

MATEMATIKA V EKONOMII – seminář č. 8 – Substituce v neurčitém integrálu, určitý integrál

SUBSTITUCE

Používáme následující substituce (přehled je značně zjednodušený!). Pokud integrál obsahuje:

i) $\sqrt[n]{x} \Rightarrow x = t^n$

ii) $e^x \Rightarrow e^x = t$

iii) $a^x \Rightarrow a^x = t$

iv) závorku jako vnitřní funkci \Rightarrow závorka = t

v) $\cos^n x$ a $\sin^m x$: pokud jsou oba exponenty sudé, použijeme $t = \operatorname{tg} x$. Pokud je jedno z čísel m, n liché a druhé sudé \Rightarrow nahrazujeme pomocí t tu funkci, která má sudý exponent. Pokud jsou oba exponenty liché, nahradíme t funkci s vyšší mocninou. Při úpravách integrálu využíváme goniometrické vzorce. Obecně pak vždy funguje univerzální goniometrická

substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

vi) $\frac{\ln^k x}{x} \Rightarrow t = \ln x$

1. Vypočtěte:

a) $\int (2x+1)^4 dx$

b) $\int \sqrt{5x-2} dx$

c) $\int 4x\sqrt{x^2+1} dx$

d) $\int \frac{2}{(3x+4)^3} dx$

e) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

f) $\int \cos x \sin^3 x dx$

g) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

h) $\int e^{4x+5} dx$

i) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$

Výsledky: a) $\frac{(2x+1)^5}{10} + C$, b) $\frac{2(5x-2)^{3/2}}{15} + C$, c) $\frac{4(\sqrt{x^2+1})^3}{3} + C$, d) $-\frac{1}{3(3x+4)^2} + C$,

e) $\frac{\ln^3 x}{3} + C$, f) $\frac{\sin^4 x}{4} + C$, g) $\frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$, h) $\frac{e^{4x+5}}{4} + C$, i) $\ln|e^x+1| + C$.

URČITÝ INTEGRÁL

Newtonův-Leibnizův vzorec: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

1. Vypočtěte:

a) $\int_1^2 x^2 dx$

b) $\int_1^4 (2x^2 + x - 1) dx$

c) $\int_{-3}^3 (x^3 - x) dx$

d) $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

e) $\int_0^\pi \sin x dx$

f) $\int_2^7 \sqrt{x+2} dx$

g) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

h) $\int_1^5 |2-x| dx$

Výsledky:

a) 7/3, b) 93/2, c) 0, d) 2, e) 2, f) 38/3, g) 1, h) 5.