



Ekonomicko-matematické metody 2

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

Matematický aparát MME

(1) Funkce 1 proměnné

„ y je funkcí x “ $y = f(x)$

y ... závisle proměnná

x ... nezávisle proměnná

Př.: $HV = f(ZP)$

„Hrubá výroba“ je funkcí „základních prostředků“

Matematický aparát MME ...

(2) Funkce více proměnných: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
„ y je funkcí x_1, x_2, \dots, x_n “

(2) Matice (vektory)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{31} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

typ $(m \times n)$

Matematický aparát MME ...

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{— vektor = speciální matice typu } n \times 1 \text{ („sloupcový vektor“)}$$

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad \text{— transponovaný (řádkový) vektor – matice typu } 1 \times n$$

Matematický aparát MME ...

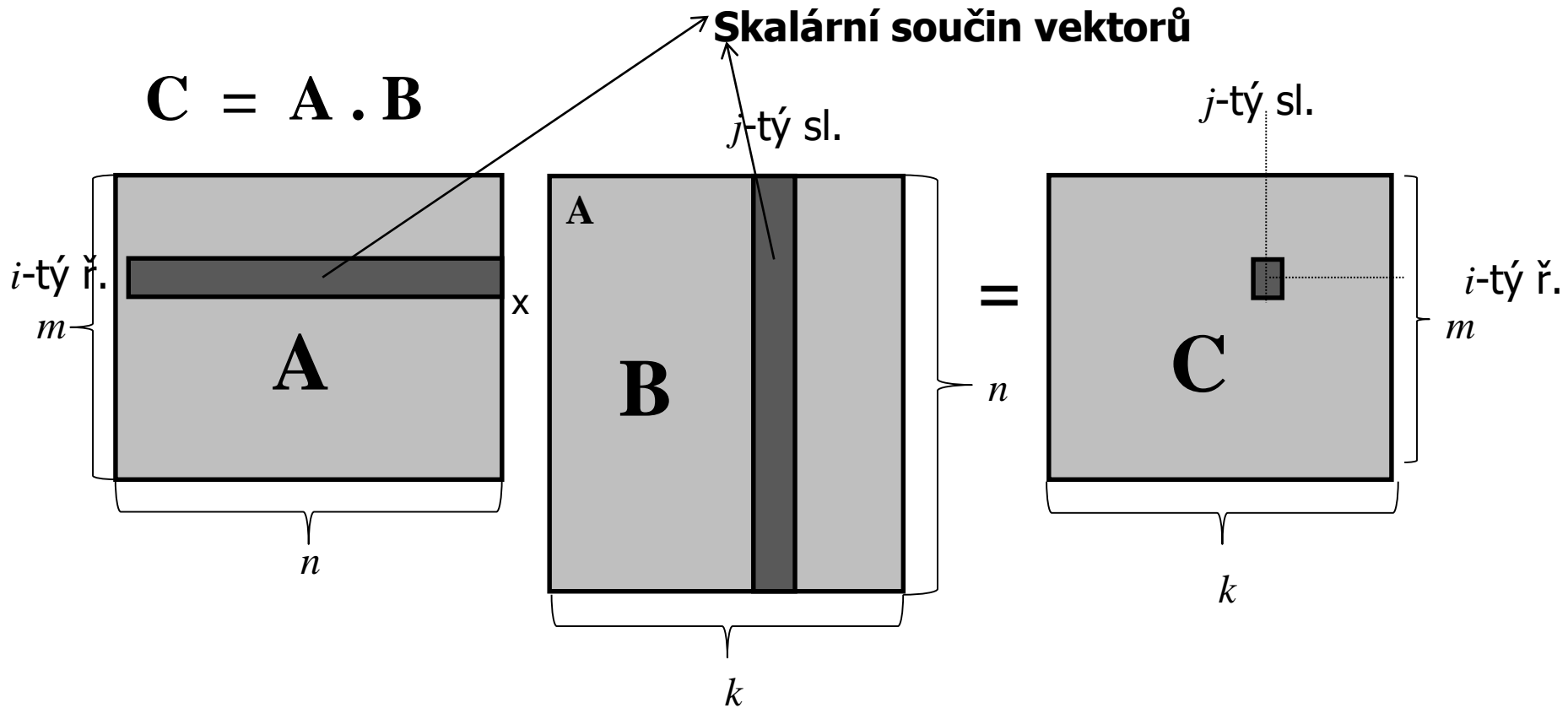
Násobení vektorů (tj. matic $(1 \times n)$ „krát“ $(n \times 1)$)
tzv. *skalární součin vektorů*

$$\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T \cdot \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \text{„číslo“}$$

T — *transpozice* (otočení podle hlavní diagonály)

Násobení matic



$$(m \times n) \cdot (n \times k) = (m \times k)$$

Příklad 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.2 + 3.3 \\ 4.1 + 5.2 + 6.3 \\ 7.1 + 8.2 + 9.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Příklad 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 + 2.2 + 3.3 & 1.3 + 2.2 + 3.1 \\ 4.1 + 5.2 + 6.3 & 4.3 + 5.2 + 6.1 \\ 7.1 + 8.2 + 9.3 & 7.3 + 8.2 + 9.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 32 & 28 \\ 50 & 46 \end{bmatrix}$$

Příklad 3

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.x_1 + & 4.x_2 + & 7.x_3 \\ 2.x_1 + & 5.x_2 + & 8.x_3 \\ 3.x_1 + & 6.x_2 + & 9.x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{4.x}_2 + \mathbf{7.x}_3 = \mathbf{10}$$

$$\mathbf{2.x}_1 + \mathbf{5.x}_2 + \mathbf{8.x}_3 = \mathbf{11}$$

$$\mathbf{3.x}_1 + \mathbf{6.x}_2 + \mathbf{9.x}_3 = \mathbf{12}$$

Inverzní matice A^{-1}

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{—} \quad \textit{Jednotková matice}$$

(Jiné značení: „ E “)

Jednotková matice je neutrální vzhledem k násobení:

$$I \cdot A = A \cdot I = A$$

Nechť A je regulární (angl. non-singular)

čtvercová matice typu $n \times n$

(ekvivalentně: $\det A \neq 0$, popř. hodnost $A = n$)

Potom má *inverzní matici* A^{-1} , pro kterou platí:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{násobíme zleva } \mathbf{A}^{-1})$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$

\mathbf{E}

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$$

Příklad 4

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ -\frac{11}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Příklad 4 ...

Řešení:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ -\frac{11}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Extrém funkce (maximum)

$f(x)$... reálná funkce definována na množině $X \subseteq \mathbf{R}^n$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{výrobní program} \quad \text{zisk}} f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$\max_{x \in X} f(x)$... maximální hodnota f na X

$\arg \max_{x \in X} f(x)$... bod (vektor) nebo množina bodů (vektorů) z X v němž (kde) je dosažena maximální hodnota funkce f na X

Extrém funkce (minimum)

$f(x)$... reálná funkce definována na množině $X \subseteq \mathbf{R}^n$

$\min_{x \in X} f(x)$... minimální hodnota f na X

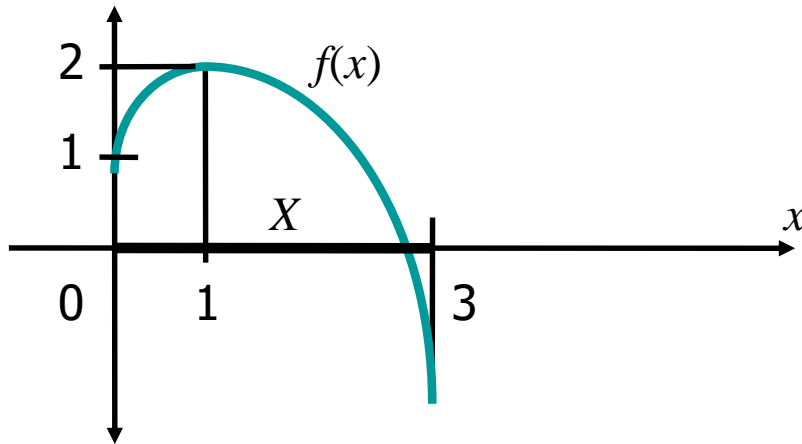
$\arg \min_{x \in X} f(x)$.. množina bodů z X v níž je dosažena
minimální hodnota funkce f na X

Extrém funkce ...

Příklad 5 a)

$$f(x) = 2 - (x-1)^2, \quad X = [0; 3]$$

$$\max_{x \in X} f(x) = 2, \quad \arg \max_{x \in X} f(x) = \{1\}$$



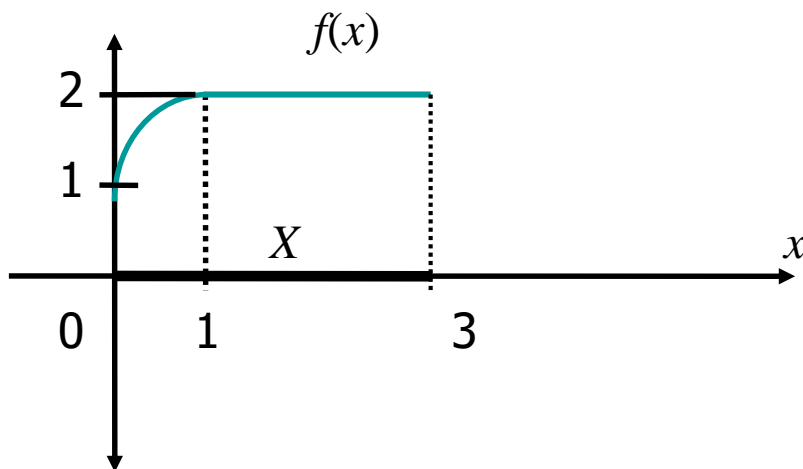
Extrém funkce ...

Příklad 5 b)

$$f(x) = 2 - (x-1)^2, \quad x \in [0, 1] = X$$

$$= 1, \quad x \in [1, 3]$$

$$\max_{x \in X} f(x) = 2, \quad \arg \max_{x \in X} f(x) = [1, 3]$$



$$\min_{x \in X} f(x) = 1$$

$$\arg \min_{x \in X} f(x) = \{0\}$$

Matematické programování

Základní úloha

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX}; \quad (1)$$

za podmínek

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

.....

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

(2)

Matematické programování

Základní úloha

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX};$ (1) účelová funkce

za podmínek

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

.....

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

(2) omezující podmínky
(mohou chybět)

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

podmínky nezápornosti

Příklad 6

Nalezněte dvě kladná čísla s maximálním možným součinem, jejich součet je nejvýše 10:

$$x_1 x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

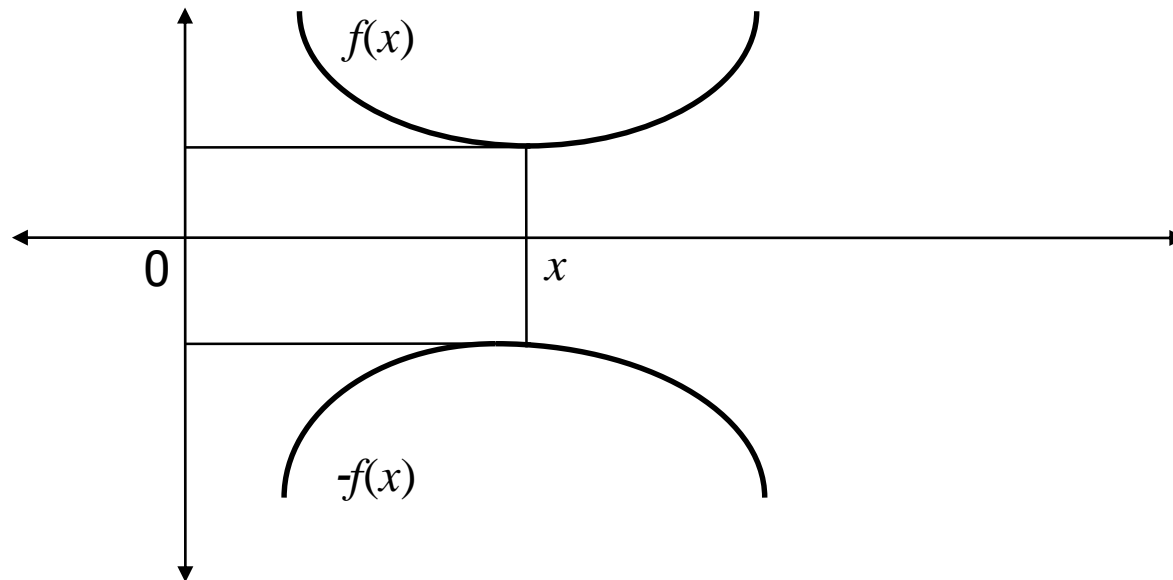
Řešení na semináři pomocí Excel – Řešitel

(Výsledek: $x_1^* = 5$, $x_2^* = 5$)

Základní úloha ...

$$\min f(x) = - \max -f(x)$$

$$x^* = \arg \min f(x) = \arg \max (-f(x))$$



Převedení nerovností na rovnosti

přídavné proměnné: $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$:

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_{n+1} = b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_{n+2} = b_2$$

$$\dots\dots\dots$$
$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) + x_{n+m} = b_m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = n+1, \dots, n+m$$

Převedení rovnice na nerovnost

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_j$$

↓ ↑

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_j \quad , \quad g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j$$

Příklad 6 – převedení omezujících podmínek na rovnosti

$$x_1 x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

Ověření na semináři pomocí Excel - Řešitel

Podmínka nezápornosti proměnných

Každé číslo x (neomezené ve znaménku) lze zapsat jako rozdíl dvou nezáporných čísel x^+ a x^- :

$$x = x^+ - x^- ,$$

kde

$$x^+, x^- \geq 0$$

Poznámka:

Celočíselnost proměnné x jako nelineární podmínka

Celočíselnost proměnných x_1, x_2, \dots, x_n (*matematická kuriozita*):

$$\sum_{j=1}^n \sin^2 \pi x_j \leq 0$$

Proměnná x_j je binární ($x_j \in \{0, 1\}$):

$$x_j^2 - x_j = 0$$

Lokální a globální extrémý

x^0 ... lokální **maximum** funkce $f(x)$... (lokální **minimum** funkce)

\exists okolí U bodu x^0 : $\forall x \in U \subset X$ platí $f(x) \leq f(x^0)$ ($f(x) \geq f(x^0)$)

x^* ... globální **maximum** $f(x)$... (globální **minimum** funkce)

$\forall x \in X$ platí $f(x) \leq f(x^0)$ ($f(x) \geq f(x^0)$)

