

CVIČENÍ č. 7: Funkce jedné reálné proměnné a limita funkce

1. Určete vlastnosti funkcí a limity v nevlastních bodech:

a) $y = |x|$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = x^2 + 3$ d) $y = 3^x$

2. Určete funkci inverzní k dané funkci a načrtněte oba grafy:

a) $y = 2x - 1, D(f) = (-2, 3)$ b) $y = \frac{1}{x}$ c) $y = \sqrt{x+1}$ d) $y = \log(x+2)$

3. Znáte grafy goniometrických a cyklometrických funkcí.

4. Funkce $f(x) = 2x$ je definována na intervalu $x \in \langle -4, 2 \rangle$, funkce $g(x) = \frac{x}{3}$ je definována pro $x \in \langle -3, 3 \rangle$. Určete funkční předpisy pro následující funkce a načrtněte jejich grafy:

a) $|f|$ b) $f + g$ c) $f - g$ d) $f \cdot g$ e) $\frac{f}{g}$

5. Rozhodněte, zda následující funkce jsou sudé nebo liché, a stanovte jejich definiční obor.

a) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$, b) $g(x) = x^3 - 2$ c) $h(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$

6. Určete definiční obor následujících funkcí:

a) $y = \sqrt{3x-6} + \frac{x}{x-4}$ b) $y = \arcsin(x-2)$ c) $y = \arccos \sqrt{2x}$

d) $y = \arcsin \frac{3x}{x+5}$ e) $y = (x-4)^{-1} \ln(x^2+4)^{-1}$ f) $y = 3\sqrt{2x-x^2}$

g) $y = \log(4x+2)$ h) $y = \frac{\log(x^2-4x)}{\sqrt{1-x}}$

1. Vypočtěte limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3)$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+5}{x-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 4} \log(x-3)$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

2. Vypočtěte limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x-3}$ c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 2x - 8}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x-1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3} - 1}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^x$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$

3. Vypočtěte limity:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x}$

4. Vypočtěte limity v nevlastních bodech:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+4}{x-8}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+13}{16x+5}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{x^3+7}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2x+1}{2x^3+x^2-1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \log(x-2)}{2x-4}$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4}{2^x}$ g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-6}{4x-8}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+4}{x-8}$

5. Z grafu funkce určete limitu funkce v krajních bodech definičního oboru:

a) $y = \log x$ b) $y = \arctg x$ c) $y = \arcsin x$ d) $y = \cos x$
 e) $y = 2^x$, f) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ g) $y = \frac{x}{x^2+1}$ h) $y = \operatorname{tg} x$

6. Vypočtěte jednostranné limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+5}{x-2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x$ f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x+2}$ h) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x+1}$

7. Určete vodorovnou, svislou, případně šikmou asymptotu funkcí:

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ b) $y = e^x$ c) $y = \frac{x}{x-3}$ d) $y = \frac{x^2}{x-1}$
 e) $y = \frac{x^3}{x^2+3}$ f) $y = 4x + \frac{2}{x^2-1}$ g) $y = \frac{xe^x}{e^x-1}$

Samostatné cvičení:

1. Určete vlastnosti funkce a limity v nevlastních bodech: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2. Určete definiční obor následujících funkcí:

a) $y = \sqrt{5x-10} + \frac{x}{2x-3}$ b) $y = \arcsin(x+3)$ c) $y = \log(x^2-4)$

3. Vypočtěte limity:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2-8)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4x}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x-2}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-6}{9x+1}$ g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3+2x+1)$

Výsledky:

1. Funkce je klesající, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}^+$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$.

2. a) $D(f) = \langle 2, \infty \rangle$, b) $D(f) = \langle -4, -2 \rangle$, c) $D(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

3. a) 10, b) 4, c) $-1/4$, d) 0, e) +nekonečno, f) $1/3$, g) – nekonečno.