# Posloupnosti

**Nekonečnou číselnou posloupností** prvků číselné množiny **je funkce**, která každému přirozenému číslu $n$ přiřazuje reálné číslo.

definiční obor – $N$
obor hodnot - $R$

Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

**Zadání posloupnosti:**

1) $n$-tým členem

$$a_n = \frac{2n-1}{4n}, \qquad \left\{\frac{2n-1}{4n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

2) výčtem prvků

$$\{2,4,6,8,\ldots\}$$

3) rekurentně

$$a_{n+1} = 2a_n + 3, \quad a_1 = -2$$

4) graficky

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů.

# **Aritmetická posloupnost**

- rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se **diference** *d*

$$d = a_{n+1} - a_n$$

- platí: 1) $a_n = a_1 + (n-1)d$

2) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

**Příklad.** Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 1000.

# Geometrická posloupnost

- **podíl mezi dvěma po sobě jdoucími členy je konstantní, nazývá se** kvocient ***q***

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

- **platí:** **1)** $a_n = a_1 q^{n-1}$

**2)** $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

# Součet nekonečné geometrické posloupnosti

$$s = \frac{a_1}{1-q} \qquad |q| < 1$$

POSLOUPNOST KONVERGUJE

**Příklad.**

**Určete součet posloupnosti:**

**a)** $2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

**b) 2, 4, 8, 16, …**

## Monotónnost posloupnosti

**a)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je rostoucí, jestliže**

$$\forall n \in N: \quad a_n < a_{n+1}$$

**b)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je klesající, jestliže**

$$\forall n \in N: \quad a_n > a_{n+1}$$

## Omezenost posloupnosti
## (shora i zdola)

**a)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je omezená shora, jestliže**

$$\exists K \in R, \forall n \in N: \quad a_n \leq K$$

**b)** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **je omezená zdola, jestliže**

$$\exists L \in R, \forall n \in N: \quad a_n \geq L$$

!!!!!!!!! Příklad !!!!!!!!!

**Je dána posloupnost** $a_n = \dfrac{3n-1}{2n}$**.**

**Určete:**

**a)** $a_1 =$ **,** $a_2 =$ **,** $a_3 =$

$a_{100} =$ **,** $a_{1000} =$

$a_{n+1} =$

**b) monotónnost posloupnosti**

**c) max P = , min P = ,**

**sup P = , inf P**

**d) Je posloupnost omezená?**

# Limita posloupnosti

a) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se blíží konečnému číslu $A$, zapisujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, jedná se o vlastní limitu.

Posl. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

b) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se blíží nevlastnímu číslu $\infty$, resp. $(-\infty)$, zapisujeme $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, resp. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, jedná se o nevlastní limitu.

Posl. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

c) Posloupnost nemusí mít ani vlastní ani nevlastní limitu.

Posl. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je divergentní.

Např. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

## Definice vlastní limity posloupnosti

$$\lim a_n = A \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$$

# Definice nevlastní limity posloupnosti

$$\lim a_n = \infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : \quad a_n > M$$

$$\lim a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall M > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : \quad a_n < -M$$

| |
|---|
| Pravidla pro výpočet limit - strana 110, 111. |

Neurčité výrazy: str.112

# Výpočet limit

## A)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_r(n)}{Q_s(n)}=\begin{cases}\infty\,(-\infty) & r>s\\ 0 & r<s\\ podíl\ \dots & r=s\end{cases}$$

## Příklad.

1) $\lim \dfrac{4n^2-1}{5n^2+3n+2}=$

2) $\lim \dfrac{3n+5}{-4n^2+2}=$

3) $$\lim \frac{5n^3 - 2n + 2}{4n - 1} =$$

4) $$\lim \frac{5n^3 - 2}{1 - 4n} =$$

5) $$\lim \frac{\sqrt{9n^2 - 2} + \sqrt{4n^2 + 1}}{7n + 3} =$$

6) $$\lim \frac{-5n^3}{2n - 1} =$$

7) $$\lim \frac{-5n^3 - 2}{4n} =$$

8) $$\lim \frac{\sqrt{25n^2 - 2}}{7n + 3} =$$

B)

**1)** $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 7n} - 2n}$$

**2)** $$\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n + 2} - \sqrt{n}\right)$$

**3)** $$\lim_{n \to \infty} \left(n - \sqrt{n^2 + 5n}\right)$$

# C)

# D)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

Eulerovo číslo