

Statistické zpracování dat 5.přednáška

Mgr. Radmila Krkošková, Ph.D.



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**

OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Téma přednášky:



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Jednoduchá nelineární regresní analýza



Nelineární funkce



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- Východiskem je vždy grafické znázornění
- Uspořádání bodů má tvar křivky

Základní nelineární regresní funkce (křivky):

parabola:

hyperbola:

mocninná funkce:

exponenciální funkce:





Cíl:
nalezení **nejlepších** odhadů
regresních koeficientů
(linearizace, Excel)



Příklad: Řešení v Excelu 1. způsob



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Vložení → Grafy (bodový)...Přidat spojnicí trendu →

Typ: **parabolický**,

Možnosti: Zobrazit rovnici regrese + Zobrazit koef.
„spolehlivosti R “

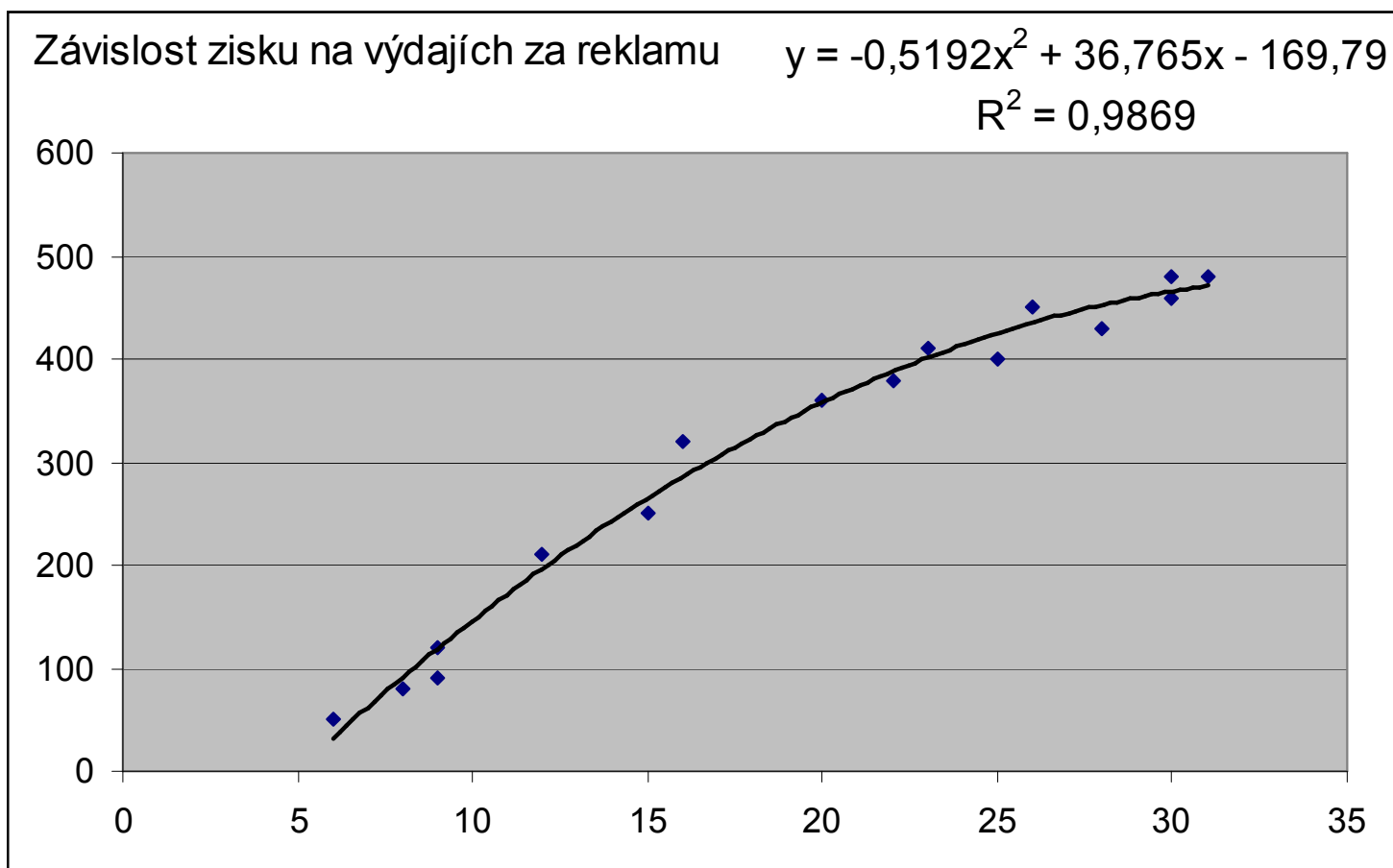
Uvidíte, že je nejpriléhavější!!



Grafické znázornění



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



Příklad: Řešení v Excelu 2. způsob



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Vložení → Grafy (bodový)...

Přidat spojnici trendu →

Typ: **logaritmický**,

Možnosti:

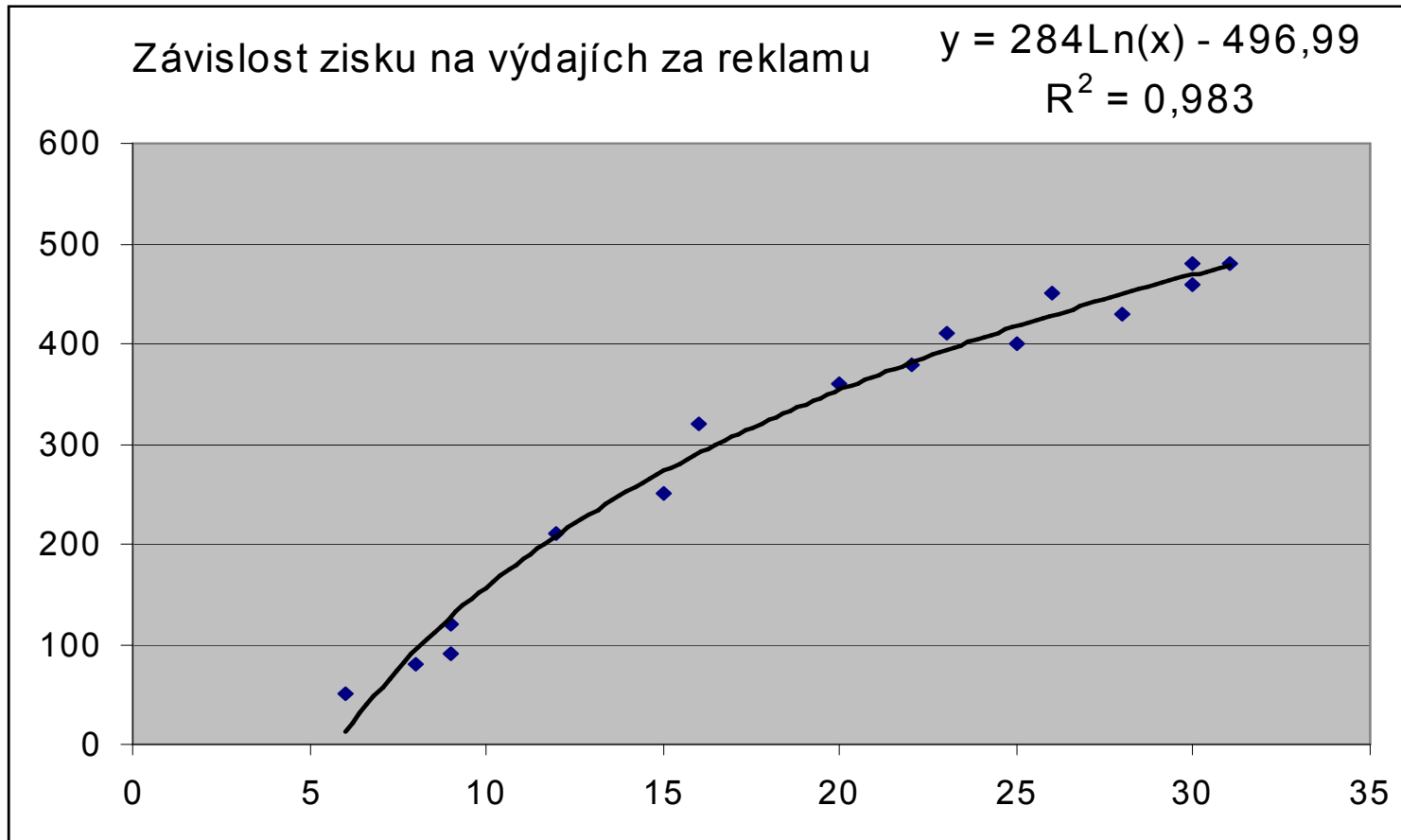
Zobrazit rovnici regrese + Zobrazit koeficient
spolehlivosti R



Grafické znázornění



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ



Jednoduchý mocniný model



Mocniný model (nelineární - **log-lineární**): $Y = AX^{B_2}$

Po zlogaritmování - **lineární model (v parametrech)**:

$$\ln Y = \ln A + B_2 \ln X$$

Substituce: $Y^* = \ln Y, B_1 = \ln A, X^* = \ln X$

Nový lineární model:

$$Y^* = B_1 + B_2 X^*$$

Vynecháme „hvězdičky“ a vytvoříme **regresní** model:

$$Y_i = B_1 + B_2 X_i + \varepsilon_i$$



Ekonomická interpretace



Uvažujme opět mocninný model:

$$Q = AP^{B_2}$$

logaritmovaný:

$$\ln Q = \ln A + B_2 \ln P \quad \xrightarrow{B_1}$$

kde: P – cena, Q – poptávka

derivujeme obě strany podle P :

$$\text{Obdržíme: } \frac{1}{Q} \frac{dQ}{dP} = B_2 \frac{1}{P}$$

$$\text{neboli: } B_2 = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dP}{P}}$$

Odtud interpretace koeficientu: $B_2 = E$ je **konstantní cenová elasticita**

$$A = e^{B_1}$$



Příklad – koeficient cenové elasticity



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Následující tabulka udává hodnoty množství prodeje daného výrobku v závislosti na jeho ceně. Zjistěte koeficient cenové elasticity E .

Q	P	ln Q	ln P
49	1	3,892	0,000
45	2	3,807	0,693
44	3	3,784	1,099
39	4	3,664	1,386
38	5	3,638	1,609
37	6	3,611	1,792
34	7	3,526	1,946
33	8	3,497	2,079
30	9	3,401	2,197
29	10	3,367	2,303

$$Q = AP^E$$

$$\ln Q = \ln A + E \ln P$$

$$E = - 0,227$$



Jednoduchý exponenciální model



Exponenciální model (semilogaritmický)

Úkolem je nalézt **rychlost růstu** r :

$$Y_t = Y_0 (1 + r)^t$$

(např. spotřebitelských úvěrů, úspor aj.)

Po zlogaritmování:

$$\ln Y_t = \ln Y_0 + \ln(1 + r) t$$

úroková míra

Po substituci:

$$Y_t^* = B_0 + B_1 t$$

kde $B_1 = \ln(1+r)$

Po výpočtu regresního koeficientu b_1 : $\hat{r} = e^{b_1} - 1$

Průměrná rychlost růstu (spotřebitelských úvěrů) Y



Příklad – spotřebitelské úvěry



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

rok	y
1996	190
1997	199
1998	205
1999	228
2000	264
2001	308
2002	347
2003	349
2004	366
2005	381
2006	430
2007	611
2008	592
2009	646
2010	686

Y – množství spotřebitelských úvěrů v USA
(v mld. USD)

Nalezněte semilogaritmický růstový model.



Příklad – spotřebitelské úvěry – řešení v Excelu



**SLEZSKÁ
UNIVERZITA**
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

VÝSLEDEK						
<i>Regresní statistika</i>						
Násobné R	0,991269					
Hodnota spolehlivosti R	0,982615					
Nastavená hodnota spolehlivosti	0,981277					
Chyba stř. hodnoty	0,058479					
Pozorování	15					
ANOVA						
	<i>Rozdíl</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>	<i>Významnost F</i>	
Regrese	1	2,51272	2,51272	734,7516	7,964E-13	
Rezidua	13	0,044458	0,00342			
Celkem	14	2,557178				
	<i>Koeficienty</i>	<i>ba stř. hodl</i>	<i>t stat</i>	<i>Hodnota P</i>	<i>Dolní 95%</i>	<i>Horní 95%</i>
Hranice	-181,712	6,919728	-26,26	1,19E-12	-196,6613582	-166,763
Rok	0,094731	0,003495	27,1063	7,96E-13	0,087181145	0,102281

b_0 b_1 $r = e^{0,0947} - 1 = 0,0994$, tzn. téměř 10% průměrný růst



Jednoduchý reciprokový model



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- **Průměrné fixní náklady:**
$$Y = B_0 + B_1 \frac{1}{X}$$

X – výstup (výroba, tržby)
 Y – průměrné fixní náklady na jednotku vstupu



Jednoduchý reciprokový model



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- **Phillipsova křivka:**
$$Y = B_0 + B_1 \frac{1}{X}$$

X – úroveň nezaměstnanosti v %
 Y – rychlost růstu mezd v %



Průměrné fixní náklady

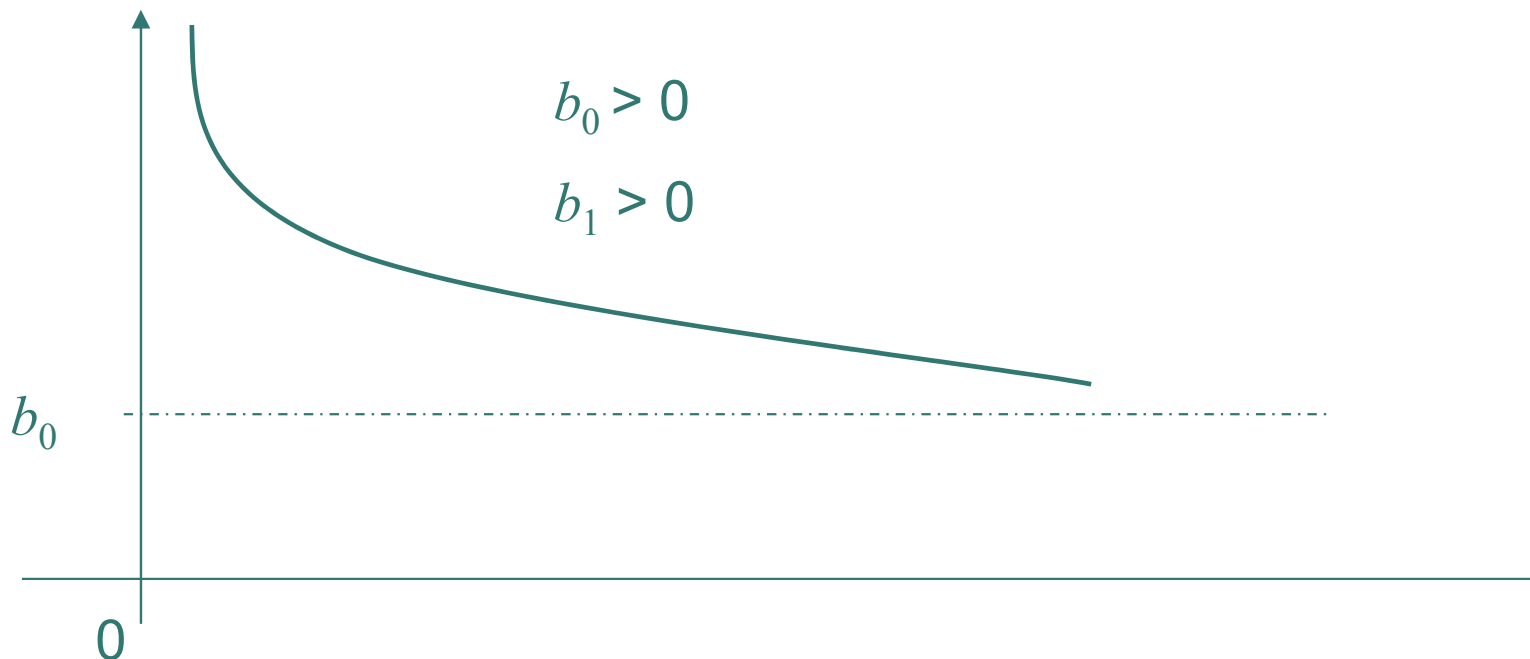


SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

X – výstup (výroba)

Y – průměrné fixní náklady na jednotku výstupu

$$Y = b_0 + b_1 \frac{1}{X}$$



Phillipsova křivka

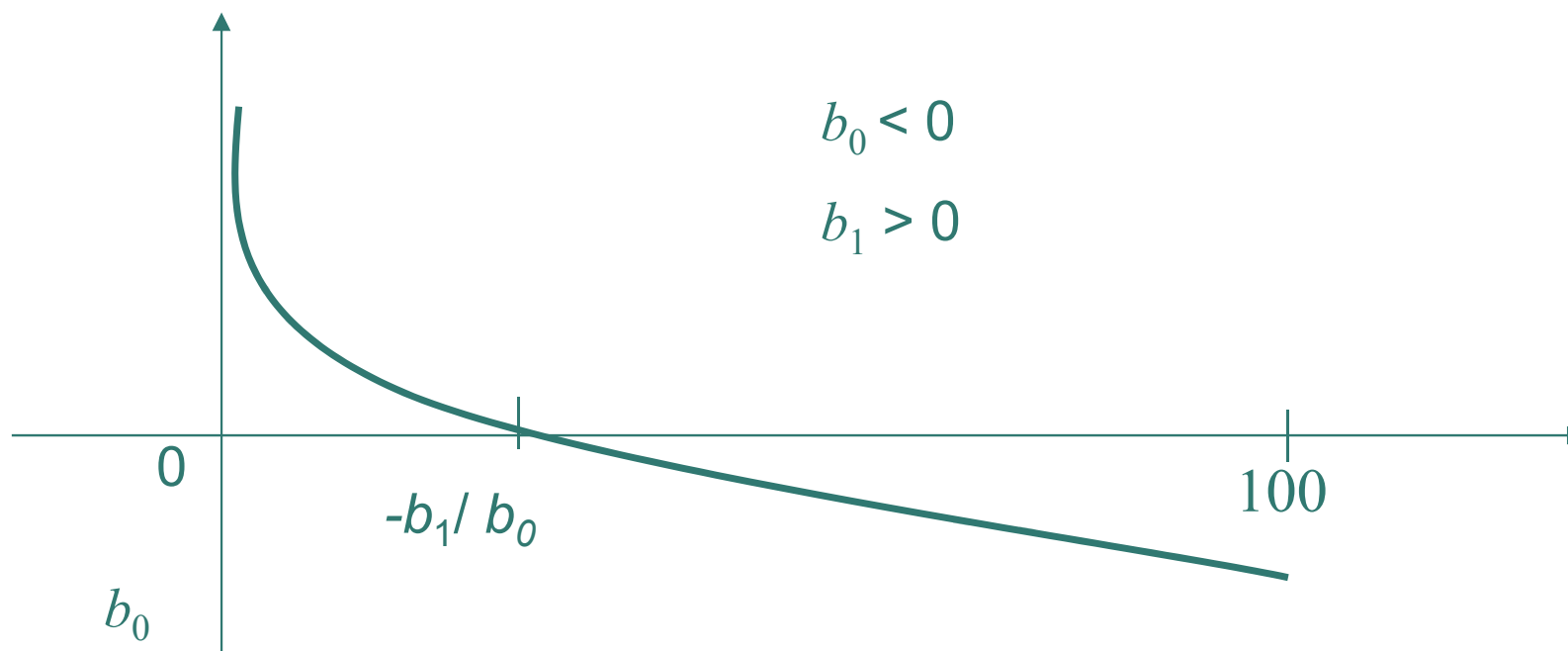


SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

X – úroveň nezaměstnanosti v %

Y – rychlost růstu mezd v %

$$Y = b_0 + b_1 \frac{1}{X}$$



Příklad – Phillipsova křivka



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

rok	x	y
2000	6,8	4,2
2001	5,5	3,5
2002	5,5	3,4
2003	6,7	3,0
2004	5,5	3,4
2005	5,7	2,8
2006	5,2	2,8
2007	4,5	3,6
2008	3,8	4,3
2009	3,8	5,0
2010	3,6	6,1
2011	3,5	6,7

X – úroveň nezaměstnanosti v %

Y – rychlost růstu mezd v %

Nalezněte Phillipsovu křivku!



Příklad – Phillipsova křivka – řešení v Excelu



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

VÝSLEDEK

Regresní statistika

Násobné R	0,81201
Hodnota spolehlivosti R	0,65936
Nastavená hodnota spolehlivosti R	0,625296
Chyba stř. hodnoty	0,778386
Pozorování	12

Reciprokový model Phillipsovy křivky:

$$Y = -0,259 + 20,587 \frac{1}{X}$$

ANOVA

	Rozdíl	SS	MS	F	Významnost F
Regrese	1	11,72782	11,72782	19,35654	0,00133589
Rezidua	10	6,058842	0,605884		
Celkem	11	17,78667			

$$-b_0/b_1 = 78\%$$

	Koeficienty	ba stř. hodi	t stat	Hodnota P	Dolní 95%	Horní 95%
Hranice	-0,25944	1,00864	-0,25721	0,802229	-2,506828	1,987955
1/X	20,58788	4,679482	4,399607	0,001336	10,1613445	31,01442

b_0 b_1



Modelování poptávky: Törnquistovy křivky (TK)



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Poptávkové funkce

- **TK** - speciální nelineární regresní funkce s více regresními koeficienty používané v ekonomii (marketingu)
- **TK I. typu** - závislost poptávky po **spotřebním zboží** Y na výši příjmů X ekonomických subjektů:

$$Y = \frac{B_0 X}{X + B_1}$$



Modelování poptávky: Törnquistovy křivky (TK)



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

- **TK II. typu** - závislost poptávky po zboží relativně **nezbytného** charakteru Y na výši příjmů X :

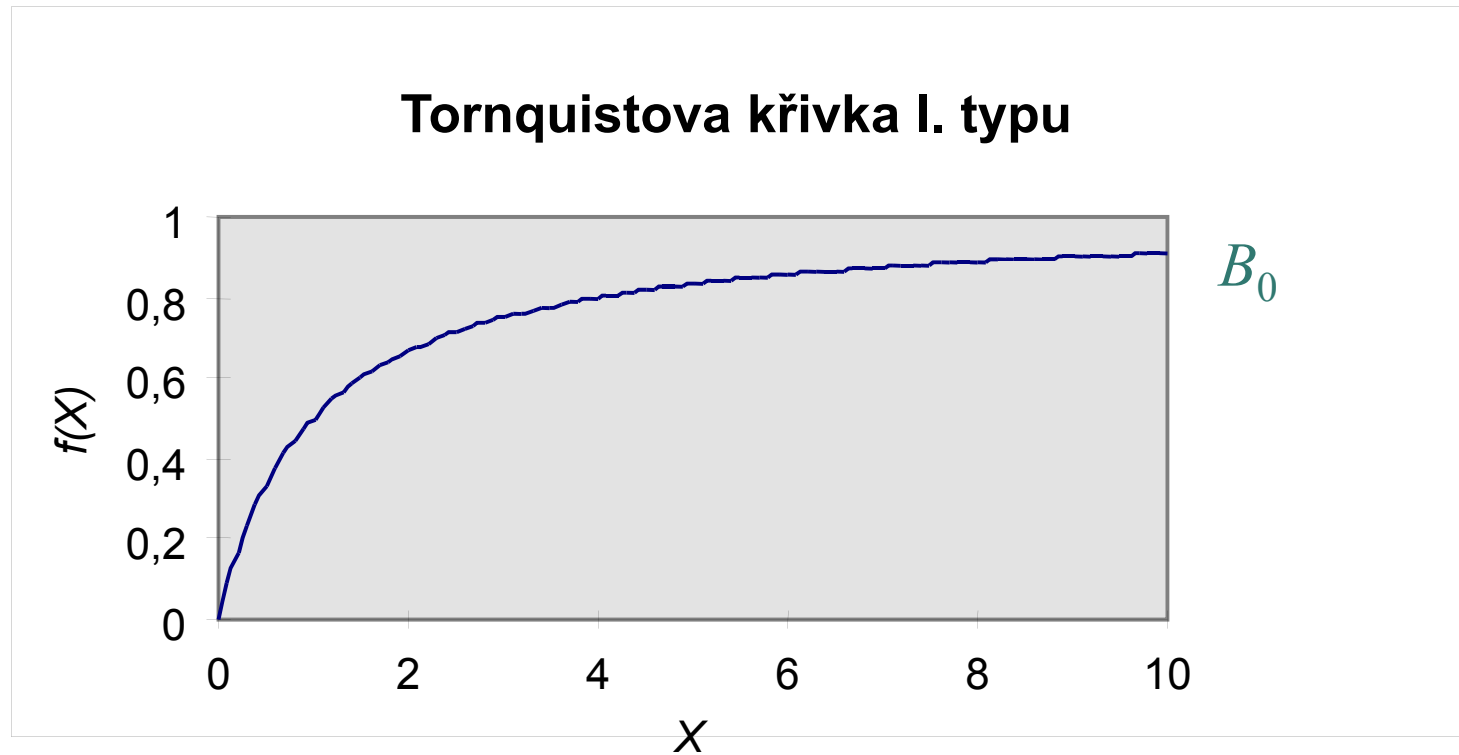
$$Y = \frac{B_0(X - B_1)}{X + B_2}$$

- **TK III. typu** - závislost poptávky po zboží relativně **zbytného** charakteru Y na výši příjmů X :

$$Y = \frac{B_0X(X - B_1)}{X + B_2}$$



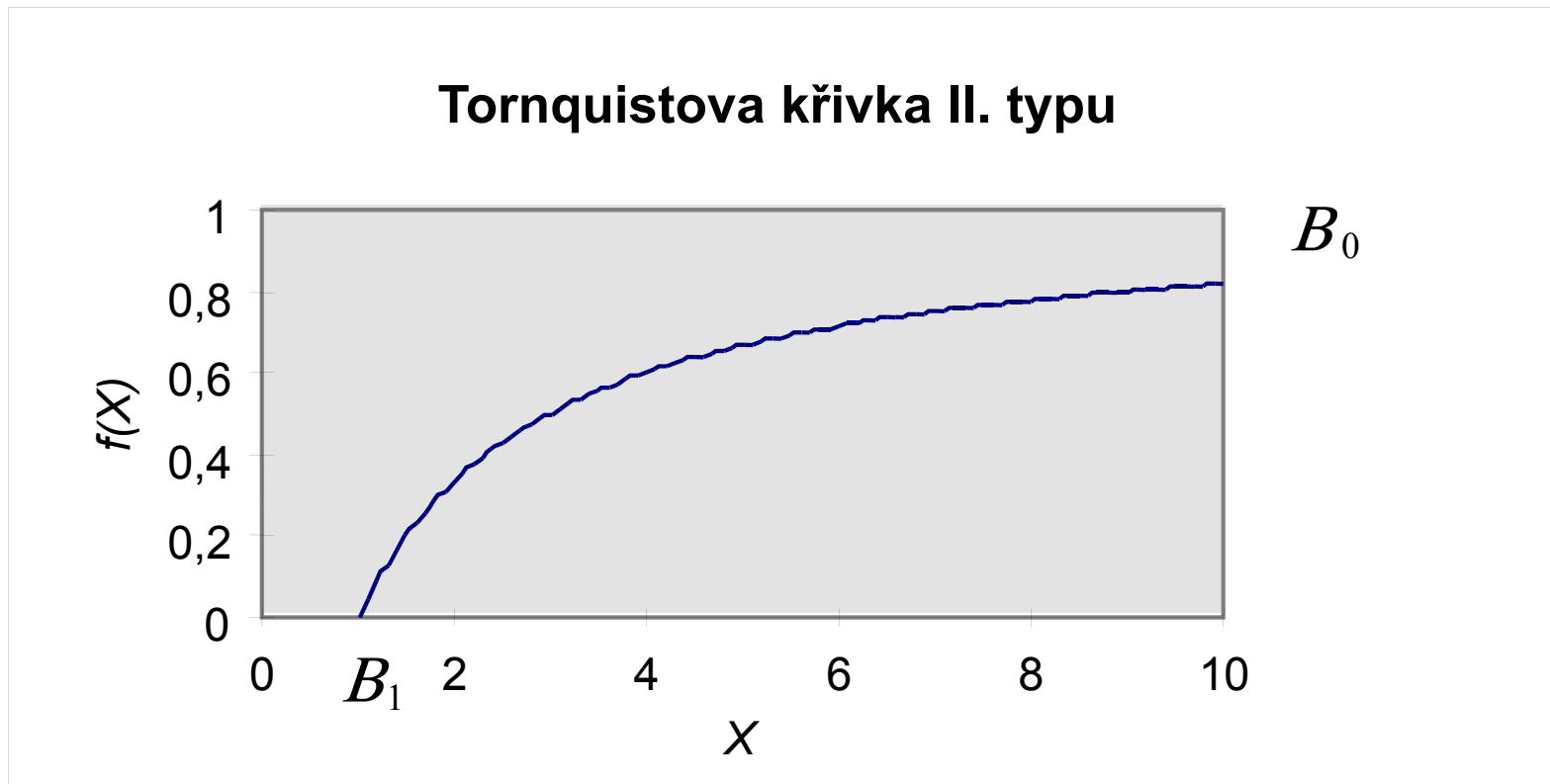
Tornquistova křivka I. typu



$$Y = f(X) = \frac{B_0 X}{X + B_1}$$

Závislost poptávky po **spotřebním** zboží na výši příjmů (např. elektronika)

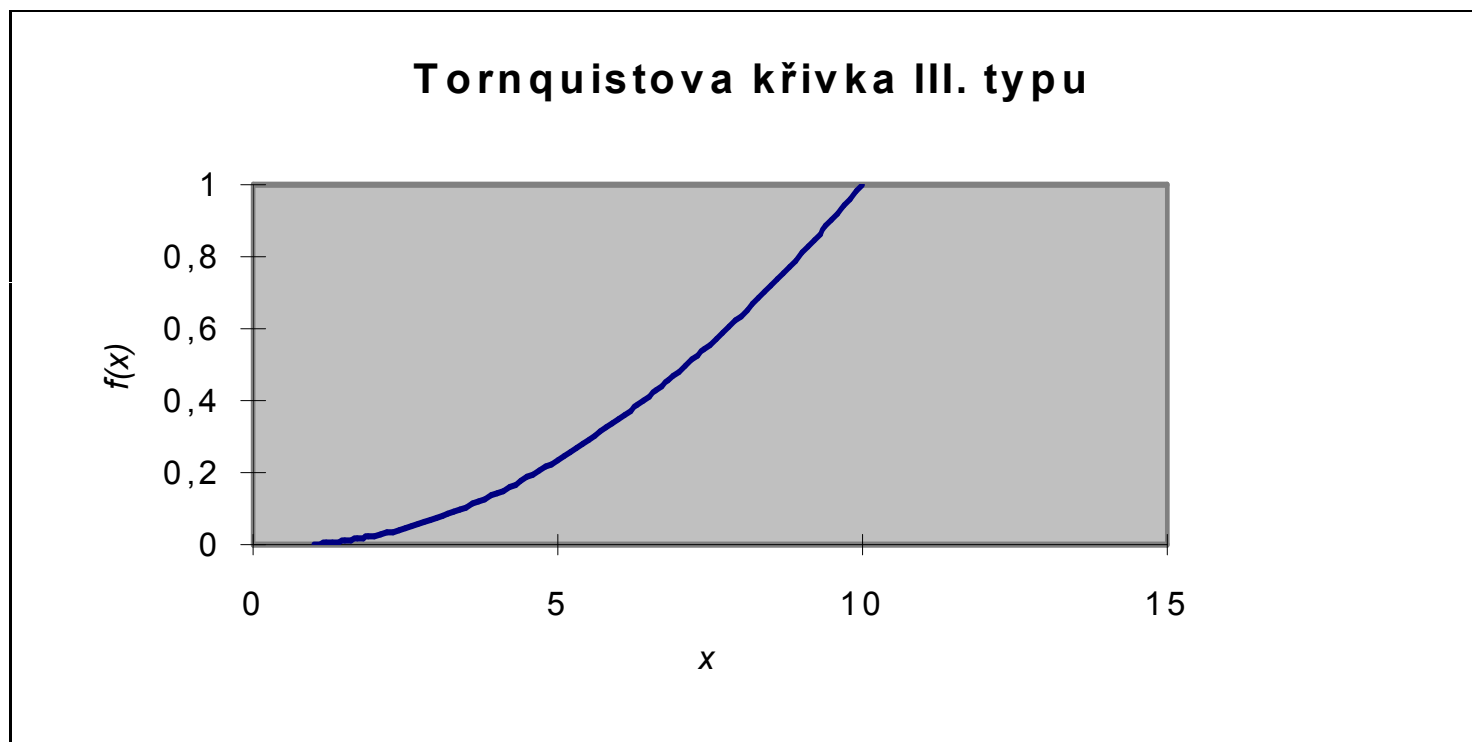
Tornquistova křivka II. typu



$$Y = \frac{B_0 (X - B_1)}{X + B_2}$$

Závislost poptávky po spotřebním zboží **nezbytného charakteru** na výši příjmů (např. chleba)

Tornquistova křivka III. typu



$$Y = \frac{B_0 X (X - B_1)}{X + B_2}$$

Závislost poptávky po spotřebním zboží **zbytného charakteru** na výši příjmů (např. klenoty)

Rovnice závislosti sexu na ekonomice

MICHLIQ

Námět:
Editor týdeníku Ekonom tak dlouho MICHLIQa hecoval k tomuto odvažnému tématu, až je to tady...

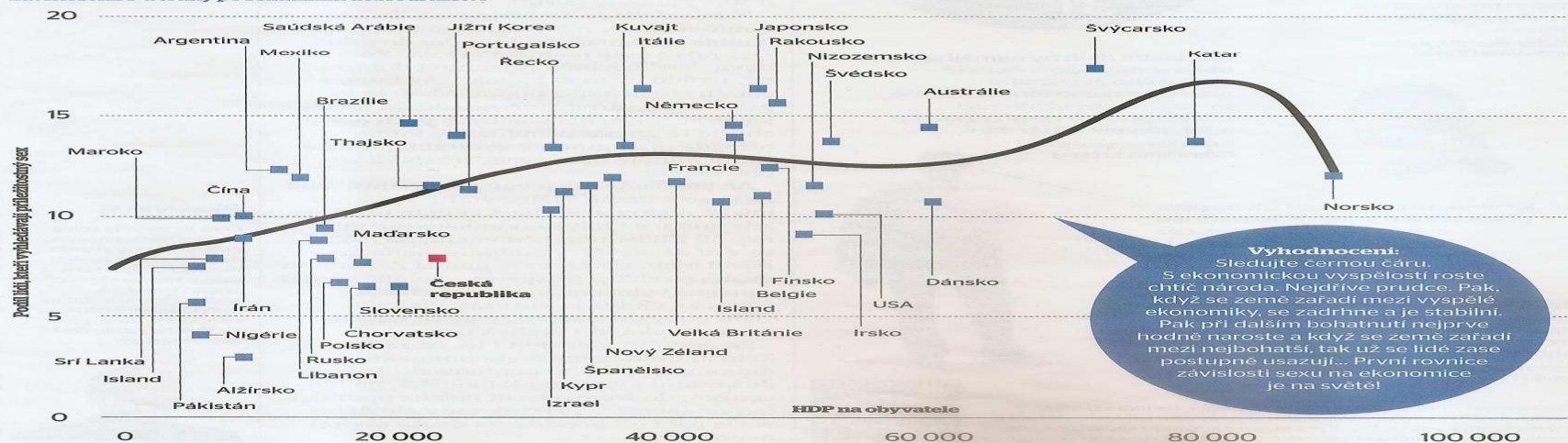
Hledání dat:
MICHLIQ si vzal data z on-line seznamky OKCupid. Celkem 1,7 milionu lidí z 92 zemí světa mělo odpovídat na otázku, zda vyhledávají příležitostný sex. Pak už k jejich odpovědím stačilo připojit údaje, z jak velké jsou ekonomiky.

Regresní analýza:
Funkce, která nejlépe vysvětluje vztah mezi daty, je polynom šestého stupně vyjádřený rovnicí...

Vhodnost postupu:
R² je koeficient, který říká, jak moc daná funkce padne k datům. Čím blíže k 1, tím lépe. Funkce tedy není dokonalá, ale v rámci možností s ní jde pracovat.
R² = 0,5392

$$\text{Sexuální chtíč národa} = -4e^{-27} \text{HDP}^6 + 8e^{-22} \text{HDP}^5 - 6e^{-17} \text{HDP}^4 + 2e^{-12} \text{HDP}^3 - 3e^{-8} \text{HDP}^2 + 0,0004 \text{HDP} + 6,948$$

Závislost HDP a touhy po sexuálním dobrodružství



Vyhodnocení:
Sledujte černou čáru. S ekonomickou vyspělostí roste chtíč národa. Nejdrive prudce. Pak, když se země zařadí mezi vyspělé ekonomiky, se zadržne a je stabilní. Pak při dalším bohatnutí nejprve hodně naroste a když se země zařadí mezi nejbohatší, tak už se lidé zase postupně usazují... První rovnice závislosti sexu na ekonomice je na světě!

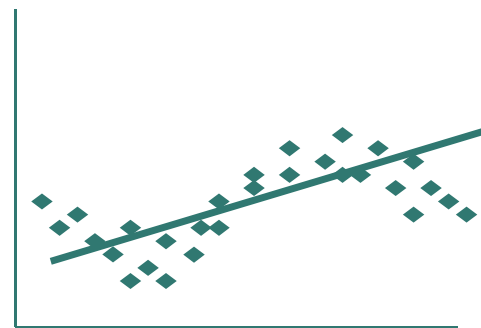
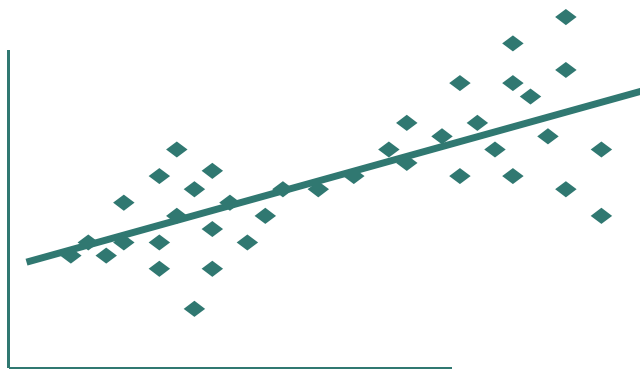
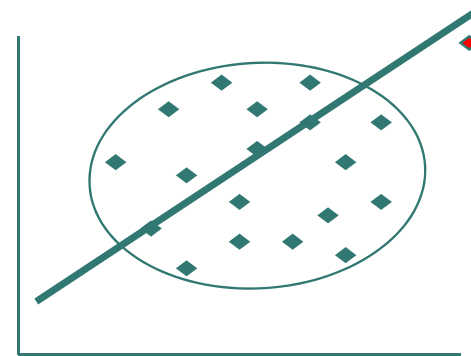
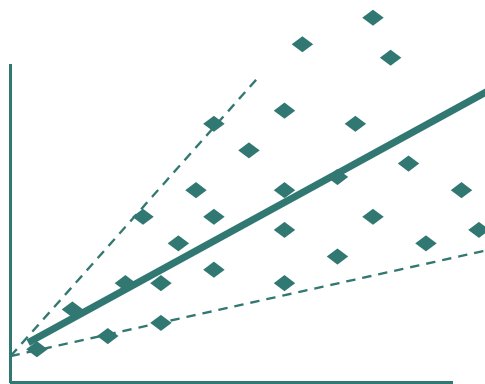
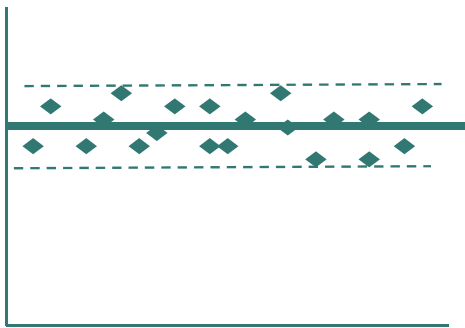


Stavbu připravil Aleš Míchl

ekonom 3-9, 10, 2013, číslo 40



Kdy lineární regresní analýza „nemá smysl“?



Příklad – průmyslové podniky



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

Obrat	VaV	Zisk
6375,3	62,5	185,1
11626,4	92,9	1569,5
14655,1	178,3	276,8
21869,2	258,4	2828,1
26408,3	494,7	225,9
32405,6	1083,0	3751,9
35107,7	1620,6	2884,1
40295,4	421,7	4645,7
70761,6	509,2	5036,4
80552,8	6620,1	13869,9
95294,0	3918,6	4487,8
101314,1	1595,3	10278,9
116141,3	6107,5	8787,3
122315,7	4454,1	16438,8
141649,9	3163,8	9761,4
175025,8	13210,7	19774,5
230614,5	1703,8	22626,6
293543,0	9528,2	18415,4

Data v 18 průmyslových
uskupeních v USA v roce 2017

Regresní model:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + \varepsilon_i$$



Příklad – průmyslové podniky – regresní rovnice



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ

	<i>Koeficienty</i>	<i>Hodnota P</i>
Hranice	192,99311	0,848041
Obrat	0,0319003	0,001476

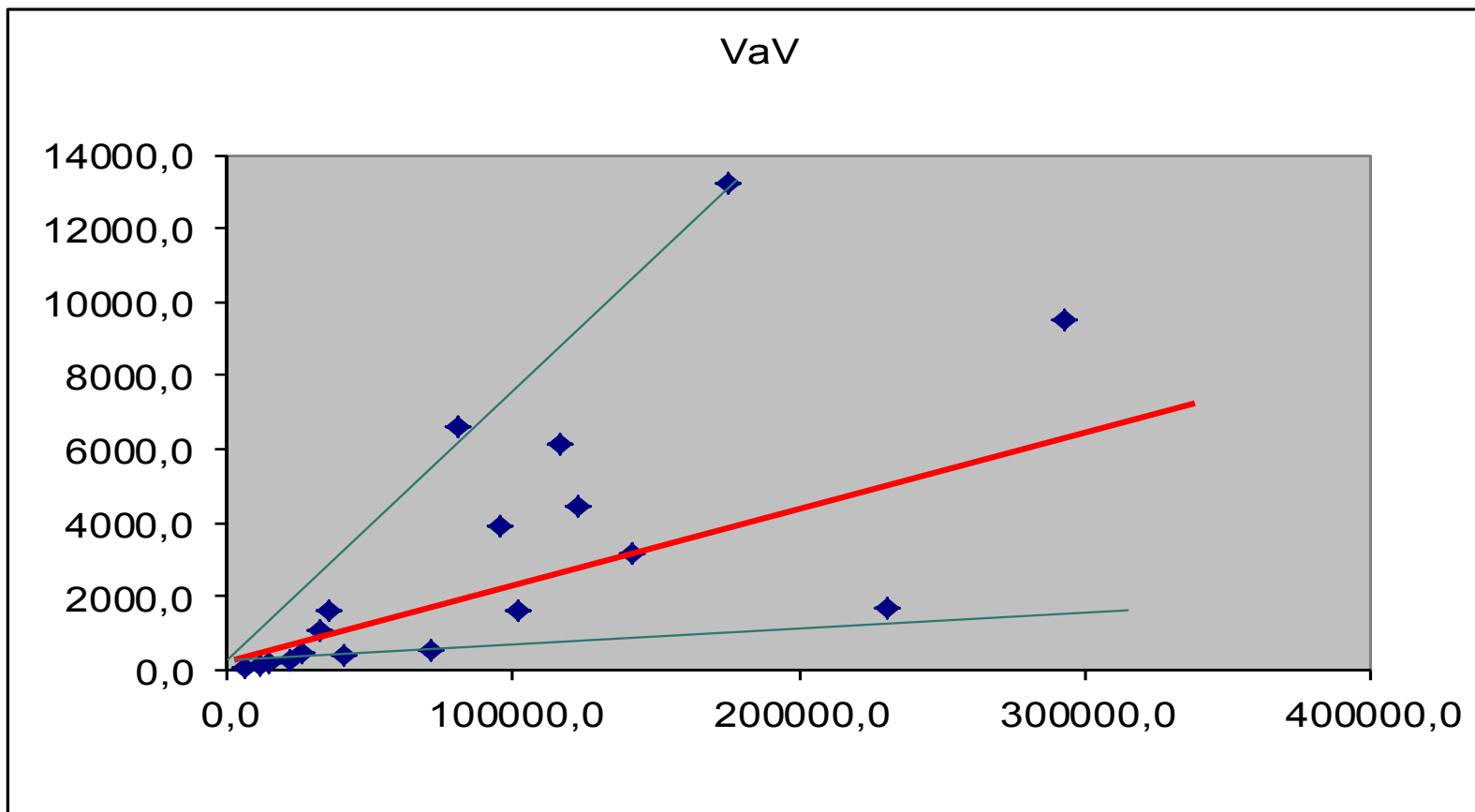
Regresní rovnice: $y = 193 + 0,032x$



Příklad – průmyslové podniky – heteroskedasticita



SLEZSKÁ
UNIVERZITA
OBCHODNĚ PODNIKATELSKÁ
FAKULTA V KARVINĚ





**Ověřením předpokladů se budeme
zabývat v dalších přednáškách.**





Děkuji Vám za pozornost!!!

