 1.14. Typický tvar křivek funkce poptávky a nabídky s rovnovážným bodem *E*.

-*Lineární funkce poptávky* je dána vztahem: $Q_D = a - bP$, kde a a b jsou konstanty, pro které platí: $a \geq 0$, $b > 0$.
-*Lineární funkce nabídky* je dána vztahem: $Q_S = c + dP$, kde c a d jsou konstanty, pro které platí: $c \geq 0$, $d > 0$.
-*Rovnováha*: $Q_D = Q_S$.
-*Rovnovážná cena P_E*: $P_E = \dfrac{a-c}{b+d}$.
-*Rovnovážné množství Q_E*: $Q_E = \dfrac{ad+bc}{b+d}$.

Příklad 1.8 (Chen, 2007). Předpokládejme, že $Q_D = 10 - P$ a $Q_S = -2 + P$. Najděte rovnováhu mezi poptávkou a nabídkou.



Obr. 1.15. Rovnováha mezi poptávkou a nabídkou.

Úvod do diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné

DERIVACE FUNKCE

- Mějme funkci $y = f(x)$. Výraz $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$ nazýváme **derivací funkce** $y = f(x)$.

- **Geometrický význam** derivace: je rovna směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě.

-**Značení**: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$ (čteme *dy* podle *dx*), $\dfrac{df}{dx}$ (čteme *df* podle *dx*).

Příklad 2.1. Určete derivaci funkce $y = x^3 + 2x$ v bodě $x = 2$.

Příklad 2.2. Určete rovnici tečny ke křivce $y = x^2$ v bodě [2,4].

Příklad 2.3. Užitím definice derivace odvoďte derivaci funkce $y = x^2$.

Řešení:

$$\left(x^2\right)' = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x+h\right)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{+2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x \ . \blacksquare$$

Protože je výpočet derivací pomocí definice derivace často zdlouhavý, používáme pro derivování základních funkcí již odvozené vzorce, které najdete v Tabulce 2.1.

Nechť funkce *f*(x) a *g*(x) mají derivaci na intervalu $J \subseteq R$. K výpočtu derivací součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí používáme následující pravidla:

i) $\left[c \cdot f(x)\right]' = c \cdot f'(x)$

ii) $\left[f(x) \pm g(x)\right]' = f'(x) \pm g'(x)$

iii) $\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iv) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \ g(x) \neq 0$

v) $\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Příklad 2.4. Derivujte následující funkce:

a) $y = x^3 + 4x - 1$

b) $y = x^2 + 5x$

c) $y = 6x^3$

d) $y = 10\sin x + 3\cos x + 2e^x + 5^x + 1$

e) $y = \left(x^2 + 3\right) \cdot e^x$

f) $y = \dfrac{\ln x}{x + 2}$

g) $y = \ln\left(x^2 + 4x + 1\right)$

Tabulka 2.1. Přehled derivací elementárních funkcí.

$f(x)$	$f'(x)$
konstanta	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

-**První, druhá, třetí** a další derivace: $f'(x), f''(x), f'''(x)$, atd.

-**Význam** mají především první a druhá derivace, užití vyšších derivací je v ekonomii spíše výjimečné.

Příklad 2.5. Vypočtěte první, druhou a třetí derivaci funkce $y = x^3 + 4x^2 - 1$.

Historická poznámka: Americký prezident R. Nixon použil v roce 1972 v jednom televizním přenosu v rámci prezidentské kampaně následující argument: „Tempo růstu inflace zpomaluje."
Jistý komentátor to okomentoval: „Je to poprvé v historii, co americký prezident použil pro své znovuzvolení argument obsahující třetí derivaci."
Je tomu opravdu tak: Pokud inflaci považujeme za danou veličinu (y), pak její růst je první derivace, tempo tohoto růstu druhá derivace a zpomalování tohoto tempa pak představuje třetí derivaci.
Podobně můžeme z televizní obrazovky slýchat, že „růst nezaměstnanosti zpomaluje" nebo „pokles stavební výroby zrychluje", což jsou vlastně druhé derivace.

EXTRÉMY FUNKCE

- **Maxima** a **minima** funkce hledáme takto:

1. Najdeme body, v nichž je první derivace nulová: $f'(x) = 0$ – jsou to **stacionární body** (body podezřelé z extrému).
2. Pomocí druhé derivace rozhodneme, zda jde o maximum, minimum nebo inflexní bod:

$f''(x) < 0$ ... maximum

$f''(x) > 0$ ... minimum

$f''(x) = 0$ ... nelze rozhodnout

Příklad. Určete extrémy funkce a) $y = x^4 - 4x^2$, b) $y = x \cdot e^x$.

DIFERENCIÁL FUNKCE

Diferenciálem funkce $y = f(x)$ nazýváme funkci $df(x) = f'(x)\,dx$. Diferenciál funkce závisí na x a dx, a vyjadřuje přibližně přírůstek funkce df při změně argumentu x o dx v bodě x. (Toto přibližné vyjádření je tím přesnější, čím menší je dx).

Příklad 2.6. Určete přírůstek funkce $y = x^3$ v bodě $x = 3$ pro přírůstek argumentu dx = 0,2 pomocí diferenciálu funkce.