ÚPLNÉ FAKTOROVÉ PLÁNY

Mgr. Jiří Mazurek, Ph.D.

Plánování experimentů

- Výroba, průmysl
- Experiment:
  - změna obvyklých pracovních podmínek s cílem nalézt nejlepší pracovní postupy
  - získat hlubší poznatky o vlastnostech výrobku a výrobního procesu, které s těmito pracovními postupy souvisejí.

Nejlepší pracovní postupy

- Pro sledovaný ukazatel kvality *Y* výrobku identifikujeme faktory A, B …, které jej ovlivňují.
- Předpokládáme, že faktory se mohou pohybovat na různých úrovních,
- Cílem plánování experimentů je rozhodnout, které z faktorů významně ovlivňují ukazatele kvality
- Cílem je také určit optimální úrovně významných faktorů.
- <u>Cílem je tedy optimalizovat vstupy tak, aby byl optimalizován výstup.</u>

Faktor

- **Faktor** neboli parametr je nezávislá volená proměnná ovlivňující charakteristiku jakosti, která nás zajímá.
- Symbolicky označujeme faktory velkými tiskacími písmeny, tj. A, B, …C, atd. a jejich úrovně pro experiment označujeme jako A_1 (faktor A na první úrovni), A_2 (faktor A na druhé úrovni), atd.

Rozdělení faktorů

Rozlišujeme dva základní druhy faktorů:

- **regulovaný faktor** – je volená proměnná, o které si myslíme, že ovlivňuje odezvu a je přitom začleněna do experimentu. Hodnotu proměnné můžeme a zároveň chceme nastavit a udržovat.
- **šumový faktor** – je faktor, který negativně ovlivňuje odezvu. Takový faktor nemůžeme nebo nechceme při vlastní aplikaci nastavit a udržovat na požadované hodnotě, ale můžeme to provádět během experimentu.

- **Interakce faktorů:** kombinovaný účinek dvou faktorů
  - účinek jednoho faktoru je závislý na hodnotě nastavení druhého faktoru.
  - Interakci dvou faktorů A a *B* zapisujeme symbolicky jako *AB*.

Využití experimentů

- analytická simulace
- návrh a vývoj výrobku
- návrh a vývoj procesu
- zlepšování procesu
- testování a validace
- řešení problémů s jakostí ve výrobě
- analýza a zlepšování systému měření

Experimentální procedura

- Krok 1: plánování experimentu (např. pomocí techniky brainstorming)
- Krok 2: návrh experimentu
- Krok 3: provedení experimentu
- Krok 4: analýza experimentu.

Plánování experimentu

- Prvním krokem při *plánování experimentů* je ustanovení experimentálního týmu:
  - do týmu by měli být zahrnuti zástupci všech oddělení, která ovlivňují produkt nebo proces.
  - Velikost týmu by však neměla přesahovat rozumnou míru a měla by se pohybovat v rozmezí 2 – 15 lidí.
  - Brainstormingová sezení jsou věnována velkému množství otázek a na každou z nich musí experimentální tým nalézt správnou odpověď (určení cíle experimentu, definování charakteristiky jakosti a výběr faktorů a jejich úrovní pro realizaci experimentu).
- Výsledkem plánování experimentů je definovaný cíl, kterého chceme dosáhnout, a charakteristika jakosti, která je měřítkem pro posouzení, zda cíle bylo dosaženo. Kromě toho známe potenciální faktory, které nepravděpodobněji ovlivňují danou charakteristiku jakosti, a jejich úrovně.

Návrh experimentu

- Informace z plánování experimentu se následně využijí k návrhu experimentu.
- Výsledkem návrhu je experimentální plán, který představuje tabulkou vyjádřený rozpis jednotlivých experimentů – např. rozpis toho, na jaké úrovni budou nastaveny při tomto experimentu uvažované faktory.
- Každý řádek v tomto plánu reprezentuje konkrétní experimentální pokus, který bude realizován. (Postup na příkladu).

Provedení experimentu

- Experimenty můžeme provádět buďto v laboratorních nebo přímo v provozních podmínkách.
- Při experimentování ve výrobě můžeme narazit na „střety zájmů“ mezi potřebným množstvím produkce na jedné straně a mezi potřebným časem na experimenty, který snižuje vlastní produktivní čas výroby, na straně druhé.
- V praxi je obvyklé řešit tento problém tak, že se experimenty provádějí mimo pracovní dobu, např. na zvláštních nočních směnách, o sobotách a nedělích, apod.
- Kdykoli je to možné, měli bychom také experimenty provádět v náhodném pořadí.

Analýza výsledků experimentu

- Analýza výsledků experimentů spočívá především v nalezení kombinace faktorů, která dává nejlepší výsledek z hlediska sledovaného znaku jakosti a dále v určení relativního podílu jednotlivých faktorů na jakosti výstupu.
- Na závěr provádíme verifikaci výsledků ověřovacími experimenty.

Příklad

- Sleduje se, kolik stlačení (znak *Y*) vydrží pružina až do svého zničení v závislosti na těchto faktorech:
  - *L* = délka pružiny,
  - *G* = tloušťka drátu pružiny,
  - *T* = typ materiálu pružiny.
- Má se zjistit, které faktory jsou rozhodující pro životnost pružiny.
- Sestavme tabulku faktorů s jejich uvažovanými úrovněmi: pro každý faktor uvažujeme právě dvě úrovně, a proto se také v této souvislosti hovoří o dvouúrovňových plánech (existují také tříúrovňové plány, ale jsou méně typické):

faktor	označení	dolní úroveň	horní úroveň
		-	+
délka pružiny	*L*	10 cm	15 cm
tloušťka drátu	*G*	5 mm	7 mm
materiál	*T*	*A*	*B*

Úplný faktorový plán

- Existuje více způsobů jak sestavit plán, podle kterého se budou provádět jednotlivé pokusy. Mezi nejpoužívanější plány patří tzv. **úplný faktorový plán.** O úplném plánu se hovoří z toho důvodu, že v tabulce jsou obsaženy všechny možné kombinace úrovní všech uvažovaných faktorů. Symbol *Y* představuje výsledek pokusu:

pokus	*L*	*G*	*T*	*Y*
1	10	5	A	
2	15	5	A	
3	10	7	A	
4	15	7	A	
5	10	5	B	
6	15	5	B	
7	10	7	B	
8	15	7	B	

Kódování

Uvedený plán experimentu je nicméně výhodnější psát pomocí následující symboliky:

- Je-li každý z faktorů uvažován na dvou úrovních, je jeho dolní úroveň značena -1 (nebo jen „-„) a horní úroveň +1 („+“).
- *Víme, že počet pokusů, ze kterých je sestaven úplný experiment, se vypočítá při k faktorech pomocí vztahu: $n=2^k$. Tedy v tomto případě 8 pokusů)*

pokus	*L*	*G*	*T*	*Y*
1	-1	-1	-1	
2	+1	-1	-1	
3	-1	+1	-1	
4	+1	+1	-1	
5	-1	-1	+1	
6	+1	-1	+1	
7	-1	+1	+1	
8	+1	+1	+1	

Výsledky experimentu

- Po stanovení plánu je možné provést celý experiment a zaznamenat hodnoty sledovaného ukazatele *Y*.
- V našem případě byl každý pokus opakován právě dvakrát.
- Sestavením celé tabulky skončily přípravné a experimentální práce. Dále následují výpočty, jejichž cílem bude stanovit, které z faktorů ovlivňují významným způsobem životnost pružiny *Y*.

pokus	faktor	faktor	faktor	výsledek	výsledek	průměr
	L	G	T	Y_1	Y_2	$\bar{Y}$
1	-	-	-	77	81	79
2	+	-	-	98	96	97
3	-	+	-	76	74	75
4	+	+	-	90	94	92
5	-	-	+	63	65	64
6	+	-	+	82	86	84
7	-	+	+	72	74	73
8	+	+	+	92	88	90

Interakce faktorů

- Vzhledem k tomu, že pro určení optimální úrovně faktorů a pro sestavení modelu je důležité také vědět, které dvojice faktorů mají vzájemně významnou interakci, počítá se rovněž i vliv interakcí na *Y*.
- Může jít přitom nejen o dvoučlenné interakce, ale v případě celkem tří faktorů také o trojčlennou interakci: *LG*, *LT*, *GT*, *LGT*.
- Interakce se doplňují do tabulky, tj. původní tabulka se rozšíří o nové sloupce, a znaménka v těchto nových sloupcích se získají jako součin znamének ze stejného řádku a ze sloupců, z „jejichž záhlaví je interakce sestavena“.

Tabulka interakcí

pokus	*L*	*G*	*T*	*LG*	*LT*	*GT*	*LGT*
1	-	-	-	+	+	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+
4	+	+	-	+	-	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
6	+	-	+	-	+	-	-
7	-	+	+	-	-	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+

Efekty faktorů

- *Efektem faktoru* se rozumí změna ukazatele kvality *Y*, kterou způsobí přechod tohoto faktoru z dolní úrovně (-) na horní úroveň (+).
- Princip *znaménkové metody*, kterou budeme používat při výpočtu efektu faktoru, spočívá v tom, že se sečtou hodnoty ve sloupci *Y (průměr)*, avšak každá původní hodnota v tomto sloupci je před součtem „obohacena“ o znaménko, odpovídající znaménku u příslušného faktoru v odpovídajícím řádku. Takový součet se pak vydělí číslem *n*/2, kde *n* je celkový počet experimentálních pokusů.

$$efekt_L = \frac{-79+97-75+92-64+84-73+90}{4} = 18$$

$$efekt_{LG} = \frac{79-97-75+92+64-84-73+90}{4} = -1$$

Tabulka s efekty faktorů

číslo	L	G	T	LG	LT	GT	LGT	$\bar{Y}$
1	-	-	-	+	+	+	-	79
2	+	-	-	-	-	+	+	97
3	-	+	-	-	+	-	+	75
4	+	+	-	+	-	-	-	92
5	-	-	+	+	-	-	+	64
6	+	-	+	-	+	-	-	84
7	-	+	+	-	-	+	-	73
8	+	+	+	+	+	+	+	90
efekt	**18**	**1,5**	**-1**	**-8**	**0,5**	**6**	**-0,5**	

Rozptyl efektu faktorů

- Rozptyl efektu faktoru , který je stejný pro všechny faktory, má tvar:

$$\sigma_e^2 = \frac{4\sigma^2}{N}$$

- kde *N* je celkový počet pokusů (včetně opakování, pokud se pokusy opakují), v našem případě N=16.
- V případě opakovaných pokusů se σ^2 odhadne pomocí veličiny s^2, která se vypočítá dle vztahu (8.3):

$$s^2 = \frac{\upsilon_1 s_1^2 + \ldots + \upsilon_k s_k^2}{\upsilon_1 + \ldots + \upsilon_k}$$

- kde $v_i = n_i - 1$ je počet opakování (měření) při i -tém pokusu.
- ${s_i}^2$ je rozptyl měření *Y* z *i*-tého pokusu.
- Obdržíme tak odhad rozptylu (vztah 8.4):

$$s_e^2 = \frac{4s^2}{N}.$$

Odhad rozptylu efektu faktorů

Hodnotu veličiny s^2 vypočteme ze vztahu 8-3:

$$s^2 = \frac{8+2+2+8+2+8+2+8}{8} = 5$$

a výsledek dosadíme do vztahu 8-4. Dostáváme:

$$s_e^2 = \frac{4s^2}{N} = \frac{4 \cdot 5}{16} = 1,25 \text{ , tj. } s_e = 1,12 \text{ .}$$

Statistický test významnosti efektu faktoru

- **1.** Nulová hypotéza **Ho**: Efekt faktoru je nevýznamný,

  alternativní hypotéza **H1:** Efekt faktoru je významný.
- **2.** Testové kriterium:

$$t = \frac{efekt}{s_e}$$

- **3.** Kritická hodnota

$\mathrm{K} = t_{n_1+n_2+\ldots+n_k-n}(\alpha)$, kde $n_1,\ldots,n_k$ jsou počty opakování pokusů:

- *n* je počet pokusů bez opakování (počet řádků experimentálního plánu).
- **4.** Závěr testu: pro

$$|t| \geq t_{n_1+n_2+\ldots+n_k-n}(\alpha)$$

- se zamítá nulová hypotéza, což znamená, že efekt a tedy příslušný faktor je významný. V opačném případě je nevýznamný.

Statistický test - příklad

- Kritická hodnota: $t_{16-8}(0{,}05) = 2{,}306$

efekt	*t*
L = 18	**16,07**
G = 1,5	**1,34**
LG = -1,0	**-0,89**
T = -8,0	**-7,14**
LT = 0,5	**0,45**
GT = 6,0	**5,36**
LGT =-0,5	**-0,45**

- Kritickou hodnotu K = TINV(0,05,8) = 2,306 převyšuje v absolutní hodnotě testové kriterium faktorů *L*, *T* a interakce *GT*.
- To jsou tedy významné faktory a interakce, ostatní faktory vliv na životnost pružiny nemají.

Grafické hodnocení efektu faktoru

- Pokud máme jen jeden pokus, nelze spočítat rozptyl (s) a použije se následující grafická metoda.
- V grafu se na vodorovnou osu vynáší efekt a na svislou osu hodnota P:

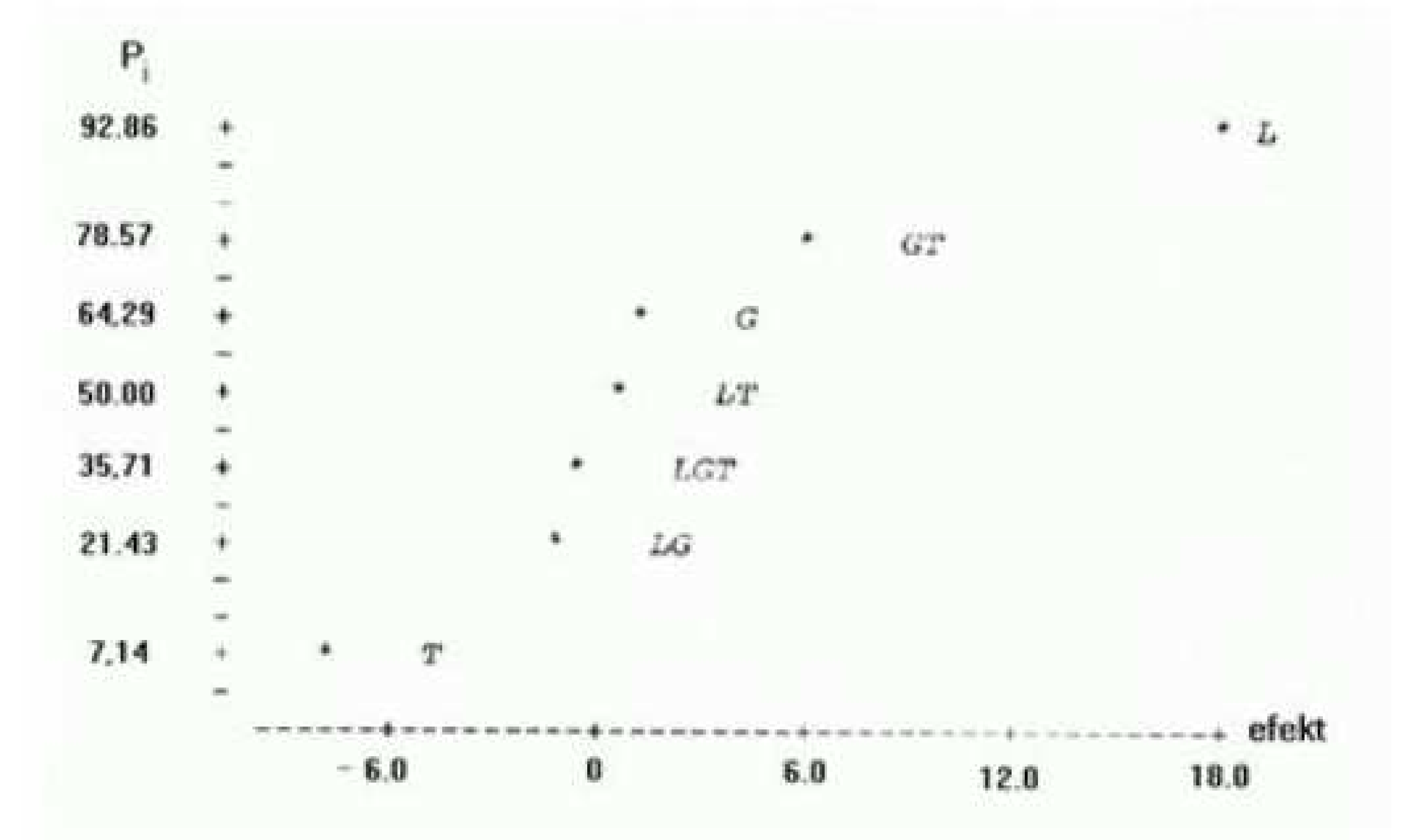
$$P_i = \frac{100(i - 0{,}5)}{m} \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

- kde *m* je počet faktorů a interakcí. (zde *m* = 7) a *i* je níže v tabulce uvedeno jako „číslo“. Faktory jsou seřazeny od nejmenšího efektu (č.1) po největší (č. 7)
- Významné budou faktory, které se nacházejí výrazně **mimo hlavní linii (přímku).** Při použití grafické metody je užitečné sestavit následující tabulku:

Číslo	1	2	3	4	5	6	7
Efekt	-8,0	-1,0	-0,5	0,5	1,5	6,0	18
Faktor	T	LG	LGT	LT	G	GT	L
P_i	7,14	21,42	35,71	50	64,29	78,57	92,86

Graf bodů pro vyhodnocení významnosti efektů faktorů

- V grafu je vidět, že mimo hlavní linii jsou ty faktory, u nichž testovací kritérium překročilo kritickou hodnotu. Jsou to faktory *L* (nejvýrazněji), *T* a interakce *GT*:



Grafy interakcí

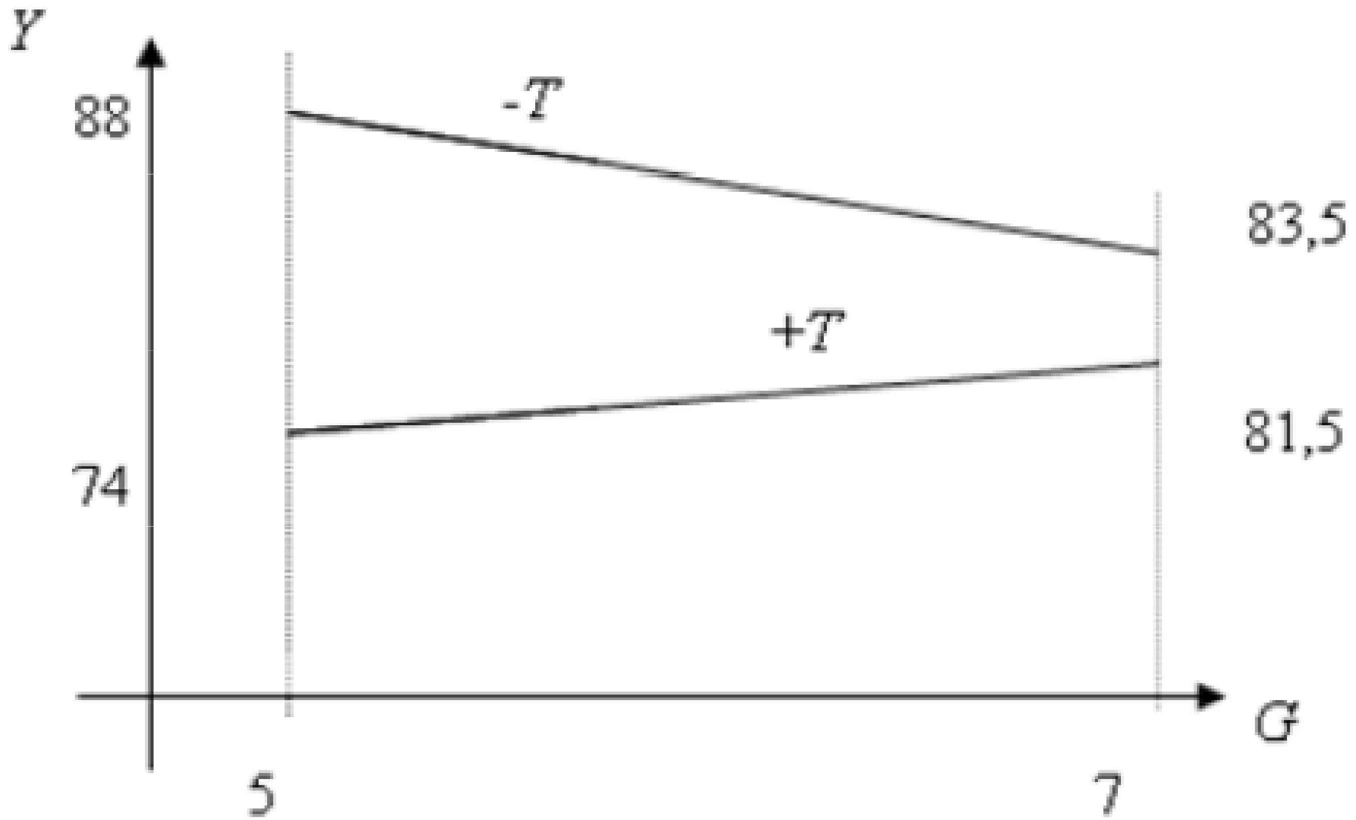
- Pro významné interakce se sestrojí grafy umožňující diskuzi o optimální úrovni jednotlivých faktorů, jež v této interakci vystupují.
- Tak například pro interakci *GT* můžeme sestrojit graf vlivu *G* na ukazatel kvality *Y* v závislosti na úrovni faktoru *T*.
- Z tabulky úplného plánu vybereme údaje, které odpovídají příslušným úrovním faktorů *G* a *T:*

G	***T***	**Odezva 1**	**Odezva 2**	**Průměr Y**
-	-	79	97	88
+	-	75	92	83,5

G	***T***	**Odezva 1**	**Odezva 2**	**Průměr Y**
-	+	64	84	74
+	+	73	90	81,5

Příklad: Graf interakce GT

- Z obrázku je vidět, že např. pro maximalizaci *Y* je nejlepší *T* na dolní úrovni (– T). Je také vidět, že interakce má jistý vliv na *Y*, jelikož průběh vlivu *G* se mění se změnou úrovně *T*.



Model experimentu 2^3

- Jakmile je stanoven efekt faktorů a jejich interakcí, je možné sestavit regresní model experimentu vyjadřující závislost sledovaného znaku *Y* na faktorech a jejich interakcích. Neúplný kvadratický model experimentu 2^3 s faktory *A*, *B*, *C* má tvar:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 A + b_2 B + b_3 C + b_{12} AB + b_{13} AC + b_{23} BC + b_{123} ABC$$

- Jde o regresi, v níž vystypují jako vysvětlující proměnné všechny hlavní faktory a všechny jejich interakce, avšak nikoliv druhé mocniny hlavních faktorů.
- Koeficienty se vypočítají jako polovina efektu příslušného faktoru, u něhož se nacházejí.
- Absolutní člen $b_0 = \bar{Y}$.
- Tyto odhady odpovídají metodě nejmenších čtverců aplikované na speciální matici regresorů *X*.

Příklad: Model experimentu

- V našem příkladu s pružinou dostáváme například regresní vztah:

$$\hat{y} = 81{,}75 + 9L - 4T + 3GT.$$

- Model experimentu má mnohostranné použití. Mezi nejvýznamnější patří:
- **1.** určení lokálně optimálních hodnot faktorů,
- **2.** stanovení směru tzv. dynamického plánování experimentů,
- **3.** lokální predikce ukazatele kvality $\hat{y}$.

Děkuji za pozornost