

## MATEMATIKA – seminář č. 11 – FUNKČNÍ ŘADY

### FUNKČNÍ ŘADA A JEJÍ SOUČET

Nechť  $f_1(x), f_2(x)$ , atd. je posloupnost funkcí. *Funkční řada* je symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$$

Součet funkční řady je funkce  $s(x)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = s(x)$$

Řada je konvergentní, jestliže funkční řada  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$  konverguje k funkci  $s(x)$  na množině  $M$ . Pokud k  $s(x)$  konverguje i  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ , hovoříme o absolutní konvergenci.

Množina všech  $x \in M$ , pro které řada konverguje (konverguje absolutně), se nazývá *obor konvergence* (obor absolutní konvergence), a značí se OK a OAK.

### MOCNINNÁ ŘADA

Speciální případ funkční řady:  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a)^1 + c_2(x-a)^2 + \dots$

Mocninná řada konverguje absolutně na intervalu  $(a-\rho, a+\rho)$ , kde  $\rho$  je *poloměr konvergence* a daný interval je *interval konvergence* (IK). Poloměr konvergence se vypočte pomocí následujících limit:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \text{ nebo } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

V krajních bodech  $a + \rho$ ,  $a - \rho$ , řada může, ale nemusí konvergovat, a proto se tyto případy řeší zvlášť. Platí, že  $IK \subseteq OAK \subseteq OK$ .

### GEOMETRICKÁ ŘADA

Řada tvaru  $\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x)$ ,  $f(x) = q$ , řada konverguje pro  $|q| < 1$ , a součet řady:  $s(x) = \frac{a_1}{1-q}$ .

### KONVERGENCE FUNKČNÍCH ŘAD

Pro absolutní konvergenci můžeme použít podílové kritérium:  $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|}$ , nebo

odmocninové kritérium:  $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}$ . Platí, že pokud  $L(x) < 1$ , řada pro dané  $x$  absolutně konverguje, pro  $L(x) > 1$  diverguje a pro  $L(x) = 1$  nelze rozhodnout.

1. Určete obor případně poloměr konvergence funkčních řad, u geometrických řad určete i jejich součet:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (x+2)^n$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{nx}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{nx}}{n} & \text{f) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+3)^n}{n2^n} & \text{g) } \sum_{n=1}^{\infty} nx^n \\
 \text{h) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{x}{x+2} \right)^n & \text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n} & \text{j) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}} \\
 \text{k) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)} & \text{l) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2} & \text{m) } \sum_{n=1}^{\infty} \ln^{n+1}(x+1) \\
 \text{n) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x} \right)^n & \text{o) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} & \text{p) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{3} \right)^n
 \end{array}$$

**Výsledky:** a)  $IK=OK=OAK=(-1,1)$  , b)  $IK=OK=OAK=(-3,-1)$  , c)  $OK=OAK=(1/e,e)$  , d)  $OK=OAK=(-\infty,0)$ , e)  $OAK=(-\infty,0)$ ,  $OK=(-\infty,0>$ , f)  $OK=(-5,-1>$ ,  $IK=OAK=(-5,-1)$ , g)  $IK=OK=OAK=(-1,1)$ , h)  $OK=OAK=(-1,\infty)$ , i)  $OAK=(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$  ,  $OK=(-\infty,-1) \cup <1,\infty)$ , j)  $IK=OAK=(-1,1)$ ,  $OK = <-1,1)$  , k)  $IK=(-1,1)$ ,  $OK=OAK=<-1,1>$ , l)  $IK=(-4,-2)$ ,  $OK=OAK=<-4,-2>$ , m)  $OK=OAK=(1/e-1,e-1)$ , n)  $OK=OAK=(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ , o)  $IK=OK=OAK= \mathbb{R}$ , p)  $IK=OK=OAK=(-3,3)$ .