Determinanty

Každé čtvercové matici A přiřadíme číslo, které budeme označovat $\det A$ a nazývat determinantem matice A.

Čtvercová matice A je regulární právě tehdy, jestliže $\det A \neq 0$.

Výpočet determinantu druhého řádu:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$

Výpočet determinantu třetího řádu (Sarussovo pravidlo):

Vlastnosti determinantu

1. Determinant matice A se rovná determinantu A^T.

2. Jestliže v matici vzájemně zaměníme dva rovnoběžné řádky (resp. dva rovnoběžné sloupce), <u>změní determinant znaménko</u>.

3. Společného nenulového činitele k všech prvků <u>jednoho řádku</u> (resp.

jednoho sloupce) matice lze vytknout před determinant.

4. Determinant matice se rovná nule, jestliže:
   a) všechny prvky aspoň jednoho řádku (resp. sloupce) jsou rovny nule,
   b) jeden řádek (resp. sloupec) matice je LK řádků (resp. sloupců) s ním rovnoběžných.

5. Jsou-li A, B čtvercové matice stejného řádu, platí :

$$\det(AB) = \det A \,.\, \det B.$$

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Soustavou m lineárních algebraických rovnic o n neznámých nazveme soustavu

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}
\qquad \text{(S)}
$$

Maticový zápis $\quad AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matice

$$A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se nazývá **rozšířená matice soustavy** (S).

nehomogenní soustava

homogenní soustava

Frobeniova věta

Soustava lineárních rovnic (S) má řešení tehdy a jen tehdy, když hodnost matice soustavy je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Nechť soustava lineárních rovnic (S) má řešení, h je hodnost matice soustavy a n je počet neznámých.

Potom platí:

a) je-li $h = n$, pak soustava (S) má právě jedno řešení,

b) je-li $h < n$, pak soustava (S) má nekonečně mnoho řešení, závislých na $n-h$ parametrech.

Příklad.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Řešíme Gaussovou eliminační metodou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 7 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right) \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Příklad.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 3 & 19 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 12 \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

Příklad.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 7 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right)$$

Cramerovo pravidlo

Pomocí Cramerova pravidla můžeme řešit soustavu lineárních rovnic, je-li matice soustavy <u>regulární</u>.

Nechť je dána soustava n rovnic o n neznámých.

Nechť matice A této soustavy je regulární (tj. $\det A \neq 0$).
Potom soustava má právě jedno řešení a platí:

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

kde B_i je matice, která vznikne z matice A tak, že i-tý sloupec matice A nahradíme aritmetickým vektorem pravých stran soustavy a ostatní sloupce ponecháme beze změny.

Příklad.

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu:

$$\begin{aligned} x \; - \; y + 2z &= 7 \\ 2x - 3y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y - z &= 12. \end{aligned}$$

Řešení:

Vypočteme příslušné determinanty:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\det B_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 17 & -3 & 5 \\ 12 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\det B_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 17 & 5 \\ 3 & 12 & -1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\det B_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 17 \\ 3 & -2 & 12 \end{vmatrix} = 6.$$

Daná soustava má právě jedno řešení:

$$x = \frac{\det B_x}{\det A} = \frac{18}{6} = 3,$$

$$y = \frac{\det B_y}{\det A} = \frac{-12}{6} = -2,$$

$$z = \frac{\det B_z}{\det A} = \frac{6}{6} = 1.$$