



# **Ekonomicko-matematické metody 4**

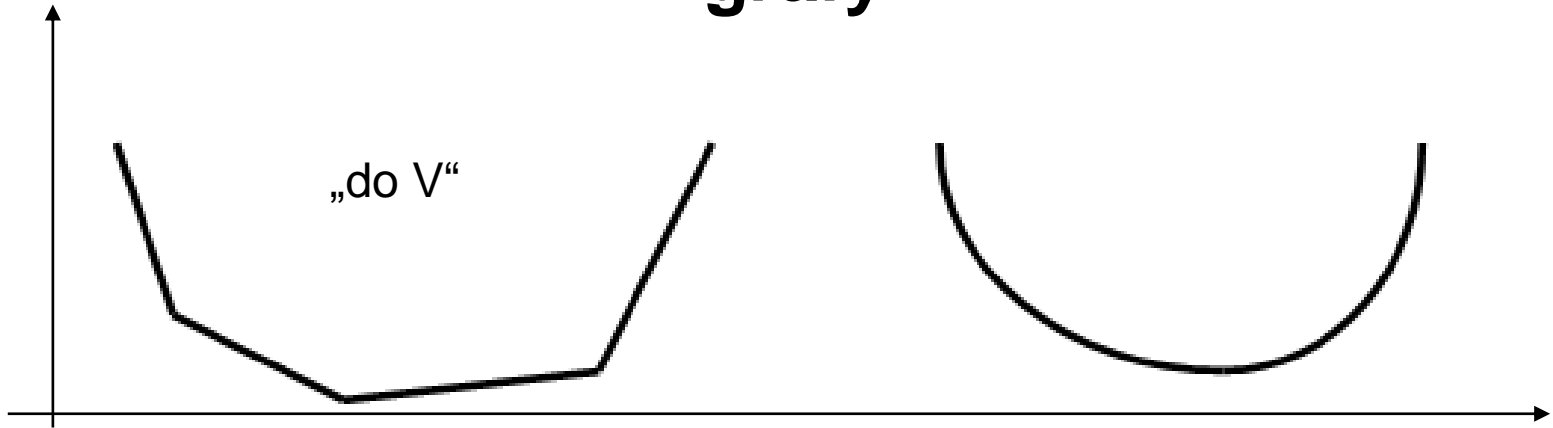
---

Prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.

přednáší

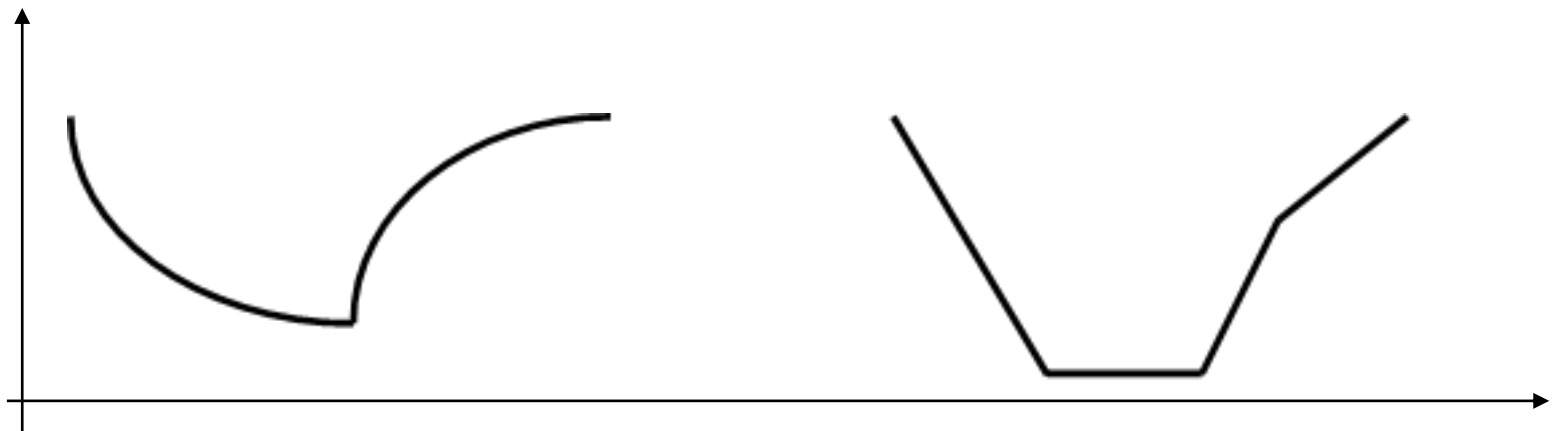
doc. RNDr. David Bartl, Ph.D.

# Konvexní a konkávní funkce v $\mathbb{R}^1$ ... grafy



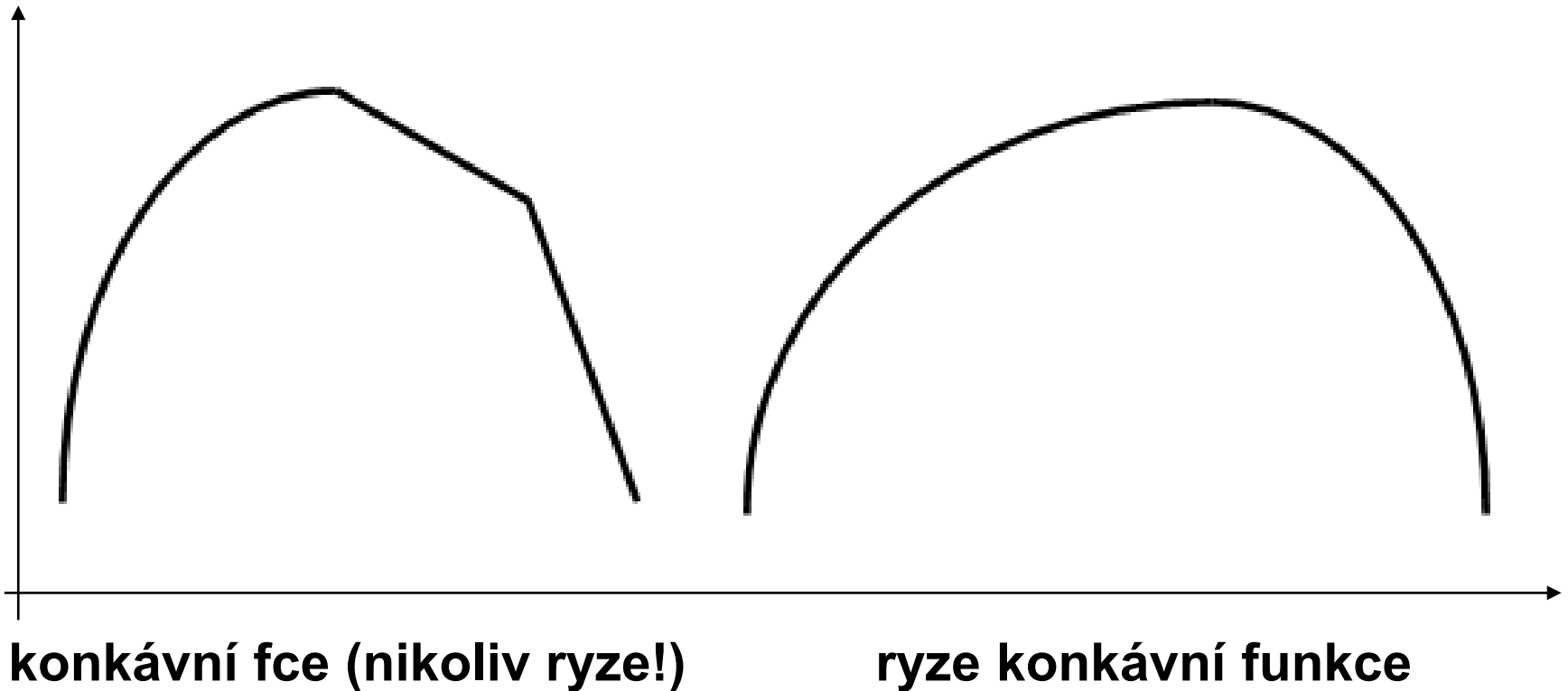
konvexní fce (nikoliv *ryze!*)

ryze konvexní fce (parabola)



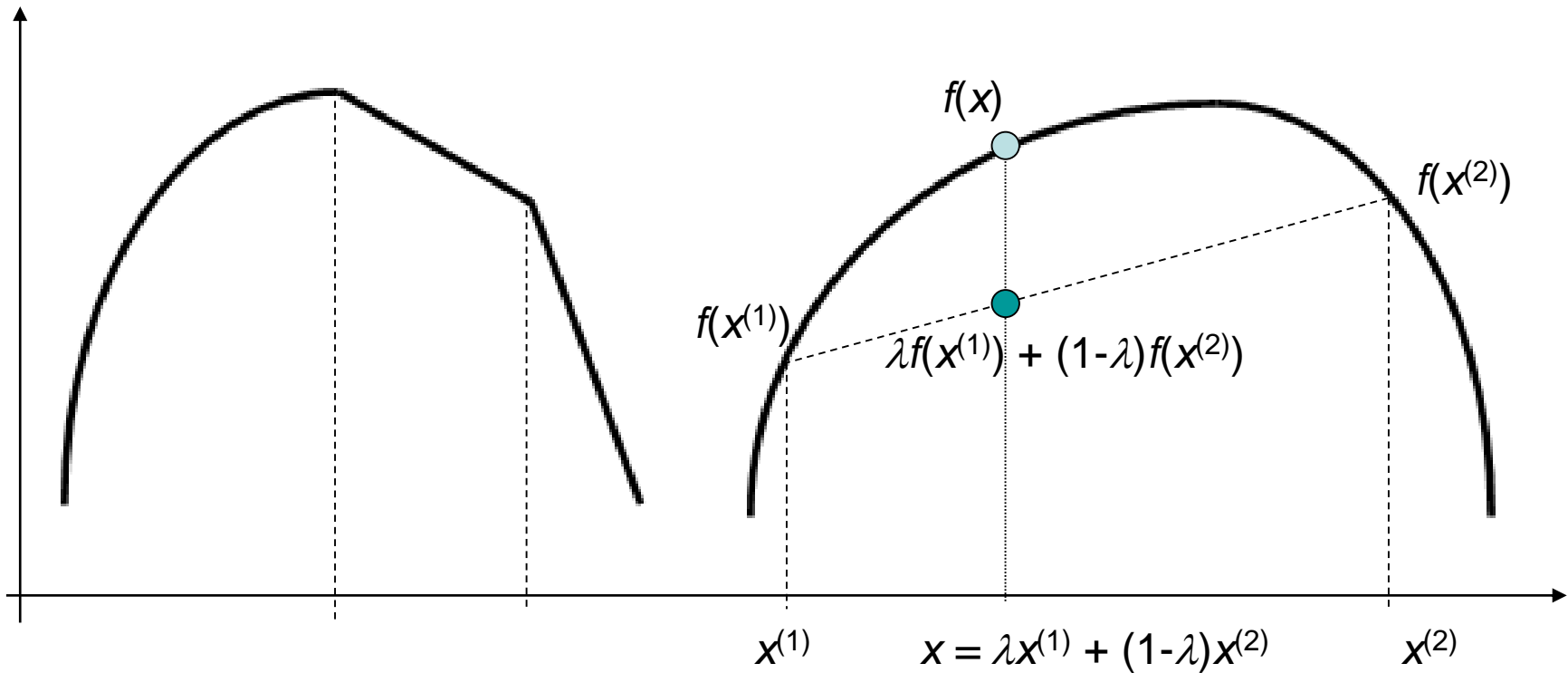
tyto funkce *nejsou* konvexní!!!

# Konvexní a konkávní funkce v $\mathbb{R}^1$



# Konvexní a konkávní funkce

## Jak to vyjádřit matematicky?



**konkávní fce (nikoliv ryze!)**

**ryze konkávní funkce**

# Konvexní a konkávní funkce

## Jak to vyjádřit matematicky?

*(konkávní)*

Funkce  $f$  je **konvexní** na konvexní množině  $X \subset \mathbf{R}^n$  jestliže pro každé dva body  $x^{(1)}, x^{(2)}$  z  $X$  a pro každá dvě čísla  $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0$  taková že  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  platí:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) \leq \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)}).$$

$(\geq)$

**Anebo ekvivalentně:**

... pro každé číslo  $0 \leq \lambda \leq 1$ , platí:

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}) \leq \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda)f(x^{(2)}).$$

$(\geq)$

# Konvexní a konkávní funkce ...

*(ryze konkávní)*

Funkce  $f$  je **ryze konvexní** na konvexní množině  $X \subset \mathbf{R}^n$  jestliže pro každé dva body  $x^{(1)}, x^{(2)}$  z  $X$  a každá dvě čísla  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  taková že  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  platí:

$$f(\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}) < \lambda_1 f(x^{(1)}) + \lambda_2 f(x^{(2)})$$

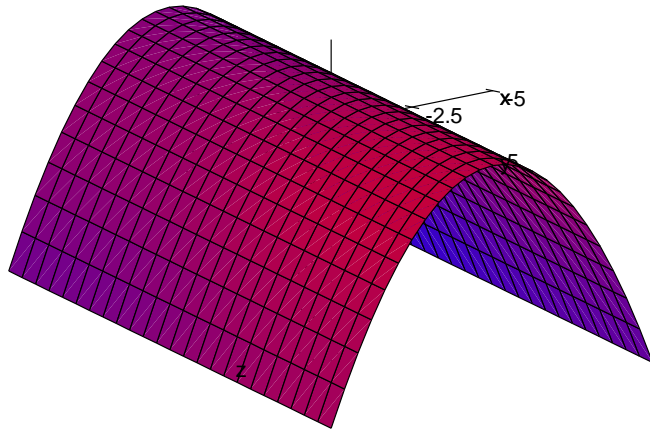
(>)

**Zřejmě platí:** Funkce  $f$  je na  $X \subset \mathbf{R}^n$  konkávní (resp. ryze konkávní)

jestliže je funkce  $-f$  konvexní (resp. ryze konvexní)

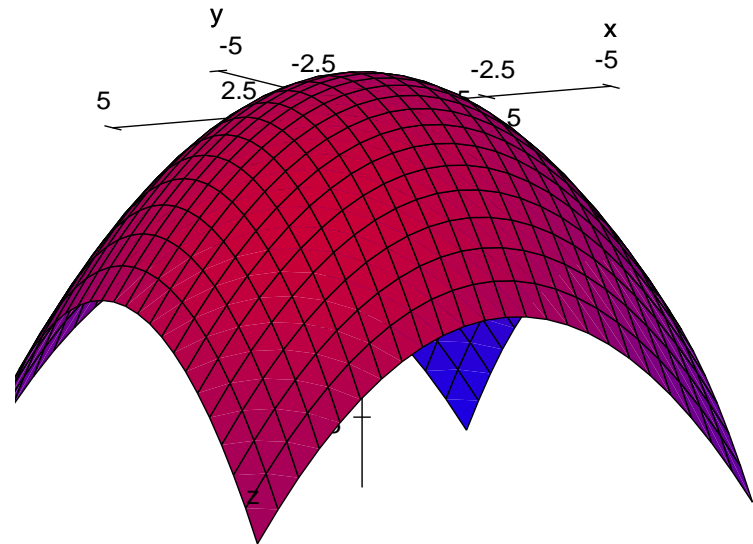
**Poznámka:** Zobecnění pro funkce  $n$  proměnných

# Konvexní a konkávní funkce v $\mathbb{R}^2$



$$f(x_1, x_2) = 5 - x_1^2$$

**konkávní fce (nikoliv ryze!)**



$$f(x_1, x_2) = 3 - x_1^2 - x_2^2$$

**ryze konkávní funkce**

# Konvexní a konkávní funkce ...

„**Lokální extrémý jsou zároveň globální!!!**“

**Věta 3:** Jestliže  $x^0$  je **lokální** maximum funkce  $f(x)$  na  $X$  a funkce  $f(x)$  je **konkávní** na  $X$ , potom  $x^0$  je **globálním** maximem funkce  $f(x)$  na  $X$ , tj.  $x^0 = \arg \max_{x \in X} f(x)$

Je-li  $f(x)$  navíc **ryze** konkávní na  $X$ , potom  $x^0$  je **jediným** globálním maximem.

**Poznámka 1:** Analogicky pro lokální minimum a konvexní funkci...

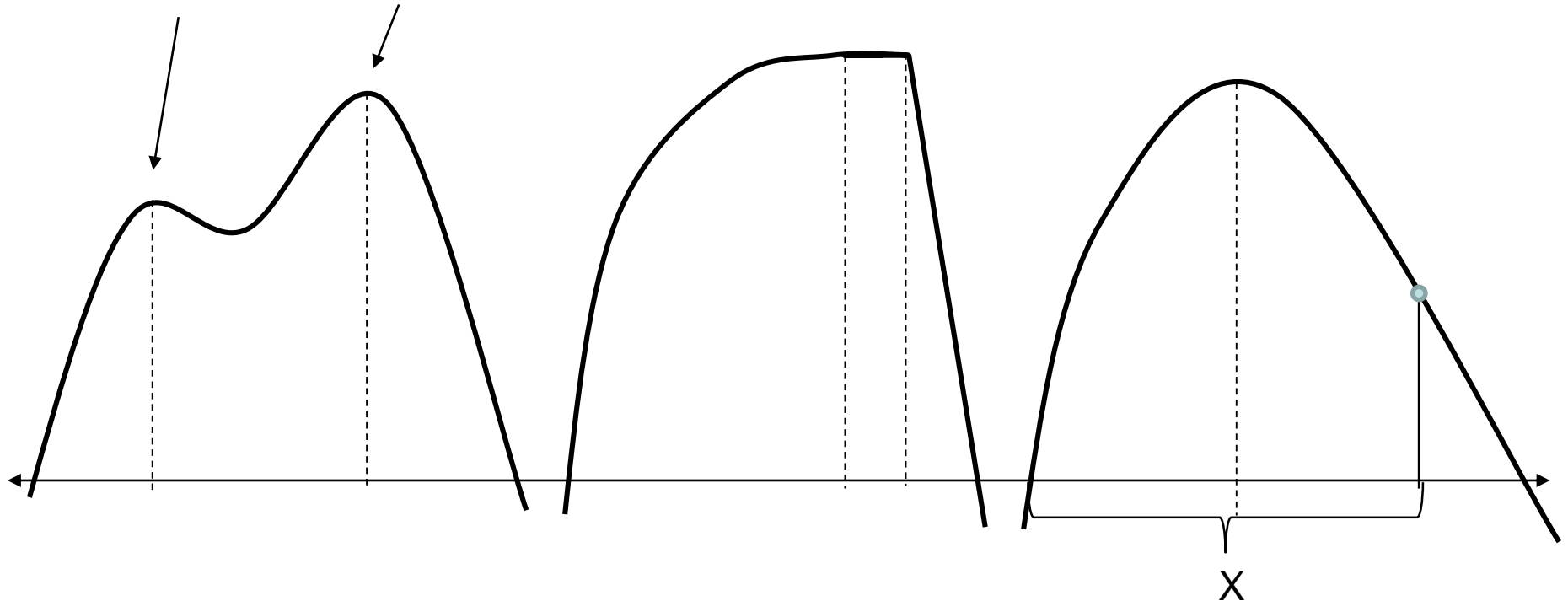
**Poznámka 2:** Pozor, neplatí pro lokální **maximum** a **konvexní** funkci, resp. lok. **minimum** a **konkávní** funkci!!!



# Příklad k Věť 3:

lokální max

globální max



**není konkávní  
funkce**

**konkávní fce**

**ryze konkávní fce**

# Konvexní a konkávní funkce ...

**Věta 4:**  $g_j(x)$  je **konvexní funkce** na  $X \subset \mathbf{R}^n$ ,  $b_j \in \mathbf{R}^1$

potom (omezující podmínka)

$Z_j = \{x \in X \mid g_j(x) \leq b_j\}$  je **konvexní množina**

**Poznámka 1:** Průnik konvexních množin je konvexní množina! (Více omezujících podmínek!)

**Poznámka 2:** Lineární funkce je zároveň konvexní i konkávní! (nikoliv ryze!!!)

# Jak poznáme, že je funkce konvexní v $X$ ?

v  $\mathbf{R}^1$  (matematika 1. ročník) :  $f''(x) > 0$  pro  $\forall x \in X$

v  $\mathbf{R}^n$  : pozor!!! parciální derivace:

$$\mathbf{H} = \{h_{ij}\} = \left\{ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right\} = \{\nabla^2 f(x)\}$$

Hessova matice (**Hessián**) je **pozitivně definitní (PD)**

**Sylvestrova podmínka:**

Jestliže všechny hlav. subdeterminanty jsou kladné, potom  $H$  je PD.

# Konvexní a konkávní funkce ...

**Věta 5:** Funkce  $f(x)$  je konvexní na  $X$ , jestliže všechny hlavní subdeterminanty Hessovy matice jsou kladné ( pro všechna  $x \in X \subset \mathbf{R}^n$  )

**Věta 6:**  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  jsou konvexní funkce na množině  $X$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  - nezáporné konstanty (tj.  $\geq 0$  ), potom funkce

$$g(x) = \alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x)$$

je konvexní funkce na  $X \subset \mathbf{R}^n$

## Příklad 1:

$$f(x,y) = 2x^2 + xy^2 + 3y^3$$

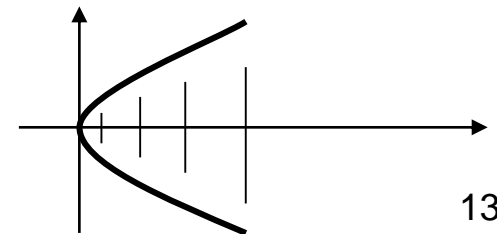
$$\nabla f(x) = 4x + y^2, 2xy + 9y^2$$

1.  $\det [4] = 4 > 0$

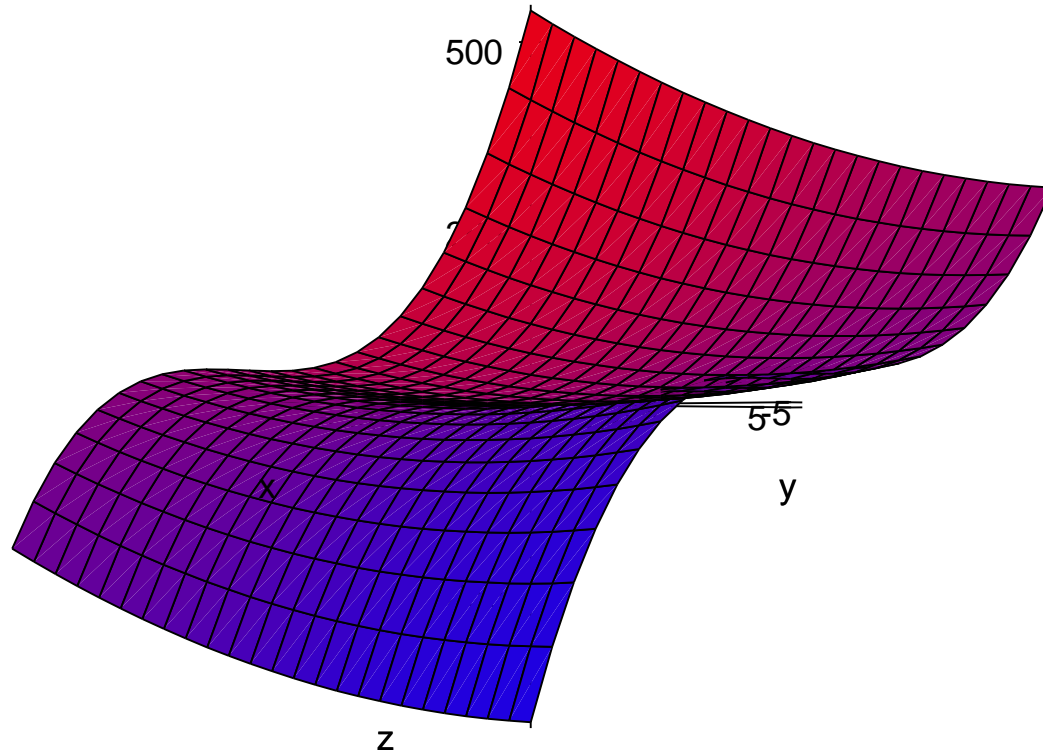
2.  $\det \begin{bmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x+18y \end{bmatrix} = 8x + 72y - 4y^2 > 0$

$$\mathbf{H} = \{\nabla^2 f(x)\} = \begin{bmatrix} 4 & 2y \\ 2y & 2x+18y \end{bmatrix}$$

$f$  je konvexní na  $X = \{(x,y) \mid 2x + 18y - y^2 > 0\}$  – vnitřek paraboly



# Příklad 1 – pokrač.



# Úloha matematického programování

## tzv. úloha (1) , (2)

### účelová funkce

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX}; \quad (1)$$

za podmínek

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2$$

.....

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

**omezující podmínky**

$X$

(2)

(mohou chybět)

**podmínky nezápornosti**

# Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX};$   
za podmínek

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq b,$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$f$  – funkce užitku (konkávní)

$n$  – počet statků

$p_i$  – cena jednotky  $i$ -tého statku

$x_i$  – množství  $i$ -tého statku

$b$  - důchodové omezení spotřebitele ( $b > 0$ )



## Příklad: Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 \cdot x_2} \rightarrow \text{MAX};$$

za podmínek

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

- funkce užitku  $f$  je konkávní, omezení je lineární (tj. konvexní)
- 2 statky, jednotkové ceny statků = 2, resp. 3
- důchodové omezení = 6

# Úloha matematického programování ...

$f$  je konkávní,  $g_i$  jsou konvexní funkce na  $X \subset \mathbf{R}^n$  :

Potom (1), (2) je **úlohou konvexního programování**

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$  je **přípustné řešení** úlohy (1), (2) jestliže splňuje nerovnosti (2)
- $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in X$  je **optimální řešení** úlohy (1), (2) jestliže je zároveň přípustné a  $x^* = \arg \max f(x)$   
tj. pro všechna  $x \in X$  platí:  $f(x) \leq f(x^*)$

- Speciální případ:  $f, g_i$  - lineární funkce, tj.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{1i} x_1 + a_{2i} x_2 + \dots + a_{ni} x_n - b_i$$

# Teorie sedlových bodů

- **Lagrangián úlohy (1), (2):**

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m y_j (b_j - g_j(\mathbf{x}))$$

Lagrangeovy multiplikátory

- **(Nezáporný) sedlový bod Lagrangiánu úlohy (1), (2):**

$(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$  přičemž  $\bar{\mathbf{x}} \geq 0$ ,  $\bar{\mathbf{y}} \geq 0$  a platí:

$$F(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \leq F(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \leq F(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad (3)$$

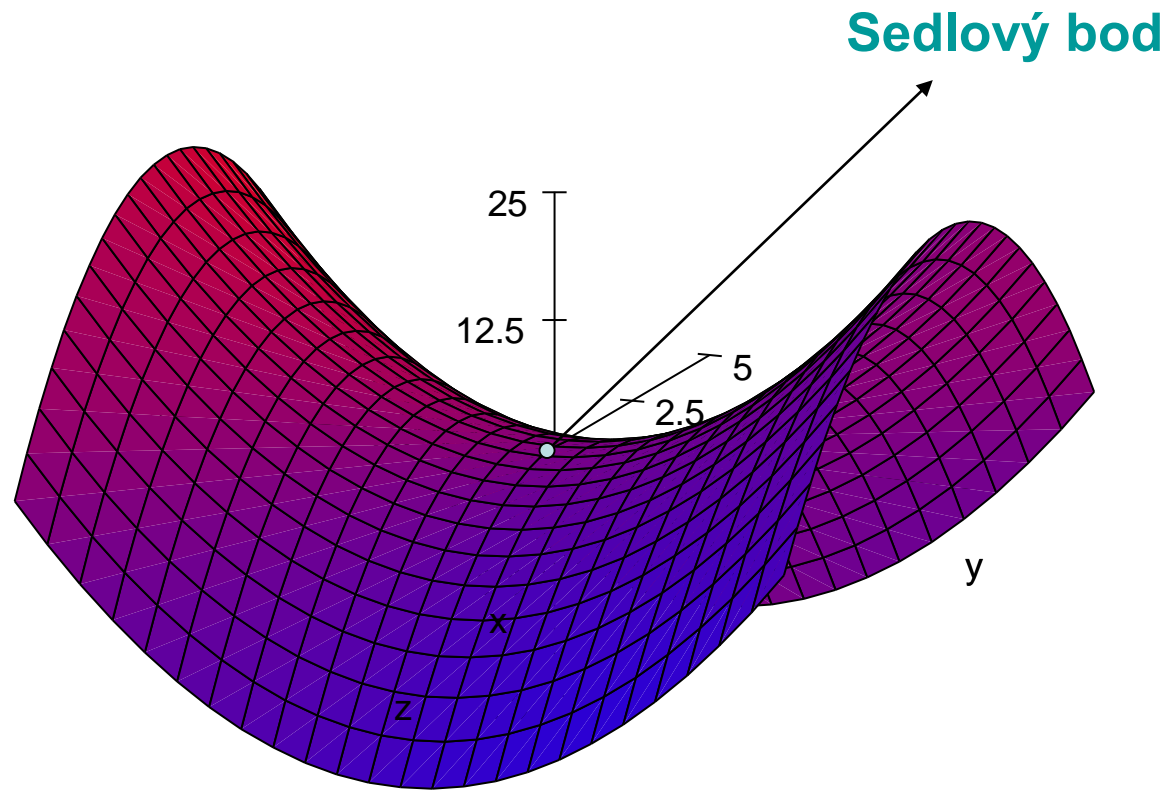
pro všechna  $\mathbf{x} \geq 0, \mathbf{y} \geq 0$

- **Poznámka:**

Pozor!!!  $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}$  jsou vektory, tj.  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$   
 $\bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_m)$

# Teorie sedlových bodů

## Sedlový bod funkce $f(x,y) = -x^2y^2$



# Teorie sedlových bodů

## Věta 7:

Jestliže  $\bar{x}, \bar{y}$  je nezáporný sedlový bod Lagrangiánu úlohy (1), (2),

tj.  $\bar{x} \geq 0, \bar{y} \geq 0$ ,

potom  $\bar{x} = \operatorname{argmax}_{x \in X} f(x)$ , tj.  $\bar{x}$  je optimálním řešením

úlohy (1), (2)

**Poznámka 1:** Sedlový bod je optimálním řešením úlohy (1),(2)

**Poznámka 2:** Když  $\bar{x}$  je optimálním řešením úlohy (1), (2), potom nemusí ještě existovat  $\bar{y}$  takový, že  $\bar{x}, \bar{y}$  je nezáporný sedlový bod Lagr. (1), (2)

# Teorie sedlových bodů

## Postačující podmínka pro existenci sedlového bodu

**Věta 8:** Jestliže  $\bar{x} \geq 0$  je optimálním řešením úlohy (1),(2) a  $f$  je konkávní,  $g_j$  jsou konvexní funkce na  $X$  existuje bod  $x^0 \in \mathbf{R}^n$ , takový, že platí

$$g_i(x^0) < b_i \text{ pro všechna } i \text{ pro která je } g_i \text{ nelineární}$$

(tzv. **podmínka regularity, Slaterova**)

potom existuje  $\bar{y} \geq 0$  takové, že

$(\bar{x}, \bar{y})$  je nezáporným sedlovým bodem Lagrangiánu úlohy (1), (2):

$$F(x,y) = f(x) + \sum_{j=1}^m y_j (b_j - g_j(x))$$

# Teorie sedlových bodů (tzv. Kuhn-Tuckerův teorém )

## Věta 9:

$f$  je konkávní,  $g_j$  jsou konvexní diferencovatelné funkce  
potom  $(\bar{x}, \bar{y})$  je sedlovým bodem Lagrangiánu  $F$  úlohy  
(1), (2), právě když platí:

$$\begin{aligned} (*) \quad & \nabla_x F(\bar{x}, \bar{y}) \leq 0 & \nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0 \\ & \bar{x}^T \nabla_x F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 & \bar{y}^T \nabla_y F(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \\ & \bar{x} \geq 0 & \bar{y} \geq 0 \end{aligned}$$

tzv. **Kuhn - Tuckerovy podmínky**

## Poznámka:

K.-T. podmínky umožňují nalézt sedlový bod řešením soustavy nerovností (\*), což je **zobecněná podmínka „nulovosti gradientu“**

## Příklad 2: Výroba „racio“ pokrmů (úloha lineárního/kvadratického programování)

(1) Jednotkový zisk nezávisí na množství produkce:

$$z = 2000x_1 + 3000x_2 \rightarrow \text{MAX}; \text{ „zisk“}$$

za podmínek

$$0,9x_1 + 0,3x_2 \leq 270 \text{ „rýže“}$$

$$0,5x_2 \leq 100 \text{ „pšenice“}$$

$$0,1x_1 + 0,2x_2 \leq 60 \text{ „vločky“}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(2) Jednotkový zisk roste s růstem produkce:

$$z = (2000 + x_1)x_1 + (3000 + 8x_2)x_2 =$$

$$= 2000x_1 + 3000x_2 + x_1^2 + 8x_2^2 \rightarrow \text{MAX}; \text{ „zisk“}$$

za podmínek (stejných!)<sub>EMM4</sub>



## Příklad 2 - pokrač.1:

(úloha nelineárního - kvadratického programování)

$$z = 2000 x_1 + 3000 x_2 + x_1^2 + 8x_2^2 \rightarrow \text{MAX}; \quad (1^*)$$

za podmínek

$$0,9x_1 + 0,3 x_2 \leq 270 \text{ „rýže“}$$

$$0,5 x_2 \leq 100 \text{ „pšenice“} \quad (2^*)$$

$$0,1x_1 + 0,2 x_2 \leq 60 \text{ „vločky“}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

...to je úloha nekonvexního (kvadratického) programování

**Lagrangián úlohy (1\*), (2\*):**

$$F(x_1, x_1, y_1, y_2, y_3) = 2000 x_1 + 3000 x_2 + x_1^2 + 8x_2^2 \\ + y_1(270 - 0,9x_1 - 0,3 x_2) + y_2(100 - 0,5 x_2) + y_3(60 - 0,1x_1 - 0,2 x_2)$$

## Příklad 2 - pokrač.2:

### Lagrangian úlohy (1\*), (2\*):

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 2000 x_1 + 3000 x_2 + x_1^2 + 8x_2^2 \\ + y_1(270 - 0,9x_1 - 0,3 x_2) + y_2(100 - 0,5 x_2) + y_3(60 - 0,1x_1 - 0,2 x_2)$$

### K.T. podmínky:

$$\partial F / \partial x_1 = 2000 + 2x_1 - 0,9y_1 - 0,1y_3 \leq 0$$

$$\partial F / \partial x_2 = 3000 + 16x_2 - 0,3y_1 - 0,5y_2 - 0,2y_3 \leq 0$$

$$\partial F / \partial y_1 = 270 - 0,9x_1 - 0,3x_2 \geq 0$$

$$\partial F / \partial y_2 = 100 - 0,5x_2 \geq 0$$

$$\partial F / \partial y_3 = 60 - 0,1x_1 - 0,2x_2 \geq 0$$

$$x_i \geq 0, y_j \geq 0, i = 1, 2. j = 1, 2, 3.$$

+ podmínky komplementarity.

## Příklad 2 - pokrač. 3:

**Podmínky komplementarity:**

$$x \cdot \nabla_x F(x, y) = x_1 \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_1} + \dots + x_n \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_n} = 0$$

Máme:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x_j} \leq 0 \quad \text{a současně} \quad x_j \geq 0, \quad \text{tudíž} \quad x_j \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_j} = 0$$

**Druhá podmínka komplementarity:**

$$y \cdot \nabla_y F(x, y) = y_1 \cdot (b_1 - g_1(x)) + \dots + y_m \cdot (b_m - g_m(x)) = 0$$

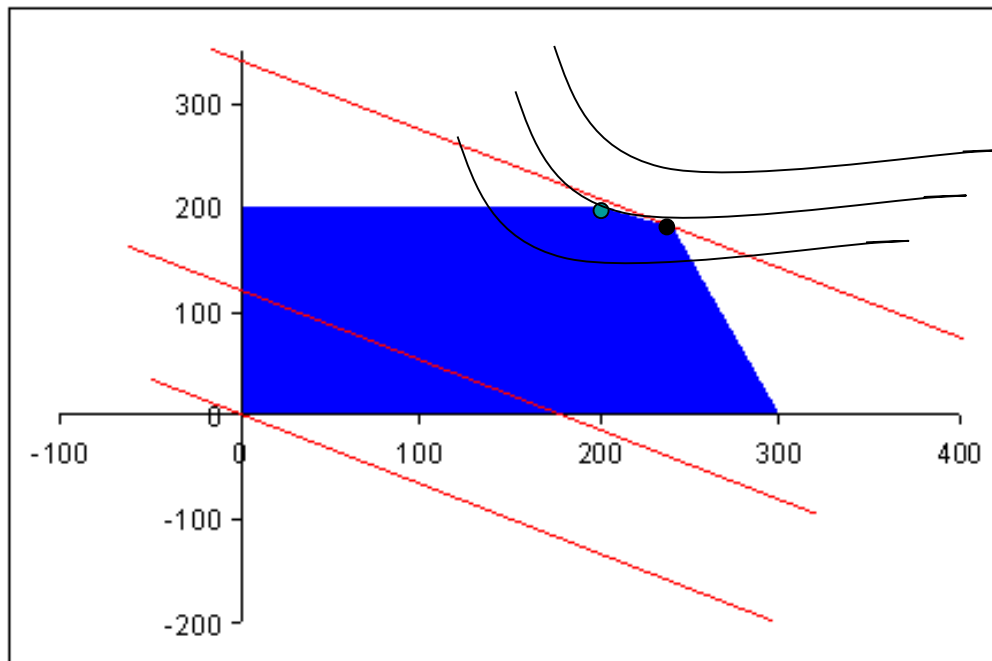
Máme:

$$b_i - g_i(x) \geq 0 \quad \text{a současně} \quad y_i \geq 0, \quad \text{tudíž} \quad y_i \cdot (b_i - g_i(x)) = 0$$

## Příklad 2 - pokrač. 4:

Řešení úlohy (1), (2):  $x_1 = 240$ ,  $x_2 = 180$ ,  $z = 1020000$

Řešení úlohy (1\*), (2\*):  $x_1^* = 200$ ,  $x_2^* = 200$ ,  $z^* = 1\,360\,000$



EMM4

$$\begin{aligned} y_1^* &= 0 \\ y_2^* &= 2\,800 \\ y_3^* &= 24\,000 \end{aligned}$$

# Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{MAX};$   
za podmínek

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n \leq b,$$
$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$f$  – funkce užitku (konkávní)

$n$  – počet statků

$p_i$  – cena jednotky  $i$ -tého statku

$x_i$  – množství  $i$ -tého statku

$b$  - důchodové omezení spotřebitele ( $b > 0$ )

# Maximalizace užitku spotřebitele

## Kuhn-Tuckerovy podmínky

K.T. podm.:

$$\begin{array}{ll} \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, y) \leq 0 & \nabla_y F(\mathbf{x}, y) \geq 0 \\ \mathbf{x}^T \nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, y) = 0 & y \nabla_y F(\mathbf{x}, y) = 0 \\ \mathbf{x} \geq 0 & y \geq 0 \end{array}$$

**Lagrangián:**

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) - y (p_1 x_1 + \dots + p_n x_n - b) \\ F(\mathbf{x}, y) &= f(\mathbf{x}) - y (\mathbf{p}^T \mathbf{x} - b) \end{aligned}$$

**K.T. podm.:**

$$\begin{array}{ll} \nabla f(\mathbf{x}) \leq y \mathbf{p}^T & \mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq b \\ \mathbf{x}^T \nabla f(\mathbf{x}) = y \mathbf{p}^T \mathbf{x} & y \mathbf{p}^T \mathbf{x} = y b \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & y \geq 0 \end{array}$$

# Příklad: Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

**K.T. podm.:**

$$\nabla f(\mathbf{x}) \leq y \mathbf{p}^T$$

$$\mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq b$$

$$\mathbf{x}^T \nabla f(\mathbf{x}) = y \mathbf{p}^T \mathbf{x}$$

$$y \mathbf{p}^T \mathbf{x} = y b$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$y \geq 0$$

# Příklad: Maximalizace užitku spotřebitele při důchodovém omezení

$$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \text{MAX};$$

za podmínek

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2.$$

**K.T. podm.:**

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \leq y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x_2 \leq y \\ x_1 \leq y \end{array}$$

$$2x_1x_2 = y(x_1 + x_2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$y(x_1 + x_2 - 6) = 0$$

$$y \geq 0$$

Řešení:

$$x_1^* = x_2^* = y^* = 3$$

$$f(x_1^*, x_2^*) = 9$$



# Kuhn-Tuckerovy podmínky a dualita v LP ...

Lagrangián k (P):

$$F(x,y) = c^T x + y^T (b - Ax)$$

K.T. podmínky (\*) a (\*\*):

$$\nabla_x F(x,y) = c - A^T y \leq 0 \Rightarrow A^T y \geq c$$

$$\nabla_y F(x,y) = b - A x \geq 0 \Rightarrow A x \leq b$$

$$x^T \nabla_x F(x,y) = x^T (c - A^T y) = 0$$

$$y^T \nabla_y F(x,y) = y^T (b - A x) = 0$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$