



# Základní parametrické testy středních hodnot

- **Nulové hypotézy se týkají středních hodnot distribucí, z nichž pochází pozorovaná data**
  - Rovnost střední hodnoty zadané konstantě
  - Shoda středních hodnot dvou nebo více náhodných veličin
- **Cílem je prokázat odchylky reprezentované alternativní hypotézou**
  - Střední hodnota je jiná než zadaná konstanta
  - Alespoň jedna veličina má jinou střední hodnotu než ostatní

- **jednovýběrové testy**
  - zkoumáme jednu náhodnou veličinu
  - data v jednom sloupci datové matice
- **testy pro závislé výběry**
  - párové pro dva výběry, vícevýběrové
  - data ve dvou nebo více sloupcích datové matice
- **testy pro nezávislé výběry**
  - dvouvýběrové, vícevýběrové
  - data v jednom sloupci, datová matice rozdělená na bloky různé délky určené jinou nominální proměnnou

## Předpoklady:

- **Nezávislost pozorování**
- **Nezávislost skutečných hodnot a chyb**
- **data pocházejí z normálního (Gaussova) rozdělení**
  - parametry normálního rozdělení
    - Střední hodnota  $\mu$ 
      - Neznámý parametr, jeho hodnotu testujeme
    - Rozptyl  $\sigma^2$ 
      - Je-li rozptyl známý, používáme z-testy
      - Je-li rozptyl neznámý a odhadujeme ho z dat, používáme Studentovy t-testy
- ***Skupiny se nepřekrývají***
- ***Shoda rozptylů ve skupinách***

# Jednovýběrový t-test

- **$H_0$** : střední hodnota je rovna zadané konstantě
  - $\mu = \mu_0$
- **$H_A$** : střední hodnota se liší od zadané konstanty
  - $\mu \neq \mu_0$
- data pochází z normálního rozdělení
  - před započítáním testování ověř normalitu dat
    - platí pro malé soubory ( $n < 30$ )
    - zákon velkých čísel
- rozptyl  $\sigma^2$  neznáme
  - v testové statistice použijeme jeho odhad na základě dat
- střední hodnotu  $\mu$  neznáme
  - střední hodnota je předmětem testování
  - v testové statistice se vyskytuje její odhad na základě dat

- **spočti výběrový průměr**
  - odhad střední hodnoty
  - $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- **spočti výběrový rozptyl resp. směrodatnou odchylku**
  - odhad rozptylu
  - $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
- **spočti testovou t-statistiku**
  - $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$
- **t-statistika má za platnosti nulové hypotézy Studentovo t-rozdělení o n-1 stupních volnosti**
  - kritické hodnoty jsou kvantily t-rozdělení
- **Pro velký počet pozorování lze t-rozdělení aproximovat normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem.**

# Příklad na jednovýběrový t-test






- **Běhají běžci sprint na 100m za 12s?**
  - změříme časy běžců
- **Spočteme průměr a výběrovou směrodatnou odchylku časů a otestujeme, zda střední hodnota je 12s.**
  - ověříme, zda data pochází z normálního rozdělení

$$\bar{x} = \frac{1}{5} (11,1 + 12,0 + 11,7 + 11,6 + 10,1) = 11,3$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{4} ((11,1 - 11,3)^2 + (12,0 - 11,3)^2 + (11,7 - 11,3)^2 + (11,6 - 11,3)^2 + (10,1 - 11,3)^2)} = 0,745$$

$$t = \frac{11,3 - 12}{0,745} \sqrt{5} = -2,101$$

$$df = 4 \quad t_{0,025} = -2,776 \quad t_{0,975} = 2,776$$

běžec	čas
	11,1
	12,0
	11,7
	11,6
	10,1

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Čas sprint 100m	5	11,3000	,74498	,33317

One-Sample Test

	Test Value = 12					
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
					Lower	Upper
Čas sprint 100m	-2,101	4	,104	-,70000	-1,6250	,2250

- dva závislé výběry
- $H_0$ : obě pozorované veličiny pochází z rozdělení se stejnou střední hodnotou
  - $\mu_1 = \mu_2$
- $H_A$ : střední hodnoty rozdělení pozorovaných veličin se liší
  - $\mu_1 \neq \mu_2$
- obě pozorované veličiny pochází z normálního rozdělení
  - před započítáním testování ověř normalitu dat
  - stačí ověřit normalitu rozdílu pozorovaných veličin
    - platí pro malé soubory ( $n < 30$ )
    - zákon velkých čísel
- rozptyly  $\sigma_1^2$  a  $\sigma_2^2$  neznáme
  - ani nepředpokládáme, že jsou stejné nebo se liší
  - v testové statistice použijeme jeho odhad rozptylu rozdílu obou veličin na základě dat
- střední hodnoty  $\mu_1$  a  $\mu_2$  neznáme
  - střední hodnoty jsou předmětem testování
  - netestujeme velikost středních hodnot, nýbrž jejich shodu
  - v testové statistice se vyskytuje odhad střední hodnoty rozdílu obou veličin na základě dat
- párový t-test se převádí na **jednovýběrový t-test rozdílu pozorování**
  - $y_i = x_{1i} - x_{2i}$
  - $\mu_0 = 0$

- **spočti výběrový průměr rozdílu pozorování**
  - odhad střední hodnoty
  - $\bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i$
- **spočti výběrový rozptyl resp. směrodatnou odchylku**
  - Odhad rozptylu
  - $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$
- **Spočti testovou t-statistiku**
  - $t = \frac{\bar{y}}{s} \sqrt{n}$
- **t-statistika má za platnosti nulové hypotézy Studentovo t-rozdělení o n-1 stupních volnosti**
  - Kritické hodnoty jsou kvantily t-rozdělení
- **pro velký počet pozorování lze t-rozdělení aproximovat normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem.**

# Příklad na párový t-test

- **zaběhnou běžci sprint na 100m stejně rychle v tretrách A jako v tretrách B?**
  - Každý běžec poběží dvakrát: jednou v tretrách A a jednou v tretrách B.
- **spočteme rozdíly obou časů u každého běžce**
- **spočteme průměr a výběrovou směrodatnou odchylku rozdílu časů a otestujeme, zda střední hodnota je 0 s**
  - ověříme, zda rozdíly pochází z normálního rozdělení

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(-1,9 + 0,6 - 0,6 + 0,3 - 0,3) = -0,38$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}((-1,9 + 0,38)^2 + (0,6 + 0,38)^2 + (-0,6 + 0,38)^2 + (0,3 + 0,38)^2 + (-0,6 + 0,38)^2)} = 0,973$$

$$t = \frac{-0,38}{0,973} \sqrt{5} = -0,873$$

$$df = 4 \quad t_{0,025} = -2,776 \quad t_{0,975} = 2,7765$$

běžec	čas A	čas B	rozdíl
	10,2	12,1	-1,9
	11,7	11,1	0,6
	13,6	14,2	-0,6
	11,8	11,5	0,3
	11,7	12,0	-0,3

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Čas v tretrách A	11,8000	5	1,20623	,53944
	Čas v tretrách B	12,1800	5	1,19875	,53610

Paired Samples Test

		Paired Differences				t	df	Sig. (2-tailed)	
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	95% Confidence Interval of the Difference				
					Lower				Upper
Pair 1	Čas v tretrách A - Čas v tretrách B	-,38000	,97314	,43520	-1,58831	,82831	-,873	4	,432



# Dvouvýběrový t-test

- dva nezávislé výběry
- $H_0$ : obě pozorované veličiny pochází z rozdělení se stejnou střední hodnotou
  - $\mu_1 = \mu_2$
- $H_A$ : střední hodnoty rozdělení pozorovaných veličin se liší
  - $\mu_1 \neq \mu_2$
- obě pozorované veličiny pochází z normálního rozdělení
  - před započítáním testování ověř normalitu obou veličin
  - platí pro malé soubory ( $n < 30$ )
  - zákon velkých čísel
- rozptyly  $\sigma_1^2$  a  $\sigma_2^2$  neznáme
  - musíme však ověřit, zda jsou stejné nebo se liší
  - podle výsledku ověření shody rozptylů zvolíme variantu **dvouvýběrového t-testu**
- střední hodnoty  $\mu_1$  a  $\mu_2$  neznáme
  - střední hodnoty jsou předmětem testování
  - netestujeme velikost středních hodnot, nýbrž jejich shodu

- spočti výběrové průměry
  - odhady středních hodnot
  - $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$     $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}$
- spočti výběrové rozptyly resp. směrodatné odchylky
  - odhady rozptylů
  - $s_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2$     $s_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (x_{2i} - \bar{x}_2)^2$
- otestuj, zda oba rozptyly se významně od sebe liší např. pomocí **Levenova testu**
- pokud neprokážeš odlišnost rozptylů, spočti testovou **t-statistiku** a její **stupně volnosti**
  - $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2}}}$     $df = n_1 + n_2 - 2$
- pokud prokážeš odlišnost rozptylů, spočti testovou **t-statistiku** a její **stupně volnosti**
  - **Welchův test**
  - $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$     $df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2-1}}$
- **t-statistika** má za platnosti nulové hypotézy **Studentovo t-rozdělení** o **df** stupních volnosti
  - kritické hodnoty jsou kvantily t-rozdělení
- Pro velký počet stupňů volnosti lze **t-rozdělení** aproximovat normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem.

# Příklad na dvouvýběrový t-test








- **Zaběhnou červení atleti sprint na 100m stejně rychle jako modří atleti?**
  - změříme časy červených a modrých běžců
- **spočteme průměry a výběrové směrodatné odchylky pro červené a modré atlety**
  - ověříme, zda data pochází z normálního rozdělení, pro červené a modré běžce zvlášť

$$\bar{x}_c = \frac{1}{4}(13,5 + 11,7 + 11,9 + 13,3) = 12,6 \quad \bar{x}_m = \frac{1}{3}(11,7 + 11,6 + 12,7) = 12,0$$

$$s_c = \sqrt{\frac{1}{4}((13,5 - 12,6)^2 + (11,7 - 12,6)^2 + (11,9 - 12,6)^2 + (13,3 - 12,6)^2)} = 0,93$$

$$s_m = \sqrt{\frac{1}{3}((11,7 - 12,0)^2 + (11,6 - 12,0)^2 + (12,7 - 12,0)^2)} = 0,61$$

- **pomocí Levenova testu jsme prokázali odlišnost rozptylů na 5% hladině významnosti**
- **spočteme t-statistiku a její stupně volnosti podle Welchova testu**
  - t-statistika má neceločíselný počet stupňů volnosti, proto kritické hodnoty nehledáme v tabulkách, ale necháme si spočítat dosaženou hladinu významnosti počítačem

běžec	čas
	13,5
	11,7
	11,9
	13,3
	11,7
	11,6
	12,7

$$t = \frac{12,6 - 12,0}{\sqrt{\frac{0,93^2}{4} + \frac{0,61^2}{3}}} = 1,03 \quad df = \frac{\left(\frac{0,93^2}{4} + \frac{0,61^2}{3}\right)^2}{\frac{\left(\frac{0,93^2}{4}\right)^2}{4-1} + \frac{\left(\frac{0,61^2}{3}\right)^2}{3-1}} = 4,97$$

Group Statistics

Běžec	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Čas Červeni	4	12,6	,93095	,46547
Modří	3	12,0	,60828	,35119

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of ...		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Diff	Std. Error Diff	95% CII of the Difference	
									Lower	Upper
Čas	Equal variances assumed	7,519	,041	,961	5	,381	,60	,624	-1,005	2,205
	Equal variances not assumed			1,029	4,971	,351	,60	,583	-,902	2,102

- dva a více nezávislých výběrů
  - výběry se v ANOVA nazývají skupiny
- $H_0$ : Všechny pozorované veličiny pochází z rozdělení se stejnou střední hodnotou
  - $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \dots = \mu_k$
- $H_A$ : Alespoň jedna střední hodnota se od ostatních liší
  - $\mu_j \neq \mu_k$
- všechny pozorované veličiny pochází z normálního rozdělení
  - před započítím testování ověř normalitu všech veličin
  - platí pro malé soubory ( $n < 30$ )
  - zákon velkých čísel
- rozptyly  $\sigma_j^2$  neznáme
  - musíme však ověřit, zda jsou stejné nebo se liší
  - je-li alespoň jeden rozdíl odlišný, použijeme některý ze speciálních testů
- střední hodnoty  $\mu_j$  neznáme
  - střední hodnoty jsou předmětem testování
  - netestujeme velikost středních hodnot, nýbrž jejich shodu
- pokud prokážeme neshodu středních hodnot, můžeme pokračovat vyšetřováním, které střední hodnoty se od sebe liší
  - simultánní testování shody středních hodnot ve dvojicích nezávislých výběrů

- spočti výběrové průměry ve skupinách a celkový průměr bez ohledu na skupiny
  - odhady středních hodnot
  - $\bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$      $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_k} x_{ij}$
- spočti součet čtverců ve skupinách a součet čtverců mezi skupinami
  - odhady vnitroskupinové a meziskupinové variability
  - $WSS = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_k} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$
  - $BSS = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{x}_j - \bar{x})^2$
- spočti testovou F-statistiku
  - $F = \frac{BSS/(k-1)}{WSS/(n-k)}$
- F-statistika má za platnosti nulové hypotézy Fisherovo F-rozdělení o  $k-1$  a  $n-k$  stupních volnosti
  - kritické hodnotou je kvantil F-rozdělení

# Příklad na jednoduchou analýzu rozptylu

- **Zaběhnou červení, modří a zelení atleti sprint na 100m stejně rychle?**
  - Změříme časy červených, modrých a zelených běžců
- **spočteme průměry pro červené, modré a zelené atlety a také celkový průměr**
  - Ověříme, zda data pochází z normálního rozdělení pro červené a modré běžce zvlášť

$$\bar{x}_c = \frac{1}{4} (13,5 + 11,7 + 11,9 + 13,3) = 12,6 \quad \bar{x}_m = \frac{1}{3} (11,7 + 11,6 + 12,7) = 12,0$$

$$\bar{x}_z = \frac{1}{2} (11,1 + 12,3) = 11,7 \quad \bar{x} = \frac{1}{9} (13,5 + 11,7 + 11,9 + 13,3 + 11,7 + 11,6 + 12,7 + 11,1 + 12,3) = 12,2$$

- **spočteme součty čtverců ve skupinách a mezi skupinami**

$$WSS = (13,5 - 12,6)^2 + (11,7 - 12,6)^2 + (11,9 - 12,6)^2 + (13,3 - 12,6)^2 + (11,7 - 12,0)^2 + (11,6 - 12,0)^2 + (12,7 - 12,0)^2 + (11,1 - 11,7)^2 + (12,3 - 11,7)^2 = 4,06$$










$$BSS = 4 * (12,6 - 12,2)^2 + 3 * (12,0 - 12,2)^2 + 2 * (11,7 - 12,2)^2 = 1,26$$

- **spočteme F-statistiku a její stupně volnosti**

- F-statistika má dvoje stupně volnosti

$$F = \frac{1,26 / (3 - 1)}{4,06 / (9 - 3)} = 0,931$$

$$df_1 = 2 \quad df_2 = 6 \quad F_{0,95} = 5,143$$

běžec	čas
	13,5
	11,7
	11,9
	13,3
	11,7
	11,6
	12,7
	11,1
	12,3

ANOVA

Čas sprint 100m					
	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	1,260	2	,630	,931	,444
Within Groups	4,060	6	,677		
Total	5,320	8			

# Analýza rozptylu opakovaných měření

- Dva a více závislých výběrů
- $H_0$ : všechny pozorované veličiny pochází z rozdělení se stejnou střední hodnotou
  - $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \dots = \mu_k$
- $H_A$ : alespoň jedna střední hodnota se od ostatních liší
  - $\mu_j \neq \mu_k$
- všechny pozorované veličiny pochází z normálního rozdělení
  - před započítáním testování ověř normalitu všech veličin
  - platí pro malé soubory ( $n < 30$ )
- rozptyly  $\sigma_j^2$  neznáme
  - rozptyly nemusí být shodné
  - rozptyly všech párových rozdílů však shodné být musí, sféricita
- střední hodnoty  $\mu_j$  neznáme
  - střední hodnoty jsou předmětem testování
  - netestujeme velikost středních hodnot, nýbrž jejich shodu
- pokud prokážeme neshodu středních hodnot, můžeme pokračovat vyšetřováním, které střední hodnoty se od sebe liší
  - simultánní testování shody středních hodnot ve dvojicích závislých výběrů

- spočti výběrové průměry v řádcích, ve sloupcích a celkový průměr přes všechny řádky a sloupce

- Odhady středních hodnot

$$\bar{x}_{i\cdot} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x_{ij} \quad \bar{x}_{\cdot j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$$

$$\bar{x}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{nk} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n x_{ij}$$

- spočti součet čtverců ve sloupcích, součet čtverců mezi sloupci a součet čtverců mezi řádky

- odhady vnitroskupinové, meziskupinové a mezisubjektové variability

$$WSS = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{\cdot j})^2$$

$$BSS = \sum_{j=1}^k n(\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2 \quad SSS = \sum_{i=1}^n k(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot\cdot})^2$$

- spočti testovou F-statistiku

$$F = \frac{BSS / (k - 1)}{(WSS - SSS) / [(n - 1)(k - 1)]}$$

- F-statistika má za platnosti nulové hypotézy Fisherovo F-rozdělení o  $k-1$  a  $(n-1)*(k-1)$  stupních volnosti

- kritickou hodnotou je kvantil F-rozdělení

# Příklad na analýzu rozptylu opak. měření

- Zaběhnou běžci sprint na 100m stejně rychle v tretrách A v tretrách B i v tretrách C?
  - Každý běžec poběží třikrát: jednou v tretrách A, jednou v tretrách B a jednou v tretrách C
- spočteme řádkové průměry sloupcové průměry a celkový průměr
  - Ověřme, zda všechny sloupcové rozdíly mají stejný rozptyl

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{3}(10,2 + 12,1 + 11,2) = 11,17 \quad \bar{x}_m = \frac{1}{3}(11,7 + 11,1 + 12,2) = 11,67 \quad \bar{x}_z = \frac{1}{3}(13,6 + 14,2 + 13,3) = 13,70$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{3}(11,8 + 11,5 + 10,8) = 11,37 \quad \bar{x}_z = \frac{1}{3}(11,7 + 12,0 + 11,9) = 11,87$$

$$\bar{x}_A = \frac{1}{5}(10,2 + 11,7 + 13,6 + 11,8 + 11,7) = 11,80 \quad \bar{x}_B = \frac{1}{5}(12,1 + 11,1 + 14,2 + 11,5 + 12,0) = 12,18$$

$$\bar{x}_C = \frac{1}{5}(12,1 + 11,1 + 14,2 + 11,5 + 12,0) = 11,88$$

$$\bar{x} = \frac{1}{15}(10,2 + 11,7 + 13,6 + 11,8 + 11,7 + 12,1 + 11,1 + 14,2 + 11,5 + 12,0 + 12,1 + 11,1 + 14,2 + 11,5 + 12,0) = 11,95$$

- spočteme součty čtverců ve sloupcích, mezi sloupci a mezi řádky

$$WSS = (10,2 - 11,80)^2 + (11,7 - 11,80)^2 + (13,6 - 11,80)^2 + (11,8 - 11,80)^2 + (11,7 - 11,80)^2 + (12,1 - 12,18)^2 + (11,1 - 12,18)^2 + (14,2 - 12,18)^2 + (11,5 - 12,18)^2 + (12,0 - 12,18)^2 + (11,2 - 11,88)^2 + (12,2 - 11,88)^2 + (13,3 - 11,88)^2 + (10,8 - 11,88)^2 + (11,9 - 11,88)^2 = 15,32$$

$$BSS = 5[(11,80 - 11,95)^2 + (12,18 - 11,95)^2 + (11,88 - 11,95)^2] = 0,40$$


$$SSS = 3[(11,17 - 11,95)^2 + (11,67 - 11,95)^2 + (13,70 - 11,95)^2 + (11,37 - 11,95)^2 + (11,87 - 11,95)^2] = 12,31$$

- spočteme F-statistiku a její stupně volnosti

- F-statistika má dvoje stupně volnosti

$$F = \frac{0,40 / (3 - 1)}{(15,32 - 12,31) / [(5 - 1) * (3 - 1)]} = 0,534$$

$$df_1 = 2 \quad df_2 = 8 \quad F_{0,95} = 4,45$$

běžec	čas A	čas B	čas C
	10,2	12,1	11,2
	11,7	11,1	12,2
	13,6	14,2	13,3
	11,8	11,5	10,8
	11,7	12,0	11,9

Tests of Within-Subjects Effects

Source	Type III SS	df	Mean Square	F	Sig.
tretry	,401	2	,201	,534	,606
	,401	1,855	,216	,534	,594
	,401	2,000	,201	,534	,606
	,401	1,000	,401	,534	,505

# Kuchařka základních parametrických testů o středních hodnotách

- **jeden výběr = jeden sloupec dat**
  - **jednovýběrový t-test**
- **nezávislé výběry = jeden sloupec dat + identifikátor bloků datové matice**
  - dva bloky
    - **dvouvýběrový t-test pro shodné rozptyly ve skupinách**
    - **dvouvýběrový Welchův t-test pro neshodné rozptyly ve skupinách**
  - více než dva bloky
    - **jednoduchá ANOVA**
- **závislé výběry = několik sloupců dat**
  - dva sloupce
    - **párový t-test**
  - více než dva sloupce
    - **ANOVA pro opakovaná měření**