EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Název projektu	Rozvoj vzdělávání na Slezské univerzitě v Opavě
Registrační číslo projektu	CZ.02.2.69/0.0./0.0/16_015/0002400

Prezentace předmětu:

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

Vyučující:

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

SLEZSKÁ UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ FAKULTA V KARVINÉ

KVANTITATIVNÍ METODY V EKONOMICKÉ PRAXI

6. PŘEDNÁŠKA

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.

Kvantitativní metody v ekonomické praxi

Struktura přednášky

Témata přednášky:

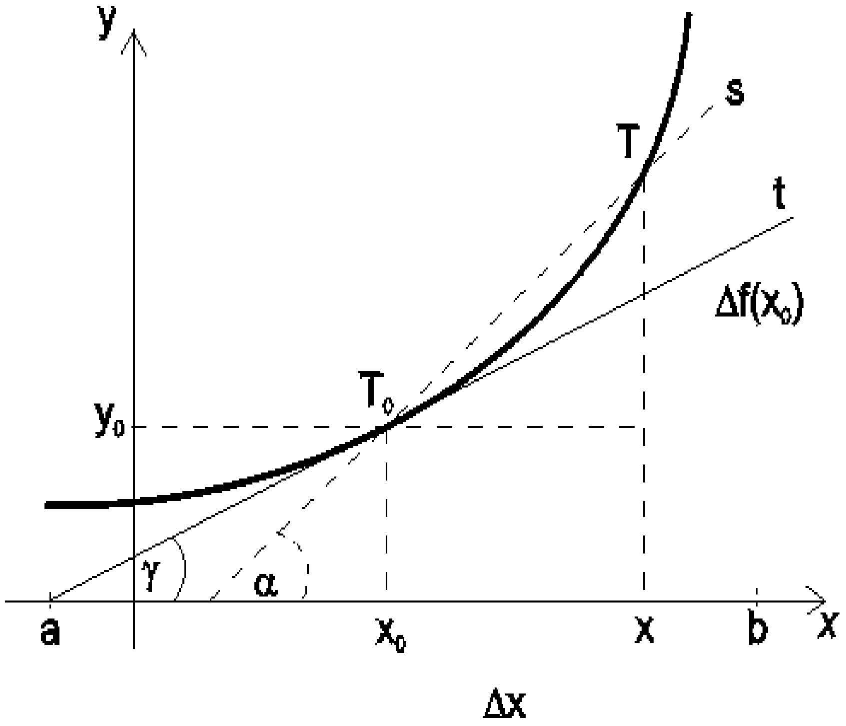
a) derivace funkce,

b) výpočet derivací funkce,

c) užití derivace funkce,

d) vyšetřování průběhu funkce.

Derivace funkce



Potom směrnice uvažované sečny je rovna

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

kde α je velikost směrového úhlu.

Přitom rozdíl $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$
se nazývá **diference (přírůstek) funkce** f v bodě x_0,
kdežto rozdíl $\Delta x = x - x_0$
se nazývá **diference (přírůstek) argumentu** x v bodě x_0.

Derivace funkce

Diferenční podíl $\Delta\frac{(\,_0)}{\Lambda}$ je funkcí proměnné Λ, nikoliv x_0, které je pevné. Připomeňme, že je to směrnice sečny. Význam diferenčního podílu spočívá v tom, že charakterizuje relativní změnu hodnot funkce $y = \quad x)$ vzhledem k změně hodnot argumentu. Funkce (1) není definována pro Λx - . Může ovšem mít v tomto bodě limitu.

Derivace funkce

Derivací funkce f v bodě x_0 nazýváme číslo

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{neboli} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Jinak řečeno: derivací funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 nazýváme limitu diferenčního podílu $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ pro $\Delta x \to 0$.

Derivace funkce

Derivaci v bodě značíme nejčastěji $f'(x_0)$.

Další označení, např. (podle Lagrangea) $y'(x_0), y'$

nebo (podle Cauchyho) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, \frac{df(x_0)}{dx}$.

Řešený příklad

Pomocí definice derivace vypočtěte derivaci funkce
$f(x) =$ v bodě $x =$ a do výsledku dosaďte $x_0 =$.

Řešení.

Do vztahu (4) dosadíme uvedenou funkci.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \quad)^2 - \quad^2}{\Delta} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \quad) = \quad 0.$$

Nakonec do výsledku dosadíme $x_0 =$: $f'(\quad) =$

Pravidla pro derivování funkcí

1. $\left(k\,.\,f(x)\right)' = k\,.\,f'(x)$,
2. $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$,
3. $\left(f(x)\,.\,g(x)\right)' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$,
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, pro $g(x) \neq 0$.

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

(1) $(k)' = 0$, k – libovolná konstanta, $k \in \mathbb{R}$,

(2) $(x^a)' = a x^{a-1}, x > 0, a \in \mathbb{R}$,

(3) $(\sin x)' = \cos x$,

(4) $(\cos x)' = -\sin x$,

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

(5) $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \ldots {}^2 x,\ \cos x \neq \ldots$

(6) $(\mathrm{cotg}\, x)' = \dfrac{1}{\sin^2 x} = \ldots + \ldots \mathrm{cotg}^2 x),\ \sin x \neq \ldots$

(7) $(a^x)' = \ldots \ln a,\ a > 0 \rightarrow \ldots = \ldots,$

(8) $(\log_a x)' = \ldots > \ldots \neq \ldots > \ldots \Rightarrow \ldots = \ldots > \ldots,$

Vzorce pro derivování elementárních funkcí

(9) $(\arcsin x)' =$

(10) $(\arccos x)' =$

(11) $(\operatorname{arctg} x)' =$

(12) $(\operatorname{arccotg} x)' =$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = x^6 + 3x^4 - 8x^2 + 23x - 5$.

Řešení.

Kromě násobného užití vzorce **(2)** použijeme též pravidla **1.** a **2.**

$$y' = 6x^5 + 3\cdot 4x^3 - 8\cdot 2x + 23 = 6x^5 + 12x^3 - 16x + 23.$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y=\dfrac{8x^4-\ldots}{\sqrt{2}+3},\ x\in\mathbb{R}$

Řešení.

Konstantu $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}$ vytkneme před derivovaný výraz, dále použijeme postupně pravidlo **2.**, **1.** a vzorec **(2)**.

$$y'=\frac{1}{\sqrt{2}+3}\left(8x^4-\ldots\right)'=\frac{32x^3}{\sqrt{2}+3}.$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = \dfrac{2x^7 + 3x^6 - 2x^4 + 7x - 2}{2x^4}, \quad x \neq 0$.

Řešení.

Čitatel dělíme jmenovatelem.

$$y = x^3 + 1{,}5x^2 - 1 + 3{,}5x^{-3} - x^{-4}$$

$$y' = 3x^2 + 3x - 10{,}5x^{-4} + 4x^{-5}$$

Ověřte si, že stejný výsledek obdržíte použitím pravidla **4.** pro derivování podílu. Postup je ovšem zdlouhavější.

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = \sqrt[3]{x^2 \cdot \sqrt{x^4 \cdot \sqrt{x^3}}},\ x > 0.$

Řešení.

Funkci y můžeme upravit takto: $y = x^{\frac{19}{12}}$. Pak použijeme vzorec **(2)**.

$$y' = \frac{19}{12} x^{\frac{7}{12}} = \frac{19}{12} \sqrt[12]{x^7}.$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = x^2 \cos x,\ x \in \mathbb{R}$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **3.** pro derivaci součinu.

$$y' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = \dfrac{\sin x}{\ln x},\quad x > 0,\ x \neq 1.$

Řešení.

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y' = \frac{(\sin x)' \cdot \ln x - \sin x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x \cdot \ln x - \sin x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\cos x}{\ln x} - \frac{\sin x}{x(\ln x)^2}.$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = \frac{3x+8}{x^2+4}, x \in$.

Řešení.

Použijeme pravidlo **4.** pro derivaci podílu.

$$y' = \frac{3x^2 \quad \cdots}{\cdots + \quad \cdots \quad +} .$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = \sin(x^4 + 7x^2 + 3),\ x \in \mathbb{R}$

Řešení.

Položíme $u = g(x) = x^4 + 7x^2 + 3$, $f(u) = \sin u$, potom derivujeme

$$g'(x) = 4x^3 + 14x,$$
$$f'(u) = \cos u = \cos(x^4 + 7x^2 + 3).$$

Použitím pravidla **5.** obdržíme postupně:

$$y' = f'(u) \cdot g'(x) = \cos(x^4 + 7x^2 + 3) \cdot (4x^3 + 14x) = (4x^3 + 14x) \cdot \cos(x^4 + 7x^2 + 3)$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci y:

a. $y = (x^2 - 1)^5, x \in \mathbb{R}$

Označme $g(x) = x^2 - 1$, potom $f(u) = u^5$, podle pravidla **5.** obdržíme:

$$y' = (u^5)'(x^2 - 1)' = 5u^4 2x = 10x(x^2 - 1)^4.$$

b. $y = \sqrt{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}$

Označme $u = 1 + x^2$, potom

$$y' = (\sqrt{u})'(1 + x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Řešený příklad:

Derivujte funkci $y = x\sqrt{x^2+1}$, $x \in$. Určete definiční obor funkce y'.

Řešení.

$$y' = \sqrt{x^2+1} + x\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Definiční obor funkce y' $D(y') =$

Derivace vyšších řádů

Vypočtěte šestou derivaci funkce $y = x - x^4 + x^2 - x + \,.$

Řešení.

Podle definice derivace vyšších řádů postupně vypočítáme:

$$y' = x^4 - x^3 + x - \,,$$

$$y'' = x^3 - x^2 +$$

$$y''' = x^2 - x,$$

$$y^{(4)} = 2x - 3,$$

$$y^{(5)} = 2,$$

$$y^{(6)} =$$

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce
Monotónnost funkce

Jestliže pro všechna x z intervalu $J = \; ;b)$ je splněna nerovnost

$$f'(x) > \;,$$
$$f'(x) < \;,$$
$$f'(x) > \;,$$
$$f'(x) < \;,$$

[redacted]

rostoucí,
klesající,
neklesající,
nerostoucí.

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce
Monotónnost funkce

Určete intervaly monotónnosti funkce $f(x) = {}^{3} + 6{}^{2} - 15x;\ x \in$.

Řešení.

Zjistíme nejprve intervaly, v nichž platí $f'(x) >$ a $f'(x) <$.

$$f' \quad = \quad + \quad - \quad > \quad \Rightarrow \quad \in -\infty - \cup \infty$$
$$f' \quad < \quad \to \quad \in -$$

Funkce rostoucí v intervalu $(-\infty$ a
klesající v intervalu $(-$.

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce Lokální extrémy funkce

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **lokální minimum**,
právě když existuje takové okolí $J \subset \quad f)$ bodu x_0,
že pro všechna $x \subset$ platí $f(x) >$

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce Lokální extrémy funkce

Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 **lokální maximum**,

právě když existuje takové okolí $J \subset$ $f)$ bodu x_0,

že pro všechna $x \subset$ platí $f(x) <$

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce Lokální extrémy funkce

Bod x_0, ve kterém je $f'(x_0) =$, se nazývá **stacionární bod funkce** $f(x)$.

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 obě derivace $f'(x_0), f''(x_0)$
a nechť x_0 je stacionární bod, tj. $f'(x_0) =$.
Pak funkce $f(x)$ v bodě x_0:

a. má lokální maximum, je-li $f''(x_0) <$,

b. má lokální minimum, je-li $f''(x_0) >$.

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce Lokální extrémy funkce

Nechť funkce $f(x)$ má na okolí bodu x_0 spojitou derivaci řádu $n \geq 2$, přičemž platí

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) = B \neq 0.$$

Je-li číslo *n* liché, nemá $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém. Je-li však číslo *n* sudé, má $f(x)$ v bodě x_0:

a. lokální maximum při $B < 0$,

b. lokální minimum při $B > 0$.

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce
Lokální extrémy funkce

Určete lokální extrémy funkce $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$.

Řešení.
Vypočteme derivace

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3)$$
$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x.$$

Protože daná funkce $f(x)$ má všude v R derivaci, může mít $f(x)$ lokální extrém jen ve stacionárních bodech, pro něž je $f'(x) = 0$.

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce
Lokální extrémy funkce

Proto řešíme rovnici

$$5x^2(x^2 - x + \quad = \quad .$$

Dostaneme stacionární body $x_{1,2} = \quad x_3 = \quad x_4 = \quad .$

Dále platí $f'(\;) = \quad f'(1) = \quad f'(3) = \quad .$

Funkce má v bodě $x_3 =$ lokální max. a v bodě $x_4 =$ lokální min.

Zbývá rozhodnout o situaci v bodě $x_1 =$

Protože $f'(x) = 60x^2 - 120x + 30, f'(0) = 30 \quad ,$

nemá $f(x)$ extrém ve stacionárním bodě $x_1 = \quad .$

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce
Inflexní body funkce

Určete inflexní body funkce $f(x) = x \; - \; x^3 + \; .$

Řešení.

Nejprve vypočteme derivace

$$f' \; = \; -$$

$$f'' \; = \; - \; = \; -$$

$$f''' \; = \; -$$

Užití diferenciálního počtu – průběh funkce
Inflexní body funkce

Dále řešíme rovnici $f''(x) = x(x - \;) = \;$.

Řešením dostaneme *x*-ové souřadnice bodů,

ve kterých může existovat inflexe: $x_1 = \;, x_2 = \;$.

V těchto bodech určíme hodnotu třetí derivace: $f'''(\;) = \;, f'''(\;) = \;$.

V obou případech jsou třetí derivace nenulové,

proto body $I_1[\;,\;], I_2[\;,0]$ jsou inflexními body.

Závěr přednášky

Děkuji Vám za pozornost !!!